一様等法制をもつ強制乱流の渦構造

跡部, 隆
九州大学大学院総合理工学研究科

上野, 潤一郎
富士通（株）

蕪木, 英雄
日本原子力研究所

渡辺, 正
日本原子力研究所

https://doi.org/10.15017/17403

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 18 (1), pp.45-49, 1996-06-01. 九州大学大学院総合理工学研究科

九州大学大学院総合理工学研究科報告
第18巻 第1号 45-49頁 平成8年6月

Engineering Sciences Reports, Kyushu University
(KYUSHU DAIGAKU SOGORIKOGAKU KENKYUKA HOKOKU)
Vol. 18, No. 1 pp. 45 - 49 JUNE. 1996

一様等方性を持つ強制乱流の渦構造

跡部　隆*・上野潤一郎**
蕪木英雄†・渡辺　正†

(平成8年2月29日　受理)

The Vortex Structure in the Forced Homogeneous Isotropic Turbulence

Takashi ATOBE*, Junichiro UENO**, Hideo KABURAKI† and Tadashi WATANABE†

Three-dimensional forced homogeneous isotropic turbulence is investigated by a direct numerical simulation of the Navier-Stokes equations for an incompressible flow. Although homogeneous isotropic turbulence is an idealized model of turbulent phenomena, it is an excellent one for studying the energy cascade process and small scale turbulent structure. There are many experiments on turbulence, but it is difficult to collect spatial data from experiments. The recent development of supercomputers makes large scale direct simulations possible, and spatial structure of the turbulence can be examined through it. Thus we have developed a parallelized direct numerical simulation code for a forced homogeneous isotropic turbulence. Our objective is to investigate the structure of vorticity of the small scale turbulence. We employed the Fourier transform method with 256^3 Fourier modes. The Taylor microscale Raynolds number, R_λ, is about 110 at statistically steady state. In this calculation, the worm-shaped structures appear by observing the contour surface of vorticity field, and we found that worms are combined to form a sheet-shaped structure, and then the sheet rolls into a worm as time progresses.

1 序

レイノルズの実験に始まり現在にいたるまで，乱流現象の研究は実験的にも理論的にも多くの研究者によってなされてきた．なかでもコルモゴロフによって提唱された理論は，現在の乱流理論の研究において今なお重要な位置を占めている．

コルモゴロフの仮説[1,2]によると，波数空間における乱流のエネルギースペクトルはある普遍的な形をとる．また発達した乱流場には，速度などの変動成分の分布がガウス分布からずれるという，わゆる間欠的な性質が存在する．これらの性質は現実の乱流においても普遍的に存在し得ることが実験的研究によって確認された[3]．しかし現在までに様々なモデルや理論によってこれらの結果を説明する努力が続けられているが[4,5]，今だにはっきりとした結論を得るには至っていない．

近年における計算機性能の飛躍的な進歩は，これらの乱流現象の解明にも大きく貢献している．これまでには扱うことができなかった大規模でかつより精度の高い計算を比較的短い時間で行なうことができるようになったのである．その結果，ナビエ・ストークス方程式そのものを数値計算によって解く，いわゆる直接数値シミュレーション（DNS）と呼ばれる手法が確立した[6]．

最近，このDNSによるコルモゴロフの仮説の検証が数多く行われ，数値計算によって得られた結果においても上記の性質が現れることが確認された．またDNSによると実験では得ることが困難な空間データを容易に得ることができるため，速度場や温度場などの物理量の空間変動の様子が解析可能になった[7-12]．

その結果，発達乱流における渦度場について比較的強い渦度を持つ等渦度面を描くと，小さなチューブ状の構造が現れることが明らかになった[8]．これはワーム（worm）と呼ばれ，間欠性との関連も含めて現在精力的に研究されているものの一つである．

しかしこれらの研究は，主としてワームの発生過程に重点をおいているため，乱流場としては減衰乱流を扱ったものが多い．また強制乱流を扱ったものもあるが，いずれにしてもワームの挙動の時間発展を調べたものはない．そこで我々は発達した乱流場におけるワームの振舞いを調べるため，外力が常に加わる強制乱流，すなわち定常乱流のDNSを行ない，渦度場の時間発展を詳細に調べた．

第2章では本研究で行ったDNSにおける基礎方程式，また数値計算法を解説する．そしてこの数値計算によって得られた結果を第3章にまとめ，また第4章

*総合理工学研究科研究生
**富士通株式会社
†日本原子力研究所
紹介者：及川正行　応用力学研究所，大気海洋環境システム学専攻

において結論を述べる．

2 数値計算法

2.1 基礎方程式と離散化

直角座標系 $x=(x_1, x_2, x_3)$ における流体の運動は下記に記すナビエ・ストークス方程式と連続の式によって記述されるものとする．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{2}$$

ただし

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

ここで，t は時間，$\boldsymbol{u}=(u_1(\boldsymbol{x}, t), u_2(\boldsymbol{x}, t), u_3(\boldsymbol{x}, t))$ は流体の速度，$p=p(\boldsymbol{x}, t)$ は圧力，ρ は密度，ν は動粘性係数である．ただし，流れの場全体を通じて流体の運動による密度変化は十分小さく，無視できるものとする．$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ は外力で，粘性によるエネルギー散逸とこの項によるエネルギー注入がつりあったところで定常乱流が実現される．ただしここでいう定常状態とは，総エネルギー等の統計量が一定値に漸近した状態を指しており，速度等の各物理量の大きさは時間，空間的に乱雑に変化している．また計算領域は3次元立方領域 $\Omega=[0, 2\pi]\times[0, 2\pi]\times[0, 2\pi]$ を考え，速度場は周期境界条件を満足するものとする．

いま，(1)，(2) 式を渦度 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}=(\omega_1(\boldsymbol{x}, t), \omega_2(\boldsymbol{x}, t), \omega_3(\boldsymbol{x}, t))$ を用いて表現し，さらに速度，渦度，そして外力についてそれぞれ3次元フーリエ展開を行うと，フーリエ係数に関する次の発展方程式を得る．

$$\frac{d}{dt}\tilde{\omega}_j=\epsilon_{jkl}k_k k_m\widetilde{u_l u_m}-\nu k^2\tilde{\omega}_j+\tilde{F}_j,\ [j=1, 2, 3], \tag{3}$$

$$k_j\tilde{u}_j=0 \tag{4}$$

ただし

$$\tilde{\omega}_j=-\epsilon_{jkl}k_k\tilde{u}_l. \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{k}=(k_1, k_2, k_3)$，$k=|\boldsymbol{k}|$ であり，ε_{jkl} は交代テンソル，また式中2度現れる添字については和をとるものとする．さらに $\tilde{u}_j=\tilde{u}_j(\boldsymbol{k}, t)$, $\tilde{\omega}_j=\tilde{\omega}_j(\boldsymbol{k}, t)$, $\tilde{F}_j=\tilde{F}_j(\boldsymbol{k}, t)$ はそれぞれ速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$，と渦度 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t)$，そして $\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$，のフーリエ係数の j 成分であり，これらは以下のように定義される．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)=i\sum_{k_1=-N}^{N-1}\sum_{k_2=-N}^{N-1}\sum_{k_3=-N}^{N-1}\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}, t)\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}], \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t)=\sum_{k_1=-N}^{N-1}\sum_{k_2=-N}^{N-1}\sum_{k_3=-N}^{N-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{k}, t)\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}], \tag{7}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)=\sum_{k_1=-N}^{N-1}\sum_{k_2=-N}^{N-1}\sum_{k_3=-N}^{N-1}\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{k}, t)\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]. \tag{8}$$

ここで $2N$ は各方向のフーリエモード数を表す．また (3) 式右辺第1項，第2項はそれぞれナビエ・ストークス方程式の移流項と拡散項に対応し，$\widetilde{u_l u_m}(\boldsymbol{k}, t)$ は，$u_l(\boldsymbol{x}, t)u_m(\boldsymbol{x}, t)$ のフーリエ係数を表す．

$$u_l(\boldsymbol{x}, t)u_m(\boldsymbol{x}, t)=$$

$$\sum_{k_1=-N}^{N-1}\sum_{k_2=-N}^{N-1}\sum_{k_3=-N}^{N-1}\widetilde{u_l u_m}(\boldsymbol{k}, t)\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}] \tag{9}$$

(3) 式の時間積分については，4段4次のルンゲ・クッタ法を用いる．また計算手法に伴うエイリアジングエラーを除去するため，3/2則と呼ばれる方法を併用している．

2.2 乱流場のエネルギーと時間スケール

乱流場のエネルギーは波数空間で評価するものとし，各波数についてのエネルギーの大きさを表すエネルギースペクトル関数 $E(k, t)$ を次のように定義する．

$$E(k, t)\equiv\frac{1}{2}\sum_{|k|=k}|\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}, t)|^2. \tag{10}$$

これは波数空間における原点を中心とする半径 k の球殻内（単位厚さ）に含まれるエネルギーの量を表す．さらにこの $E(k, t)$ を用いると，渦の転回時間 (eddy-turnover time) $T_E(t)$ は次のように定義される．

$$T_E(t)\equiv L(t)/U(t). \tag{11}$$

ここで，$U(t)$, $L(t)$ はそれぞれ

$$U(t)=\sqrt{\frac{2}{3}\int E(k, t)dk}, \tag{12}$$

$$L(t)=\frac{\pi}{2U(t)^2}\int k^{-1}E(k, t)dk, \tag{13}$$

であり，$L(t)$ は積分スケールと呼ばれるものである．この $T_E(t)$ は乱流場における代表的な渦が一回転するのに要する時間に相当するもので，系の時間発展を考える上で必要な時間スケールの一つである．

2.3 計算条件

本研究における数値計算ではフーリエスペクトル法を用いているが，そのときの格子点（フーリエモード）数 $2N$，時間きざみ Δt，また動粘性係数 ν はそれぞれ

$2N=256$,

$\varDelta t=0.001$,

$\nu=0.002$,

とする．また初期速度場におけるエネルギースペクトルは以下に示す典型的な exp 型に合わせる．

$$E(k,0)=Ck^4\exp[-2k^2],\ (C：任意定数) \tag{14}$$

ここで，(10)式右辺の和の部分の組合わせは乱数により正規分布で与える．

乱流場を励起する外力 $\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{k},t)$ は，初期速度場におけるエネルギースペクトル $E(k,0)$ の各成分のうち，$k=1$ の低波数成分を固定した形，すなわち，

$$E(1,t)=E(1,0)=C_0,\ \ (C_0：定数), \tag{15}$$

を満足するように与える．またそれ以外の $E(k,t)|_{k\neq1}$ は，ナビエ・ストークス方程式にしたがって時間発展する．

本計算におけるレイノルズ数は代表波数，代表速度をそれぞれ k_0, U_0 とすると，次のように定義される．

$$R\equiv\frac{U_0}{\nu k_0} \tag{16}$$

ここで(14)式で与えられる初期スペクトルは $k=1$ で最大値を持つもので，代表波数 k_0 は１とする．また代表速度 U_0 を

$$U_0\equiv\sqrt{2\int E(k,0)}, \tag{17}$$

と定義し，かつ $\sqrt{2\int E(k,0)}=1$ となるように $E(k,0)$ を正規化すると，初期レイノルズ数は

$$R=1/\nu=500 \tag{18}$$

となる．

3　計　算　結　果

3.1　エネルギースペクル

Fig. 1 はエネルギースペクル関数，すなわち各波数についてエネルギーの大きさをプロットしたものである．ただし両軸とも対数で表している．図中左側の一点鎖線は初期スペクトル $E\ (k,0)$ の形を表している．このように初期速度場のエネルギーは，$k=1$ で最大値を持つように与えられる．右側の破線が十分時間発展した後，$t=t_0\simeq5T_E(0)$ におけるスペクトルの様子である．これを見ると初期において低波数側にのみ局在していたエネルギーが，時間発展ともに高波数側に輸送されていることかわかる．この現象は，大きな渦構造のより小さな渦構造への遷移過程に付随するものであり，エネルギーカスケード呼ばれるものである．このエネルギーカスケードは，ナビエ・ストークス方程式の非線形性によるもので，低波数領域のエネルギーはこのカスケードによって非常に小さなスケールの渦にまで達し，最終的には粘性によって散逸されるものと考えられている．図中の直線は $k^{-5/3}$ に対応しており，この図を見る十分発達した乱流のエネルギースペクトルが慣性小領域においてこの直線にのるという，いわゆるコルモゴロフの−5/3乗則の性質がよく表われていることがわかる．

また(19)式によって定義されるテイラーのマイクロスケール λ は約0.3で，これに基づくレイノルズ数 R_λ は約110である．

$$\lambda\equiv\sqrt{\frac{5\int E(k,t)dk}{\int k^2E(k,t)dk}}. \tag{19}$$

これまでに報告されているフーリエモード数256^3の計算の中でこの R_λ の値はやや大きめになっているが，これは外力によるエネルギー注入に起因していると思われる．

3.2　渦度場の幾何学的構造

以下に示す図は，定常状態以降の物理空間における渦度場の様子を，等渦度面を用いて表したものである．このときの渦度の大きさは全体の渦度の自乗平均の約４倍としており，比較的強い渦度を持つ領域を表している．また本研究の興味は渦度場の微細構造にあるので，ここに示す図は全領域の中心部1/8だけを拡大して表している．

Fig. 2 は $t=0$ における等渦度面で，渦度場の初期状態を表している．ただし，初期渦度場が強渦度領域を持たないため，この図のみ閾値をかなり小さな値に設定している．またこの図のみ，計算領域全体を表している．これを見ると等渦度面がシート状になっており，また空間全域に一様に分布していることがわかる．このことは，初期渦度場を正規分布によって与えていることに起因している．

Fig. 3 は $t=t_0$，すなわち十分時間発展した後の等渦度面を表す．図中に，中央にみえる一本の直線は物理空間に注入した色素に相当しており，この動きを見ると速度場の変化の様子を知ることができる．（しかしながら今回の一連の計算では，この色素を構成している粒子数の不足から，速度場に関してはあまり有意義な結果を得ることができなかった．）

この図の等渦度面を注意深く観察すると，チューブ状の構造とそれをつぶしたようなシート状の構造を見ることができる．またこれらの構造は空間的に一様に分布しているようには見えない．

これまでの結果では，乱流場の発達過程においては等渦度面はまず薄いシート状になっており，それが時間発展にともなって徐々に巻きあがってチューブ状に変化していくと考えられている．（これはケルビン・

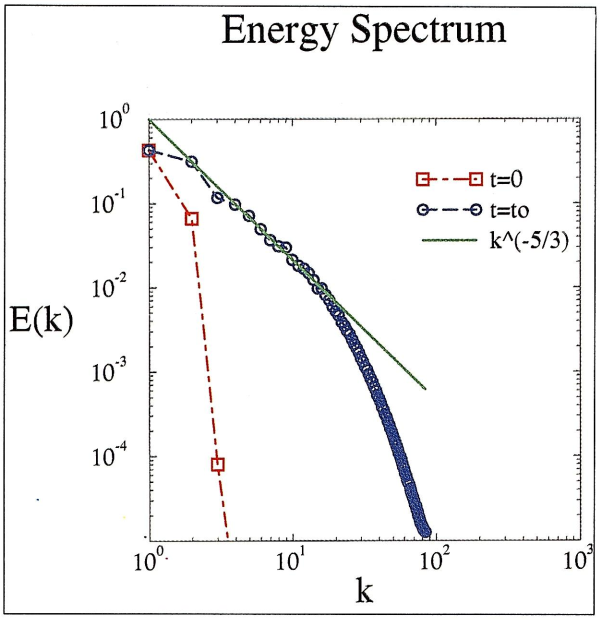

Fig. 1　The energy spectrum. The dash-dotted line (□) and dashed line (○) represent the energy spectrum at $t=0$ and $t=t_0$, respectively. The straight line corresponds to the Kolmogorov spectrum $E(k) \propto k^{-5/3}$.

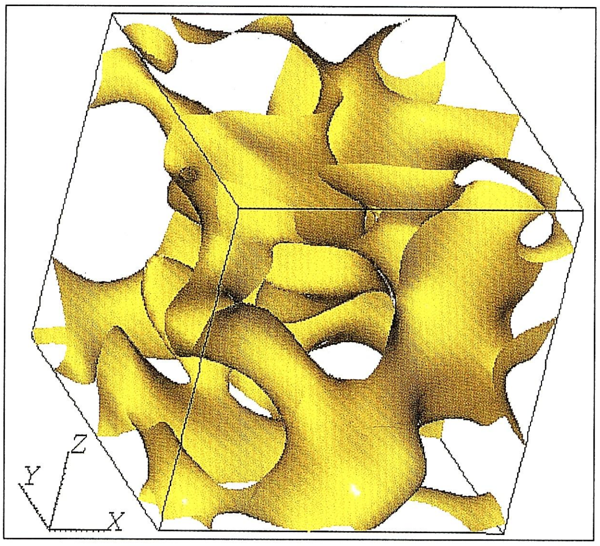

Fig. 2　The contour surface of the vorticity at $t=0$.

ヘルムホルツ型不安定によるものと考えられているが，まだ確証は得られていない.）このチューブ状の渦構造がワームと呼ばれるものである．そして十分発達した乱流場においてシート状の構造はみられずワームのみが存在し，このワームも最終的には粘性によって消滅していくものと理解されている．ところが **Fig. 3**で見たように我々のシミュレーションでは定常状態に達した後の渦度場においてもシート状の構造が存在している．このことは，本研究における乱流が常に外力が加わる強制乱流であることから，この外力の影響が現れているものと思われる．

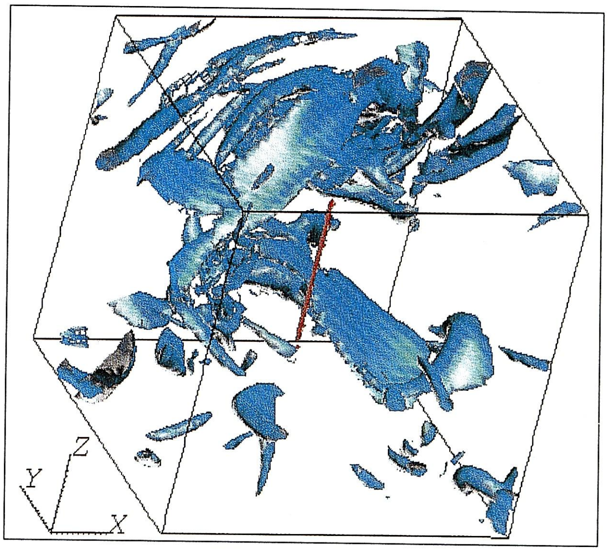

Fig. 3　The contour surface of the vorticity at $t=t_0 \simeq 5T_E(0)$.

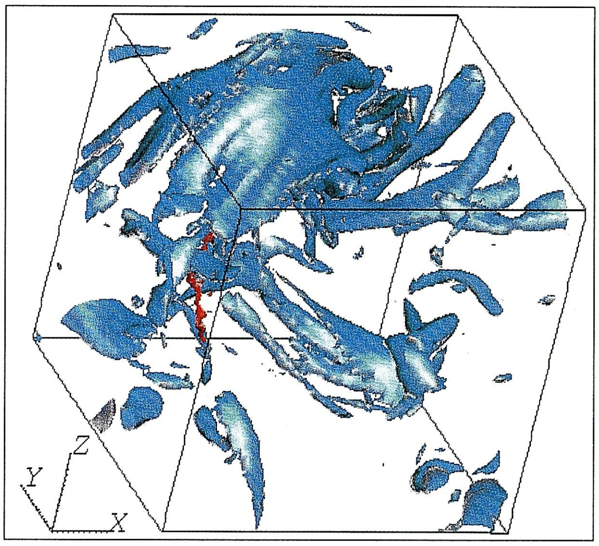

Fig. 4　The contour surface of the vorticity at $t=t_0+0.1T_E(t_0)$.

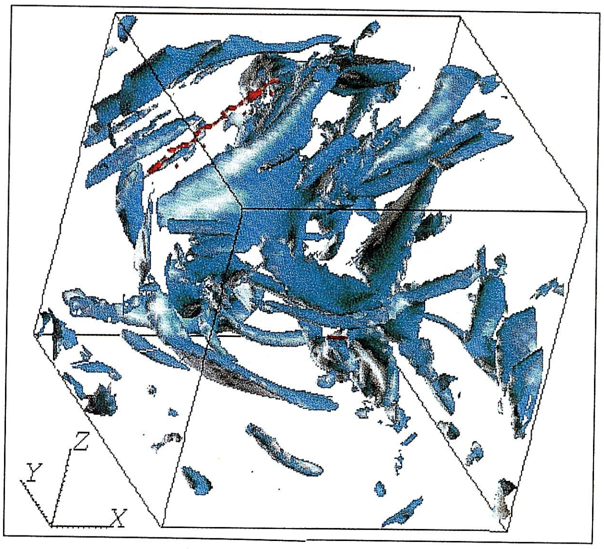

Fig. 5　The contour surface of the vorticity at $t=t_0+0.3T_E(t_0)$.

また，初期において渦度を一様に分布させているにもかかわらず，時間発展後ワームの非一様分布が観測されることは，ワーム状の渦構造の存在が乱流場に間欠性をもたらす原因になっていると考えられる．

Fig. 4 は **Fig. 3** の状態から $0.1T_E(t_0)$ 秒後の様子であるが，ここでは図中左上の部分に比較的大きなシート状の構造をみることができる．中間の時間発展の様子を詳細に調べると，このシートは複数のワームの融合によって形成されていることがわかった．減衰乱流の DNS では，シートからワームへの遷移は報告されているが，この図の示すようにワームからシートへの遷移過程はこれまでには見られていない．更に時間発展させた後，$t=t_0+0.3T_E(t_0)$ における渦度場の様子を **Fig. 5** に示す．ここでは先ほどのシートが再度巻きあがって新たなワームを形成していることがわかる．このように強制乱流における渦構造の時間発展においては，減衰乱流にみられるような単純な遷移過程ではなく，シートからワーム，ワームからシートへとより複雑な発達過程が存在することが明らかになった．これらの結果は，強制乱流における外力のかけ方に大きく依存しているものと思われ，ワームの生成過程と密接に関わるものとして興味深い現象である．

4 結　　論

本研究では，常に外力が加わる3次元一様等方乱流の直接数値シミュレーションを行い，渦度場の幾何学的構造の時間発展の様子を定性的に調べたものである．数値計算はフーリエスペクトル法を用い，その際のフーリエモード数は256^3である．初期速度場のレイノルズ数は500で，また十分時間発展した後のテイラーのマイクロスケールに基づくレイノルズ数は約110である．

その結果，十分時間発展した後の強制乱流の渦度場においては，比較的強い渦度での等渦度面がチューブ状になるワームと呼ばれる構造と，シート状の構造が共存することがわかった．また渦度場の時間発展においては，複数のワームの融合によるシートの形成と，更にそのシートによるワームの形成がみられた．この一連の乱流渦度場の時間発展の様子は，ワームの生成，発達過程に関連して興味深いものである．またこれらの結果は，本研究における乱流場が常に強制力によって励起されていることに起因していると思われる．しかしここで用いた外力は数値計算上便宜的に設定したものであり，何らかの物理現象を直接モデル化したものではない．このことから，今後は乱流場の時間発展の強制力依存性を詳細に調べる必要があると考えている．

謝　辞

本研究における数値計算は日本原子力研究所の富士通 VPP500 を用いて行なわれた．また，計算コードの開発においては，日本原子力研究所横川三津夫氏より多大なるご助言を頂きましたこと，深く感謝いたします。

参 考 文 献

1) A. N. Kolmogorov: C. R. Acad. Sci. U. R. S. S. **30** (1941) 299.
2) A. N. Kolmogorov: C. R. Acad. Sci. U. R. S. S. **31** (1941) 99.
3) S. G. Saddoughi and S. V. Veeravalli: J. Fluid Mech. **268** (1994) 333.
4) R. H. Kraichnan: Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 575.
5) I. Hosokawa: Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1054.
6) S. A. Orszag and G. S. Patterson: Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 76.
7) R. M. Kerr: J Fluid Mech. **153** (1985) 31.
8) K. Yamamoto and I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Japan. **57** (1988) 1532.
9) A. Vincent and M. Meneguzzi: J. Fluid Mech. **225** (1991) 1.
10) Z.-S. She: Phy. Rev. Lett. **66** (1991) 600.
11) S. Chen, G. Doolen, R. H. Kraichnan and Z.-S. She: Phys. Fluid A**5** (1993) 458.
12) J. Jiménez, A. A. Wray, P. G. Saffman and R. S. Rogallo: J. Fluid Mech. **255** (1993) 65.