n次元レイノルズ応力テンソルの Realizability の一般証明

清水, 昭比古
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

吉田, 啓之
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

https://doi.org/10.15017/17289

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 14 (4), pp.397-402, 1993-03-01. 九州大学大学院総合理工学研究科

九州大学大学院総合理工学研究科報告
第14巻 第4号 397-402頁 平成5年3月

Engineering Sciences Reports, Kyushu University
(KYUSHU DAIGAKU SOGORIKOGAKU KENKYUKA HOKOKU)
Vol. 14, No. 4 pp. 397 - 402 Mar. 1993

n次元レイノルズ応力テンソルの Realizability の一般証明

清 水 昭比古*・吉 田 啓 之**

(平成4年11月30日 受理)

Universal Proof of Realizability for n-dimensional Reynolds Stress Tensor

Akihiko SHIMIZU and Hiroyuki YOSHIDA

This paper presents mathematically rigorous and universal proof of realizability conditions which, Schumann insists, any Reynolds stress component must satisfy. In contrast to Schumann's original proof, present one is for n-dimensional Reynolds stress, so that it is expected to be applicable for general situations wherein correlations between many fluctuating quantities in multidimensional probability process should be taken into consideration.

1. 緒 言

レイノルズ応力モデルにおいてはレイノルズ応力 $R_{\alpha\beta}$ $(=\langle u'_\alpha\ u'_\beta\rangle)$ の輸送方程式中の未知の相関が既知量の代数式で表現されるが，このモデル化に際して計算過程，あるいは計算結果中に非現実的な値を生じないために Realizability（実現可能性）を満足すべきことが Schumann[1] により示されている．これによれば2階の応力テンソル $R_{\alpha\beta}$ は以下の3式を満足しなければならない．

$$R_{\alpha\alpha} \geqq 0 \tag{1a}$$

$$(R_{\alpha\beta})^2 \leqq R_{\alpha\alpha} R_{\beta\beta} \tag{1b}$$

$$det\ (R_{\alpha\beta}) \geqq 0 \tag{1c}$$

本論文を通して，添字に関し総和規則は適用されないものとする．(1a)式は各方向変動速度の2乗，すなわちその方向の変動による乱流エネルギーが正であることを示し，(1b)式は Schwarz の不等式に対応する．現実の流れ場で(1a)式と(1b)式が満足されなければならないことは当然であるが，不適当なモデルを用いた数値計算はしばしばこれに反し，計算の発散や非現実的解の原因となる．例えば(1a)式に反しないためには，**Fig. 1** より

$$\frac{DR_{\alpha\alpha}}{Dt} \geqq \quad \text{at} \quad R_{\alpha\alpha}=0 \tag{2}$$

となれば十分であることが分かる．$R_{\alpha\alpha}$ が0に漸近することは壁面の存在しない流れにおいてはあまり見られないが，壁面近傍においては壁の存在により壁面に垂直方向の乱れが抑制されるため，一般に $R_{22}=0$（2方向は壁面に垂直な方向）となる．従ってこの条件は壁面近傍の低レイノルズ数領域の解析において重要な制約となる．また自由乱流の場合でも，成層化や層流化などのように考察の対象となる場に乱流と層流が共存するかその可能性のある場合には重要となる．現在では Realizability はモデル式が満足すべき最も

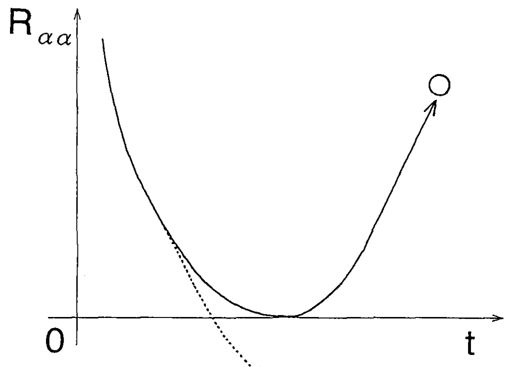

Fig. 1 Required behavior of $DR_{\alpha\alpha}/Dt$ as a function of time t when approaching the limit $R_{\alpha\alpha}=0$

*エネルギー変換工学専攻
**エネルギー変換工学専攻博士後期課程

重要な条件とみなされている.

(1a), (1b) 式は数学的にも容易に理解できるのに対して (1c) 式は少なくとも直感的ではない. Schumann の論文の付録には 3 次元空間のレイノルズ応力に対するその証明が与えられており, 普通はこれで十分である. 一方, n 次元空間のレイノルズ応力に対するこれの一般的証明は, 数学的に興味深い問題であるだけでなく, 今後様々の多次元確率過程において多変数間の相関をモデル化する必要が生じたときに問題となる可能性がある. ここでは Schumann が与えた 3 次元空間の, すなわち現実空間のレイノルズ応力の Realizability を n 次元空間のそれに拡張してその一般的な証明を行うこととする. (1a), (1b) 式は n 次元空間に於いても容易であるので証明は (1c) 式に対してのみ行う.

2. 準　　備

以下, 特に断らない限り, $\sum$ 記号は 1 から n までの和をとることを表するものとする.

〈補題 1〉 体 K 上の行列 $A=(a_{ij})^n_n \in K^n_n$ に対する行列式 $|A|=det(a_{ij})^n_n$ において, その a_{ij} の余因数を A_{ij} とするとき, $\forall \mathbf{x}=(x_i)^n_1 \in K^n_1$, $\forall \boldsymbol{y} \in (y_i)^n_1 \in K^n{}_1$, $\forall z \in K$ に対し

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z\,|A| - \sum_{i,j} x_i y_j A_{ij} \quad (3)$$

となる.

[証明]

$$(\text{左辺}) = z\,|A| + \sum_i x_i(-1)^{i+n+1}$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & & y_n \end{vmatrix}$$

$$= z\,|A| + \sum_i x_i(-1)^{i+n+1} \sum_j y_i$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,j} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,j} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,j} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= z\,|A| + \sum_i x_i(-1)^{i+n+1} \sum_j y_j(-1)^{n+j}\Delta_{ij}(A)$$

$$= z\,|A| - \sum_{i,j} x_i y_j A_{ij} = (\text{右辺})$$

ここで

$$\Delta_{ij}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

を用いた.　　Q. E. D.

〈補題 2〉

$$det(a_{ij}+t)^n_n = \begin{vmatrix} a_{11}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} = det(a_{ij})^n_n + t\sum_{i,j} A_{ij} \quad (4)$$

[証明] (3) 式中で, $x_1=x_2=\cdots x_n=-t$, $y_1=y_2=\cdots y_n=z=1$ とすれば,

$$((3)\text{式左辺}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} & -t \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} & -t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} & -t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots a_{1n}+t & -t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots a_{2n}+t & -t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots a_{nn}+t & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= det(a_{ij}+t)^n_n = ((4)\text{式左辺})$$

$$((3)\text{式右辺}) = |A| + t\sum_{i,j} A_{ij} = ((4)\text{式右辺})$$

Q. E. D.

〈補題３〉行列 $P=(p_{ij})^n_n$ を，ある直交行列 L を用いて，$\bar{P}=(\bar{p}_{ij})^n_n$ に変換するものとする．すなわち

$$\bar{P}={}^tLPL \tag{5}$$

$$P=L\bar{P}\,{}^tL \tag{6}$$

である．更に，行列 P および $\bar{P}$ の各々に対して，その第 (i, j) 余因数を P_{ij}, $\bar{P}_{ij}$ とし，$M=(P_{ij})$, $\bar{M}=(\bar{P}_{ij})^n_n$（余因数を要素とする行列）とすると，

$$\bar{M}={}^tLML,\ M=L\bar{M}{}^tL \tag{7}$$

が成立する．

［証明］周知のように

$$E=P\frac{{}^tM}{|P|},\ E=\bar{P}\frac{{}^t\bar{M}}{|P|} \tag{8}$$

であるから，

$$|P|E=P\,{}^tM \tag{9}$$

$$|P|E=\bar{P}\,{}^t\bar{M} \tag{10}$$

(9)式に右から ${}^tM^{-1}$ を掛けると

$$|P|\,{}^tM^{-1}=P \tag{11}$$

となる．(10)式に(5)式および(11)式を代入して

$$|P|E=|P|\,{}^tL{}^tM^{-1}L{}^t\bar{M}$$

上式の両辺を $|P|$ で割り，左から L を掛けると $LE=L$ および $L{}^tL=E$ より，

$$L={}^tM^{-1}L{}^t\bar{M}$$

さらに変形すると

$${}^tLML=\bar{M}$$

Q. E. D.

これらの相互関係を図示したのが **Fig. 2** である．

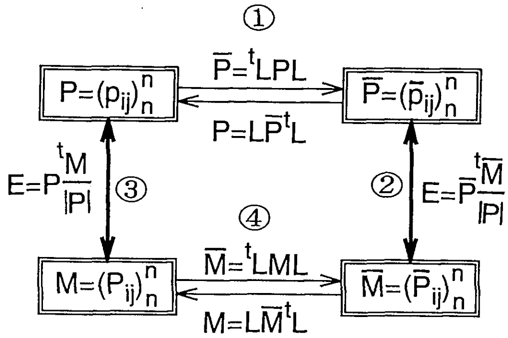

Fig. 2 Relations between tensors

3. 数学的帰納法を用いた本題の証明

n 次レイノルズ応力テンソル $(R_{ij})^n_n$ の第 (i, j) 成分 $R_{ij}=\langle u_i' u_j'\rangle$ は定義により，

$$R_{ij}=\lim_{N\to\infty} R_{ij}(N) \tag{12}$$

と表される．ただし，

$$R_{ij}(N)=\frac{\sum_{k=1}^{N} w_k u'_i(\mathrm{x}_k)u'_j(\mathrm{x}_k)}{\sum_{k=1}^{N} w_k}=\frac{\sum_{k=1}^{N} w_k u'_i(\mathrm{x}_k)u'_j(\mathrm{x}_k)}{W_N} \tag{13}$$

である．ここで $\mathbf{x}_k={}^t(\boldsymbol{y}_k, t_k)$ $(\boldsymbol{y}_k\in\boldsymbol{R}^n)$ は時空位相空間における第 k 番サンプルを取る座標であり，また w_k は第 k 番サンプルに対する正の重みである．(12)式より，

$$\det\{R_{ij}(N)\}\ \geqq 0 \qquad \forall N\in\boldsymbol{N} \tag{14}$$

であることを示せば(1c)の証明となる．そこで数学的帰納法を用いて(14)を証明する．

$N=1$ のとき，(13)より

$$R_{ij}(1)=\ \{u'_i(\mathrm{x}_1)u'_j(\mathrm{x}_1)\}^n_n$$

したがって

$$\det\{R_{ij}(1)\}=u'_1\,u'_2\cdots u'_n\begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & \cdot\ \cdot & u'_n\\ u'_1 & u'_2 & \cdot\ \cdot & u'_n\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ u'_1 & u'_2 & \cdot\ \cdot & u'_n\end{vmatrix}=0 \tag{15}$$

よって，(14)は $N=1$ に対して成立する．N に対して(14)が成り立つと仮定する．

$$\det\{R_{ij}(N)\}^n_n\geqq 0 \tag{16}$$

このとき，

$$\det\{R_{ij}(N+1)\}^n_n\geqq 0 \tag{17}$$

を示せばよい．

$$det\{R_{ij}(N+1)\} = det\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{w_k u'_i(\mathrm{x}_k) u'_j(\mathrm{x}_k) + w_{N+1} u'_i(\mathrm{x}_{N+1}) u'_j(\mathrm{x}_{N+1})}{W_{N+1}} \right)$$

$$= det\left\{ \frac{W_N}{W_{N+1}} R_{ij}(N) + v_i v_j \right\} = det(p_{ij} + v_i v_j)^n_n \tag{18}$$

ただし

$$(p_{ij})^n_n = \left\{ \frac{W_N}{W_{N+1}} R_{ij}(N) \right\}^n_n,\ v_i = \sqrt{\frac{w_{N+1}}{W_{N+1}}}\, u'_i(\mathrm{x}_{N+1}) \tag{19}$$

とした．$P=(p_{ij})^n_n$ とすれば(16)式より，

$$|P| = det(p_{ij})^n_n = \left\{ \frac{W_N}{W_{N+1}} \right\}^n det(R_{ij}(N))^n_n \geqq 0 \tag{20}$$

となる．

(18)式より，

$$det\ \{R_{ij}(N+1)\} = det(p_{ij} + v_i v_j)^n_n$$

$$= v_1^2\, v_2^2 \cdot \cdot\, v_n^2 \begin{vmatrix} \frac{p_{11}}{v_1 v_1}+1 & \cdots & \frac{p_{1n}}{v_1 v_n}+1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{p_{n1}}{v_n v_1}+1 & \cdots & \frac{p_{nn}}{v_n v_n}+1 \end{vmatrix}$$

$$= v_1^2\, v_2^2 \cdot \cdot\, v_n^2\, det(b_{ij}+1) \tag{21}$$

ただし，

$$b_{ij} = (p_{ij}/(v_i v_j))$$

とした．ここで

$$B = (b_{ij})^n_n = (p_{ij}/(v_i v_j))^n_n$$

と置くと補題2より，

$$det\{R_{ij}(N+1)\} = v_1^2 v_2^2 \cdot \cdot\, v_n^2\ \left\{det(b_{ij})^n_n + \sum_{i,j} B_{ij}\right\}$$

$$= v_1^2\, v_2^2 \cdot \cdot \cdot\, v_n^2$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{p_{11}}{v_1 v_1}+1 & \frac{p_{12}}{v_1 v_2}+1 & \cdots & \frac{p_{1j}}{v_1 v_j}+1 & \cdots & \frac{p_{1n}}{v_1 v_n}+1 \\ \frac{p_{21}}{v_2 v_1}+1 & \frac{p_{22}}{v_2 v_2}+1 & \cdots & \frac{p_{2j}}{v_2 v_j}+1 & \cdots & \frac{p_{2n}}{v_2 v_n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{p_{i1}}{v_i v_1}+1 & \frac{p_{i2}}{v_i v_2}+1 & \cdots & \frac{p_{ij}}{v_i v_j}+1 & \cdots & \frac{p_{in}}{v_i v_n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{p_{n1}}{v_n v_1}+1 & \frac{p_{n2}}{v_n v_2}+1 & \cdots & \frac{p_{nj}}{v_n v_j}+1 & \cdots & \frac{p_{nn}}{v_n v_n}+1 \end{vmatrix}$$

$$+ v_1^2\, v_2^2 \cdot \cdot \cdot\, v_n^2$$

$$\times \sum_{i-j} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{p_{11}}{v_1 v_1}+1 \cdots & \frac{p_{1\,j-1}}{v_1 v_{j-1}}+1 & 0 & \frac{p_{1\,j+1}}{v_1 v_{j+1}}+1 \cdots & \frac{p_{1n}}{v_1 v_n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{p_{i1}}{v_i v_1}+1 \cdots & \frac{p_{i\,j-1}}{v_i v_{j-1}}+1 & 1 & \frac{p_{i\,j+1}}{v_i v_{j+1}}+1 \cdots & \frac{p_{in}}{v_i v_n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{p_{nn}}{v_n v_n}+1 \cdots & \frac{p_{n\,j-1}}{v_n v_{j-1}}+1 & 0 & \frac{p_{n\,j+1}}{v_n v_{j+1}}+1 \cdots & \frac{p_{nn}}{v_n v_n}+1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots p_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots p_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i,j} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots p_{1\,j-1} & 0 & p_{1\,j+1} & \cdots p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{i\,1} & \cdots p_{i\,j-1} & v_i v_j & p_{i\,j+1} & \cdots p_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots p_{n\,j-1} & 0 & p_{n\,j+1} & \cdots p_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= det(p_{ij}) + v_i\ v_j\ P_{ij}$$

$$= det(p_{ij}) + {}^t\mathbf{v}M\mathbf{v} = |P| + {}^t\mathbf{v}M\mathbf{v} \tag{22}$$

ここで $M=(P_{ij})^n_n$ は，行列式 $|P|$ における p_{ij} の余因数 P_{ij} を第 (i, j) 成分に持つ行列であり，また $\mathbf{v}=(v_i)^n_n \in K^n_1$ である．$P=(p_{ij})^n_n$ は対称行列なので M も対称行列となる．

(22)式において(20)式より，$|P|$ は正であるので，

$${}^t\mathbf{v}M\mathbf{v} \geqq 0 \tag{23}$$

を示せば(17)式が言える．ここで M が対称行列であることに注意する．実対称行列 $M=(P_{ij})^n_n$ に対して，

$$M_k=\begin{bmatrix} P_{11} & \cdot\ \cdot & P_{1k} \\ \cdot & & \cdot \\ P_{k1} & \cdot\ \cdot & P_{kk} \end{bmatrix}\quad (k=1,\ \cdot\ \cdot,\ n)$$

となる小行列式 M_k を定義すると，周知のように ${}^t\mathbf{v}M\mathbf{v}\geqq 0$ であるためには $|M_k|\geqq 0$ $(k=1, 2, \cdot\ \cdot, n)$ が必要かつ十分である．${}^t\mathbf{v}M\mathbf{v}$ は2次形式なので，M を対角化する適当な直交行列 L を用いて座標系を回転させても，その値は不変であるから，$\mathbf{v}=L\bar{\mathbf{v}}$ として，

$${}^t\mathbf{v}M\mathbf{v}={}^t(L\bar{\mathbf{v}})M(L\bar{\mathbf{v}})=\sum_i \bar{v}_i^2 M_{ii}=\sum_i \lambda_i \bar{v}_i^2$$

ここで $\lambda_i=\overline{M}_{ii}$ は行列 M の第i固有値である．したがってここで問題としている2次形式が任意の $\mathbf{v}$ に対して正であるためには，

$$\lambda_i=\overline{M}_{ii}\geqq 0$$

となる．したがって ${}^t\mathbf{v}M\mathbf{v}\geqq 0$ であるためには M の全ての固有値が正であることが必要十分である．そこで(23)式を証明するために(23)式中の M の固有値が正または0であることを示す．

Fig. 2 は任意の行列について成り立つが，$P=(p_{ij})_n^n$ として，(19)式の

$$P=(p_{ij})_n^n=\left\{\frac{W_N}{W_{N+1}}R_{ij}(N)\right\}_n^n$$

を選択し，**Fig. 2** の変換の直交行列 L を行列 P を対角化するものに特定する．すなわち **Fig. 2** の道筋①の結果

$$\overline{P}={}^tLPL=\begin{vmatrix} \bar{p}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{p}_{nn} \end{vmatrix}=\frac{W_N}{W_{N+1}}\begin{vmatrix} \overline{R}_{11} & 0 \\ 0 & \overline{R}_{nn} \end{vmatrix} \tag{24}$$

$\bar{p}_{11}, \bar{p}_{22}\cdots, \bar{p}_{nn}$ は P および $\overline{P}$ に共通の固有値となり，$\overline{R}_{11}, \overline{R}_{22}, \cdots, \overline{R}_{nn}$ も同様である．このように対角化した $\overline{P}$ から，**Fig. 2** の道筋②を通り，その余因数行列 $\overline{M}=(\overline{P}_{ij})_n^n$ を作る．

a）i≒j のとき

$(\overline{M})_{ij}=\overline{P}_{ij}=$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & j & & j & \end{array} \\ \begin{vmatrix} \bar{p}_{11} & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \bar{p}_{j-1j-1} & 0 & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & & 0 & \bar{p}_{j+1\,j+1} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & \bar{p}_{ii} & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & \bar{p}_{nn} \end{vmatrix} \end{array}=0 \tag{25}$$

b）i=j のとき

$(\overline{M}_{ii})=\overline{P}_{ii}=$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \bar{p}_{i-1\,i-1} & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \bar{p}_{i+1\,i+1} & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & \bar{p}_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$=\bar{p}_{11}\bar{p}_{22}\cdot\ \cdot\bar{p}_{i-1\,i-1}\bar{p}_{i+1\,i+1}\cdot\ \cdot\bar{p}_{nn} \tag{26}$$

よって

$$\overline{M}=(\overline{P}_{ij})_n^n=\begin{vmatrix} \overline{P}_{11} & 0 \\ 0 & \overline{P}_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\overline{P}_{ii}=\bar{p}_{11}\bar{p}_{22}\cdot\ \cdot\bar{p}_{i-1\,i-1}\bar{p}_{i+1\,i+1}\cdot\ \cdot\bar{p}_{nn} \tag{27}$$

すなわち $\overline{M}$ も対角化されている．

一方 **Fig. 2** の道筋③により，この場合(22)式中の $M=(P_{ij})_n^n$ が得られる．したがって道筋④を通って，

$$\overline{M}={}^tLML=\begin{vmatrix} \overline{P}_{11} & 0 \\ 0 & \overline{P}_{nn} \end{vmatrix} \tag{28}$$

前述のとおり，2次形式 ${}^t\mathbf{v}M\mathbf{v}$ の正負の判断は，任意の直交行列で変換した $\overline{M}(={}^tLML)$ の，n 個の固有値の正負の判断で置き換えることができる．そこで任意の直交行列 L として上述の L を考えれば，変換された結果は(28)式であり，その固有値 $\overline{P}_{11}$,,, $\overline{P}_{nn}$ は(26)式より正または0である．したがって，2次形式 ${}^t\mathbf{v}M\mathbf{v}$ は $\mathbf{v}$ に関わらず，

$${}^t\mathbf{v}M\mathbf{v}\geqq 0$$

である．したがって

$$det\{R_{ij}(N+1)\} \geqq 0$$

が示されたので，(14)式は (N+1) に対しても成立する．したがって数学的帰納法より

$$det\{R_{ij}(N)\} \geqq 0 \qquad \forall N \in \mathbf{N} \tag{14}$$

以上から

$$det(R_{ij}) \geqq 0 \tag{1c}$$

である．

記号説明

アルファベット

A　：任意行列

A_{ij}　：A の余因数

a_{ij}　：A の第（i，j）成分

E　：単位行列

L　：任意直交行列

M　：P の余因数行列（$=(P_{ij})^n_n$）

P　：任意行列または(19)式

P_{ij}　：P の余因数

p_{ij}　：P の第（i，j）成分

$R_{\alpha\beta}$：レイノルズ応力テンソル（$=\langle u'_\alpha u'_\beta \rangle$）

t　：時間

u_α　：α 方向変動速度成分

v_i　：任意ベクトルまたは(19)式

W_N：$\sum_{k=1}^{N} W_k$

w_k　：(13)式

x_i　：任意ベクトル

x_k　：時空位相空間における第 k 番サンプルをとる座標

y_i　：任意ベクトル

ギリシャ文字

λ　：固有値

その他

t　：転置

'　：変動成分

〈 〉：アンサンブル平均

$\overline{}$　：行列が L によって変換されたことを示す

参 考 文 献

1) U. Schumann, Phys. Fluids, **20**, 721 (1977).