

凝縮を伴う超音速ノズル流れの特性曲線法による解析

松尾, 一泰
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

川越, 茂敏
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

園田, 圭介
三菱重工株式会社

権, 純範
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

<https://doi.org/10.15017/17594>

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 6 (1), pp.39-44, 1984-06-01. 九州大学大学院総合理工学研究科
バージョン :
権利関係 :

凝縮を伴う超音速ノズル流れの特性曲線法による解析

松尾一泰*・川越茂敏*
園田圭介**・権純範***
(受理年月日 昭和59年3月31日)

Numerical Analysis by Characteristics Method of Supersonic Nozzle Flow with Condensation

Kazuyasu MASTUO, Shigetoshi KAWAGOE,
Keisuke SONODA and Soon Bum KWON

In the case of rapid expansion of steam in supersonic nozzle on the assumption that the steam is perfect thermally and carolically, the phenomenon for non-equilibrium condensation in two-dimensional inviscid steady state flow has been studied in this paper.

Also, changing of variables of the state in nozzle, onset of condensation, generation and phenomenon of condensation shock wave are investigated by the method of characteristics when the state is changed with degree of superheat and nozzle shape.

The phenomenon of onset of condensation is dependent upon shape of nozzle strongly.

The smaller radius of curvature of nozzle, the configuration of onset of condensation is the more curved.

The lower degree of superheat and the smaller radius of curvature of nozzle (that is, the larger drop of temperature), the generation position of condensation shock wave is the closer to the nozzle throat and the strength of condensation shock wave is the stronger.

1. ま え が き

水蒸気や湿り空気などの凝縮性気体が超音速ノズルで急激に加速膨張する場合、これらは飽和状態に達しても凝縮せず、ある過飽和の状態において、蒸気分子の衝突合体により液相の核（凝縮核）が生成され、非平衡の均一凝縮が起こることが知られている。凝縮が起こると潜熱放出による加熱効果のため、流れの状態量が増加するとともに、凝縮量が多い場合には流れの中に凝縮衝撃波が発生する。

このような凝縮を伴う高速ノズル流れは、蒸気タービンの効率改善などに関連する重要な問題で、従来多くの実験的及び理論的研究^{1)~9)}がなされている。例えば Mathieu⁹⁾ は双曲線形と直線的な広がりをもつ超

音速ノズルに対して数値解析を行い、凝縮の開始線がノズル形状に依存することを示しており、松尾ら⁹⁾は、ノズル内の二次元流れを特性曲線法で数値解析するとともに、実験結果と合せて考察し、凝縮衝撃波の発生機構を明らかにしている。しかし流れの温度降下割合が凝縮開始線及び凝縮衝撃波の発生に及ぼす効果など、現在まだ不明な点が多く残されている。

本論文では、水蒸気がノズルで加速膨張する場合の流れを、二次元定常非粘性流れで、かつ水蒸気は熱的及び熱量的に完全であると仮定して、特性曲線法で解析し、過熱度及びノズル形状を変えた場合のノズル内の状態量の変化や凝縮開始線の形状、及び凝縮衝撃波の発生位置と形状について考察した。

2. 記 号

a : 音速 m/s
 C_p : 定圧比熱 J/kgK

* エネルギー変換工学専攻

** 三菱重工(株)

*** エネルギー変換工学専攻博士後期課程

g : 水の質量と水蒸気の質量との比	
h : エンタルピ	J/kg
h^* : ノズルのスロート高さ	m
I : 核生成率	$1/m^3s$
k : ボルツマン定数	
L : 潜熱	J/kg
m : 分子量	kg/kmol
M : マッハ数	
N : 凝縮核の個数	$1/kg$
p : 圧力	Pa
r : 液滴の半径	m
r_{cr} : 液滴の臨界半径	m
R : 気体定数	J/kgK
R^* : ノズルの曲率半径	m
s : 流線方向の距離	m
S : 過飽和度 $= p/p_s$	
t : 時間	s
T : 温度	K
ΔT : 過熱度 $= T - T_s$	K
u : 流速	m/s
x : スロートを原点とする中心軸方向の座標	m
y : x 軸に垂直方向の座標	m
α : 凝縮係数	
ζ : 液滴の表面張力係数	
η : 左向き特性曲線の方向	rad.
θ : 流線と x 軸がなす角	rad.
μ : マッハ角	rad.
ξ : 右向き特性曲線の方向	
ρ : 密度	kg/m ³
σ : 表面張力	N/m

添字

- 0: よどみ状態
- ∞ : 無限平面
- f : 凍結状態
- l : 液相 (水滴)
- s : 飽和状態
- v : 気相 (水蒸気)

3. 解析方法

Fig. 1 に示すように、スロート高さ h^* 、曲率半径 R^* の二次元先細末広円弧ノズルを考える。本解析では、水蒸気の粘性は小さいとして無視するため、流れ

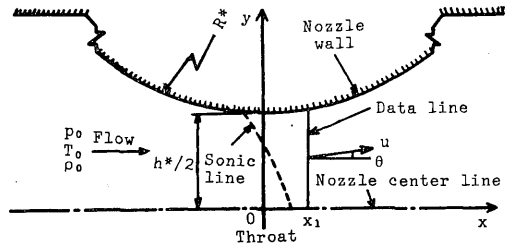


Fig. 1 Nozzle geometry

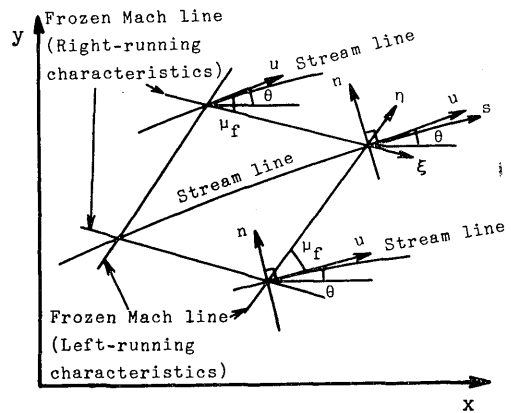


Fig. 2 Relation between stream line and characteristic curve

はノズル中心軸に対して対称であるから、計算は中心線の上半分について行うことにする。

いま、よどみ状態の圧力 p_0 、密度 ρ_0 、温度 T_0 の水蒸気がノズルで膨張する流れを考える。簡単のため、水蒸気は熱的及び熱量的に完全で、水蒸気の凝縮で生ずる液相と気相の温度差及び速度差はないと仮定する。また液相の体積が全体に占める割合は極めて小さく、これを無視する。流れ場の中に、Fig. 2 に示すように、流線方向を s 、それに垂直方向を n とする流線座標系を考えると、流れの基礎方程式は、次のようになる。

連続の式

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (1)$$

s 方向の運動方程式

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad (2)$$

n 方向の運動方程式

$$\rho u^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

エネルギー式

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} = 0 \quad (4)$$

エンタルピ h は、圧力 p 、密度 ρ のほかに、液相の質量比 g にも依存し、次式で表される。

$$h = C_{p0} T - gL \quad (5)$$

ここに C_{p0} はよどみ点状態の定圧比熱、 L は潜熱である。また状態方程式は、

$$p = (1-g)\rho RT \quad (6)$$

式 (5) の g の s 方向の変化を表す速度方程式は次のように表される。

$$u \frac{\partial g}{\partial s} = F(p, \rho, g) \quad (7)$$

ここに F は p, ρ, g の関数で、詳細については後述する。Fig. 2 の x はノズルのスロートを原点とする軸方向座標、 y は x 軸に垂直方向の座標で、上述の式より次の特性方程式が得られる。

左向き特性曲線 η : $dy/dx = \tan(\theta + \mu_f)$ に沿って

$$\sqrt{\frac{u^2}{a_f^2} - 1} dp + \rho u^2 d\theta - \frac{(\partial h/\partial g)}{(\partial h/\partial \rho)} a_f F d\eta = 0 \quad (8)$$

右向き特性曲線 ξ : $dy/dx = \tan(\theta - \mu_f)$ に沿って

$$\sqrt{\frac{u^2}{a_f^2} - 1} dp - \rho u^2 d\theta - \frac{(\partial h/\partial g)}{(\partial h/\partial \rho)} a_f F d\xi = 0 \quad (9)$$

流線 s : $dy/dx = \tan \theta$ に沿って

$$\left. \begin{aligned} \rho u du + dp &= 0 \\ udg - F ds &= 0 \\ udu + dh &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに μ_f は凍結マッハ角で、

$$\mu_f = \tan^{-1}(1/\sqrt{(u/a_f)^2 - 1})$$

である。また a_f は凍結音速で次式で表される。

$$\begin{aligned} a_f &= \left(-\frac{\partial h/\partial p}{\partial h/\partial p - 1/\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{C_{p0}}{C_{p0} - (1-g)R} \cdot \frac{p}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (11)$$

次に式 (7) の関数 F を求めるため、液相の質量比

g の流線方向の変化割合を考える。流線を微小区間に分割し、その長さを ds とすれば、任意の区間 k において、流体がその区間を通過する間に、単位質量当りに蒸気分子自身の衝突合体で発生する凝縮核の個数 N_k は

$$N_k = I_k ds_k / \rho_k u_k \quad (12)$$

ここに I_k は区間 k における核生成率で、Frenkel¹⁰⁾によれば次式で表される。

$$I_k = \frac{1}{\rho_l} \left(\frac{2m\sigma}{\pi A_v} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p}{kT} \right)^2 \exp\left(-\frac{4\pi r_{cr}^2 \sigma}{3kT} \right) \quad (13)$$

ここに A_v はアボガドロ数、 ρ_l は水の密度、 r_{cr} は臨界半径で、 r_{cr} は次式で表される¹⁰⁾。

$$r_{cr} = \frac{2\sigma}{\rho_l RT \ln p/p_s} \quad (14)$$

従って区間 k より下流の区間 i における液相の質量比の増加割合 dg_i は、区間 i において新たな凝縮核の発生による増加割合と、上流で発生した液滴の成長による増加割合の和で表され、

$$\begin{aligned} dg_i &= \frac{4}{3} \pi \rho_l N_i (r_{cr})^3 \\ &+ \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ 4\pi \rho_l N_k r_k^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)_i \frac{ds_i}{u_i} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに r は液滴の半径で、その単位時間当りの成長速度 dr/dt は¹¹⁾

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha}{\rho_l \sqrt{2\pi RT}} \left[p - p_s \exp\left(\frac{2\sigma}{\rho_l RT r} \right) \right] \quad (16)$$

式 (14) と (16) は液滴を球体と仮定して得られる式で、式 (16) の α は凝縮係数、 p_s は水蒸気の飽和蒸気圧である。また σ は液滴の表面張力で、本論文では水の無限平面における表面張力 σ_∞ と表面張力係数 ζ を用い

$$\sigma = \zeta \sigma_\infty \quad (17)$$

式 (7) と (15) より、関数 F は、次のように表される。

$$\begin{aligned} F_i &= u_i \frac{dg_i}{ds_i} = \frac{u_i}{ds_i} \left[\frac{4}{3} \pi \rho_l N_i (r_{cr})^3 \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ 4\pi \rho_l N_k r_k^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)_i \frac{ds_i}{u_i} \right\} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

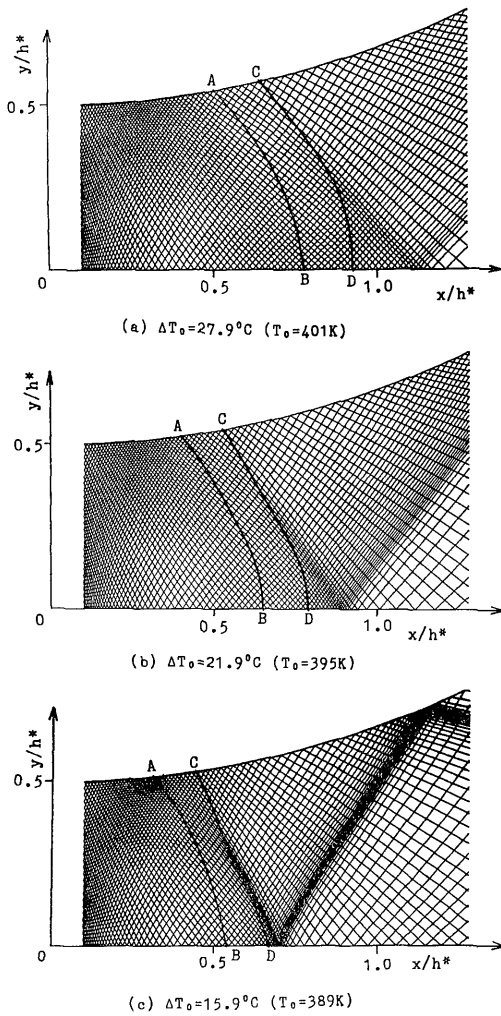


Fig. 3 Frozen Mach line plots

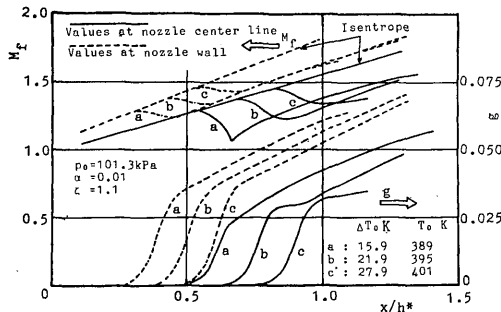


Fig. 4 Flow property distribution at center line and wall of nozzle

上述の諸式を用いてノズル内の流れを計算する際、水の飽和圧力 p_s と表面張力 σ_∞ は、それぞれ文献(12)と(13)に基づき、温度の関数として与えた。また計算を開始するために必要なデータラインは、貯気槽からデータラインまでは凝縮が起こらないと仮定して、Hall¹⁴⁾の式を用い、Fig. 1に示すように、音速線下流の点 x_1 で x 軸に垂直に与えた。計算に際しては式(16)の凝縮係数 α と式(17)の表面張力係数 σ の値をそれぞれ0.01と1.1に選んだ¹⁰⁾。

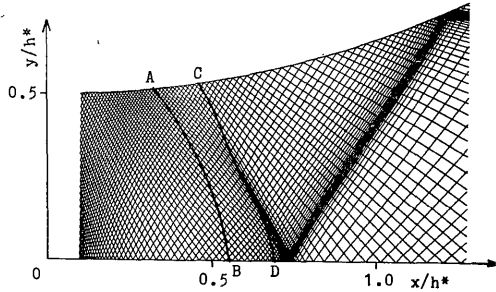
なお計算を行った円弧ノズルは曲率半径 $R^* = 60$ mm, 100 mm, 160 mm の3種類で、スロート高さ h^* はいずれも20 mmとした。

4. 計算結果と考察

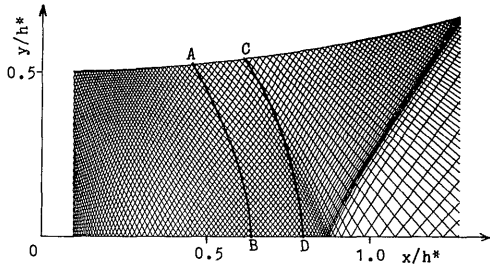
4.1. 過熱度の影響 $h^* = 20$ mm, $R^* = 60$ mm の円弧ノズルに対して、過熱度 ΔT_0 を変化させた場合の計算結果を Fig. 3, 4 に示す。Fig. 3 はノズル内の凍結マッハ線(特性曲線)を示し、縦軸と横軸はそれぞれ y と x を h^* で無次元化してある。Fig. 4 は Fig. 3 に対する凍結マッハ数 M_f と液相の質量比 g のノズル壁面及び中心線における変化を示し、実線は中心線上の値、破線は壁面上の値である。Fig. 3 の曲線 AB は g が増加し始める位置を示し、曲線 CD は核生成率がほぼゼロとなる位置(過飽和度が1)すなわち非平衡凝縮の終了位置を示す。従って両曲線で囲まれた領域を非平衡凝縮領域と考えることができる。過熱度が高い $\Delta T_0 = 27.9$ K の場合、Fig. 4 からわかるように、凝縮が始まると g は急激に増加し、 M_f は減少するが、Fig. 3 (a)に見られるように、凝縮によって流れ場に生ずるじょう乱は極めて小さい。このじょう乱は、Fig. 3 (b), (c) から明らかのように、 ΔT_0 の減少とともにしだいに明確になり、その発生位置はノズルスロートに近づく。またじょう乱の発生位置は、ノズル壁面近傍では非平衡凝縮領域の終了線の近くであるが、中心線付近では終了線よりやや下流にある。 ΔT_0 が最も小さい Fig. 3 (c) では、じょう乱は合体して斜めの凝縮衝撃波を形成しており、その中心線からの反射波も観察される。このようにじょう乱が斜めに現れるのは、ノズルの二次元性の影響で、Fig. 4 よりわかるように、いずれの過熱度の場合もノズル中心線上に比べ、壁面上で凝縮が早く起こるためである。なお液相の質量比 g は、Fig. 4 からわかるように、増加しつづけ、理論的には1に近づく。

4.2. ノズル形状の影響 過熱度 ΔT_0 を 17.9 K の一定値に保ち、ノズルのスロート高さ h^* を 20 mm に固定して、曲率半径 R^* を変えた場合の凍結マッハ線を Fig. 5 に、マッハ数 M_f 及び質量比 g の変化を Fig. 6 に示す。Fig. 5 の曲線 AB と CD は、Fig. 3 と同様に、それぞれ凝縮開始位置と非平衡凝縮の終了位置を示す。 R^* が小さい Fig. 5 (a) では、凝縮に伴って発生するじょう乱は合体して斜めの凝縮衝撃波を形成し、その中心線からの反射波も見られる。 Fig. 3 (c), (d) からわかるように、この凝縮衝撃波は R^* が大きいほど弱くなり、その発生位置が下流側に移動する。 Fig. 3 (a)~(c) のいずれにおいても、凝縮衝撃波の位置はノズル壁面付近の方が中心線付近より凝

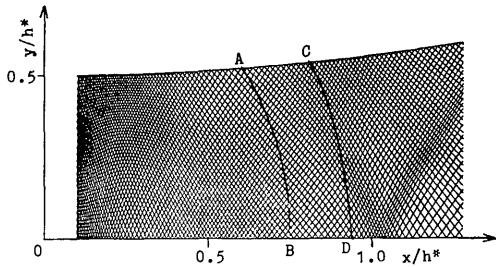
縮開始線に近く、凝縮衝撃波は凝縮開始線よりわん曲している。このことは凝縮開始線より凝縮衝撃波の方が、ノズルの二次元性の影響を強く受けることを示している。また Fig. 6 より R^* の小さいノズルほど g が増加し始める点、すなわち凝縮開始点におけるマッハ数は漸増する。さらに凝縮の開始点はノズル中心線より壁面上の方がスロートに近い。これは流れの温度



(a) $R^*=60\text{mm}$, $h^*=20\text{mm}$, $T = 391\text{K}$



(b) $R^*=100\text{mm}$, $h^*=20\text{mm}$, $T = 391\text{K}$



(c) $R^*=160\text{mm}$, $h^*=20\text{mm}$, $T = 391\text{K}$

Fig. 5 Frosen Mach line plots

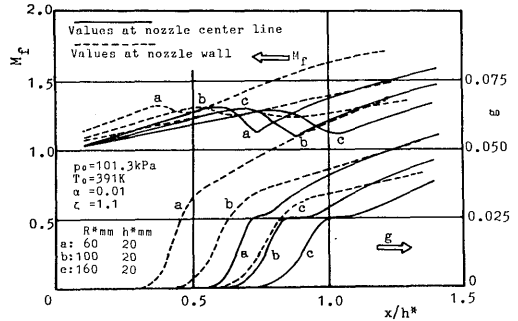
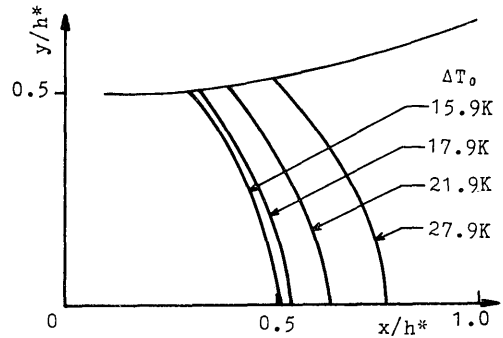
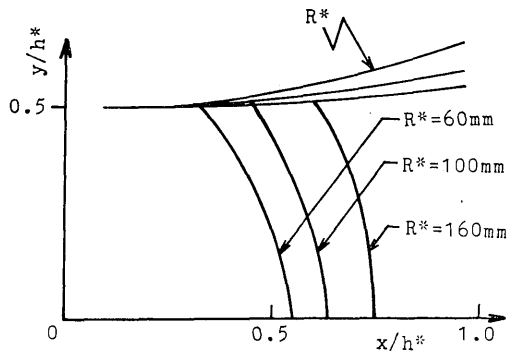


Fig. 6 Flow property distributions at center line and wall of nozzle



(a) Effect of ΔT_0



(b) Effect of R^*

Fig. 7 Configuration of onset of condensation

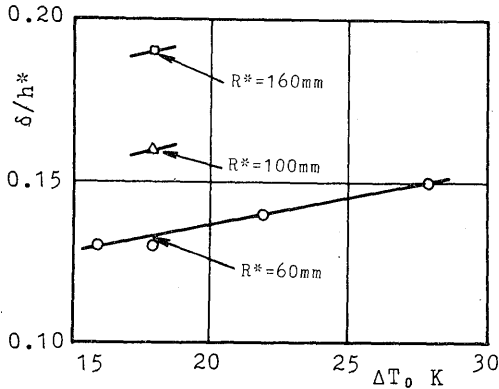


Fig. 8 Length of nonequilibrium condensation zone

降下割合が大きいほど、凝縮開始位置における過飽和度が高くなるためである。

4.3. 凝縮開始線の形状 Fig. 3, 5 の凝縮開始線 AB をまとめて示すと Fig. 7 のようになる。Fig. (a) は同一ノズルで ΔT_0 を変化させた場合で、 ΔT_0 が大きいほど開始線は下流側に移動する。図(b) は $\Delta T_0 = 17.9$ K の一定とし、 R^* を変化させた場合で、 R^* が小さいほど、すなわち流れの温度降下割合が大きいほど開始線の形状はわん曲し、その位置は上流に移動する。これは R^* が小さいほど流れの二次元性の影響が強くなるためである。

4.4. 非平衡凝縮領域の幅 以上の計算結果より得られる非平衡凝縮領域の中心線上における幅 δ をノズルスロート高さ h^* で除した値を過熱度 ΔT_0 に対して Fig. 8 に示す。図より $R^*=60$ mm のノズルでは、 ΔT_0 の増加とともに δ/h^* の値はわずかに増加するのがわかる。また過熱度を一定に保ち、 R^* を変化させると δ/h^* は R^* が小さいほど小さい。これは Fig. 6 の液相の質量比 g の分布より R^* が小さいほど、非平衡凝縮領域における g の増加割合が大きいと思われる。

5. 結 論

水蒸気が二次元先細末広円弧ノズル内で加速膨張され凝縮が起こる場合の流れを、特性曲線法で数値解析し、次の結論が得られた。

(1) 過熱度が小さいほど、またノズルの曲率半径

が小さく、流れの温度降下割合の大きいノズルほど凝縮衝撃波の発生位置はノズルスロートに近づき、その強さも増加する。

(2) 本解析の範囲では、凝縮衝撃波は流れに対して斜めの衝撃波となり、ノズル壁面付近では凝縮衝撃波の位置は凝縮開始線に近いが、ノズル中心線上では、両者の間隔は、壁面付近に比べて相対的に離れる。従って凝縮衝撃波の形状は凝縮開始線の形状よりわん曲する。

(3) 凝縮開始線の形状はノズルの形状に強く依存し、曲率半径の小さいノズルほど、わん曲する。

(4) 非平衡凝縮領域の幅は過熱度が一定の場合、曲率半径が小さいノズルほど小さく、同一のノズルでは過熱度が大きいほど大きい。

参 考 文 献

- 1) Lukasiewicz, J. and Royle, J. K., Aeron. Res. Council, Rep. and Memo., No. 2563 (1953).
- 2) Wegener, P. P. and Pouring A. A., Phys. Fluids, 7-3 (1964), 352.
- 3) Deych, M. YE, et al., Heat Trans.-Sov. Res., 1-5 (1969), 95.
- 4) Hall, P. G., J. Fluid Mech., vol. 25, Part 3(1966), 593.
- 5) Saltanov, G. A., et al., Int. J. Heat Mass Transfer, 16 (1973), 1577.
- 6) Moses, C. A. and Stein, G. D., ASME Joint Applied Mechanics, Fluids Engineering and Bioengineering Conference (1977), 1.
- 7) Saltanov, G. A. and Simanovski, G. P., Fluid Dynamics, 13-14 (1978), 555.
- 8) Mathieu, P., Letters in Heat and Mass Transfers, 6-11 (1979), 61.
- 9) 松尾ほか3名, 機講論, No. 838-2 (1983), 123.
- 10) 松尾ほか2名, 総合理工学研究所報告, 3-2 (1981), 155.
- 11) Kang, S. W., AIAA J., 5-7 (1967), 1288.
- 12) Wegener, P. P., Nonequilibrium Flow, Part 1, (1969), 163. Marcel Dekker.
- 13) 渡辺ほか2名, 機誌, 81-720 (1978), 1182.
- 14) Hall, I. M., J. Mech and Applied Math., 15-4 (1962), 487.