九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

円管の開口端における音波の放射と反射

安信，強
北九州工業高等専門学校制御情報工学科

樫村，秀男
北九州工業高等専門学校制御情報工学科

青木，俊之
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

松尾，一泰
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

https://doi.org/10.15017/17280

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 14 (3), pp.337-343, 1992-12-01. 九州大学大学院総合理工学研究科
バージョン：
権利関係：

九州大学大学院総合理工学研究科報告
第14巻　第3号 337-343頁 平成4年12月

Engineering Sciences Reports, Kyushu University
(KYUSHU DAIGAKU SOGORIKOGAKU KENKYUKA HOKOKU)
Vol. 14, No. 3 pp. 337 - 343 DEC. 1992

円管の開口端における音波の放射と反射

安信　強*・樫村秀男*
青木俊之**・松尾一泰**

(平成4年8月31日　受理)

Radiation and Reflection of Sound Wave from an Open End of a Circular Pipe

Tsuyoshi YASUNOBU, Hideo KASHIMURA
Toshiyuki AOKI and Kazuyasu MATSUO

Theoretical analysis is carried out on the radiation and reflection of the sound wave from an open end of a circular pipe. This problem is very important to investigate the characteristics of the impulsive noise, which is generated by the emission of a compression wave from an open end of a tube. It is assumed that the diameter of a circular tube is small compared to the wave length. The reflection coefficient R, length of open end correction l_e, coefficient of directivity Q (θ) and power gain function g (θ) as function of ka are shown in cases of infinite flanged pipe and unflaged pipe at the end.

1. 緒　言

最近，波動に関連した騒音発生の研究が行われるようになった．例えば，新幹線が高速でトンネルに突入した際に出口より発生する衝撃性の騒音[1]や，自動車用エンジンからの高圧排気ガスによる排気騒音[2]などがあげられる．これらの現象は，管内を伝播する衝撃波や圧縮波に起因している．

音響工学によれば，管内を微小振幅の定常圧力波が伝播した場合，その開口端では圧力波の管内への反射と管外への放射が起こり，管の長さが見かけ上長くなる，開口端補正が生じる．また，管内を伝播する圧力波が開口端から放出された場合，放射波は伝播する方向によってその強さが異なる指向性を有する．

管内を衝撃波や圧縮波などの振幅が大きな非定常圧力波などが伝播する場合においても，局所的に音響工学を適用して解析することが可能である[3]．しかし，上述のような圧縮波がトンネル出口より放出された際に生じる衝撃性騒音を考えるときには，解析への適用限界や実験との比較など，残された問題点が多い．この点に関して，基礎となる音響工学の解析を十分に検討する必要がある．

本研究では，円形直管内を定常波の音波が伝播する場合において，開口端での反射，開口端補正，放射波の指向性を，音響工学に基づいて考察することを目的とする．

2. 音響工学による解析

2.1 基礎方程式とその解法

音の伝播を考察する上で重要となる方程式が式(1)で示される波動方程式であり，これはダランベールの波動方程式とよばれる．

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi \tag{1}$$

式(1)において，c は音速，ϕ は速度ポテンシャル，t は時間である．

式(1)より ϕ が求まれば，音場における音圧 p と粒子速度 V が得られる．すなわち，ρ を密度とすれば，

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{2}$$

$$V = -\,grad\,\phi \tag{3}$$

*北九州工業高等専門学校制御情報工学科
**エネルギー変換工学専攻

である．

本研究においては前述のごとく，トンネル内を伝播する圧縮波がトンネル出口より放出されるときに発生する，パルス状の圧力波の解析を目的としている．このため，モデルとしては，管の直径に対してその長さが長い，円形断面の直管を考える．このような管内を音波が伝播する場合，その音波は平面波と見なされる[4]．このようなモデルの解析は，空気柱の振動として行われており，棒の中を縦波が伝播する場合の解析と同様な方法で取り扱うことができる．

一般に音響の問題は，その波長によって現象に相異を生じることが多く，波長は重要なパラメータとなる．したがって，音波の波形を表現する場合，波長を明確にするために，一般に三角関数が用いられる．解析を行うに際して波の運動を単弦振動とし，この波には始めも終わりもなく無限につながっていると仮定して解析されることが多い．このような音波を単弦振動音波[5]という．

本研究では，円形断面の直管内を単弦振動音波が伝播する場合を想定し解析を行う．この場合，式(1)の波動方程式は，式(4)のように書き表される．

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \tag{4}$$

ここで，k は波数で，波長を λ とするとき，$k = 2\pi/\lambda$ である．

式(4)の解析における難点は，開口端の取り扱いにある．開口端から音波の一部が放射され，球面波に近い形で空間を伝播する[5]．開口端での放射と反射を求めるためには，開口端付近の音場を正確に記述して計算する必要がある．Nomura ら[6]はフランジのある場合，Levine ら[7]はフランジのない場合の解析を行っている．本研究では，これらの解析結果を用いて，開口端での反射と放射および放射音波の特徴，さらに，フランジがこれらに及ぼす影響について考察する．

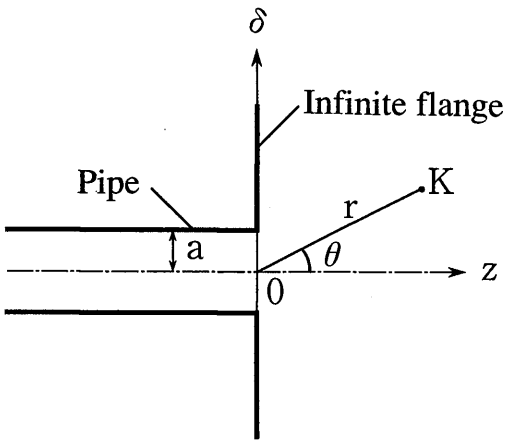


Fig. 1　Co-ordinate system and symbols.

Fig. 1 に解析に用いた座標系を示す．この図は無限フランジのある場合であるが，フランジのない場合も同様である．座標系は円筒座標を用いている．開口端の中心 O を原点とし，管の中心軸上における原点からの距離を z，管の中心軸に垂直な面の中心軸からの距離を δ，原点と観測点 K との距離を r，原点を中心として，原点と観測点を結ぶ直線と管の中心軸のなす角度を θ とする．

無限フランジがある場合には，式(4)の近似解として式(5・a)から式(5・c)が得られる[6]．

$$\phi_0 = \frac{V_0}{k} e^{-ikz} \tag{5・a}$$

$$\phi_1 = \frac{V_0}{k}\left\{Re^{ikz} + \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_0(\beta_s k) e^{\sqrt{\beta_s^2 - k^2a^2}\,k}\right. \tag{5・b}$$

$$\phi_2 = \frac{V_0}{k}\sum_{n=0}^{\infty} A_n S_n(k, z) \qquad z>0 \tag{5・c}$$

ただし，a：円管の半径　J：ベッセル関数
R：反射率　V_0：最大粒子速度
A_n：係数　a_s：係数

$$J_0(\beta_s) = -J_1(\beta_s) = 0$$

$$S_n(k, z) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi}\,J_0(k\xi)\,J_{2n+1}(\xi)\,e^{-\sqrt{\xi^2-k^2a^2}\,k}}{\sqrt{\xi^2-k^2a^2}}\,d\xi \qquad (z>0)$$

ここで，ϕ_0 は入射波，ϕ_1 は放射波，ϕ_2 は反射波の速度ポテンシャルである．

無限フランジがない場合には，式(4)の近似解は，以下のようになる[7]．

$$\phi_0 + \phi_2 = Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \qquad z \to -\infty \tag{6・a}$$

$$\phi_1 = f(\theta)\,e^{ikr}/r \qquad r \to \infty \tag{6・b}$$

ここで，A，B は係数である．

式(6・a)は管内の速度ポテンシャルを表しており，右辺第一項は入射波を，第二項は反射波を意味する．また，式(6・b)は管外の速度ポテンシャルを表しており，$f(\theta)$ は角度 θ によるポテンシャルの変化を意味している．

2.2 反射率R

管内を伝播する音波が開口端に達すると，音波の反射と放射が起こり，その度合いは開口端に入射する音波の波長により変化する．これは，開口端で音波の完全反射が起こらないために，管内のエネルギーが管外に放出されることにより生じる．開口端で完全反射が生じた場合には，開口端を含む平面上では音圧の変化が起こらず，変位が自由に生じ得る状態にある．この仮定は精度の高い近似性を有するとされるが，それでも実験との相違や物理的矛盾を引き起こす要因となっていた．その後，実際には開口端での圧力変化が生じており，このために管内のエネルギーが管外へ放射されることが突きとめられている[5]．

入射波の音圧（もしくは速度ポテンシャル）と反射波の音圧（もしくは速度ポテンシャル）との比は反射率 (reflection coefficient) とされ，記号 R で表される．管外へ放射される割合，すなわち放射率は $(1-R)$ である．

無限フランジがある場合には，式(5・a)と(5・c)より，反射率 R は次式で求めることができる．

$$R=\phi_2/\phi_0 \tag{7}$$

無限フランジのない場合も同様な方法で，式(6・a)より反射率 R は次式で定義される．

$$R=B/A \tag{8}$$

なお，R は複素数であり，この複素数の絶対値を $|R|$ とする．

Fig. 2 に式(7)と式(8)の計算結果を実線と破線でそれぞれ示している．図は $|R|$ と ka の関係であり，横軸 ka は波数パラメータとよばれるもので，D を管の直径とすれば，ka は $\pi D/\lambda$ に等しい．図より，$ka=0$，すなわち入射波の波長 λ が無限大の場合には $|R|=1$ となり，完全反射の状態と見なせる．この場合には管外への放射は生じない．ka の増加にともない，反射率 $|R|$ は低下し，フランジがある場合，$ka\fallingdotseq1.1$ で，ない場合は $ka\fallingdotseq1.5$ で $|R|=0.5$ 程度となり，反射波と放射波の音圧はほぼ等しくなる．また，$ka=3$ のときには両者の $|R|$ は0.1～0.15程度となり，入射波の大部分が管外へ放射されることがわかる．これらのことを管の直径と入射波の波長で見るならば，フランジがある場合，波長が管直径の約3倍で，ない場合には，波長が管直径の約2倍でそれぞれ $|R|$ は0.5程度となり，波長と管直径がほぼ等しい場合に $|R|$ は0.1～0.15程度となる．

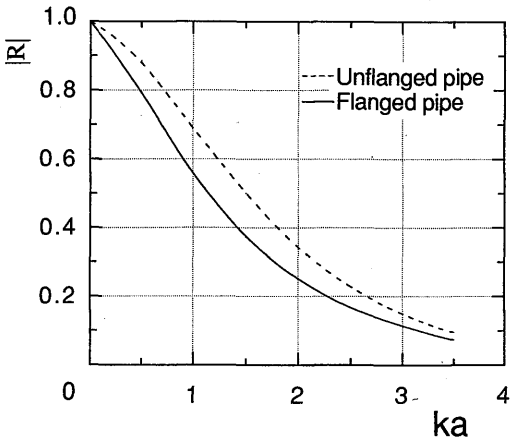


Fig. 2 Reflection coefficient as function of ka.

次に，無限フランジの影響については，フランジのない場合の方が反射率が大きいことがわかる．これは，同じ ka に対してフランジのある方が放射波の音圧が高く，放射エネルギー量の多いことを示している．

2.3 開口端補正 ℓ_e

2.2の結果より開口端では完全反射が生じないため，開口端より下流側に完全反射が生じるとする仮想開口端を考える．開口端から仮想開口端までの距離を ℓ_e とするとき，ℓ_e を開口端補正量という．開口端補正 (open end correction) を行って，完全反射が生じる仮想開口端を求めると，管内の音場を正確に表現できる．つまり，開口端における反射波は，入射波と等しい振幅を有し，補正量に比例した位相の相違を生じている波として考えることができる．したがって，開口端補正量 ℓ_e と反射率 R の間には式(9)の関係が成り立つ[7]．

$$R=|R|e^{-2ik\ell_e} \tag{9}$$

式(7)および式(8)を式(9)に代入することにより ℓ_e を計算でき，その結果を **Fig. 3** に示す．縦軸は開口

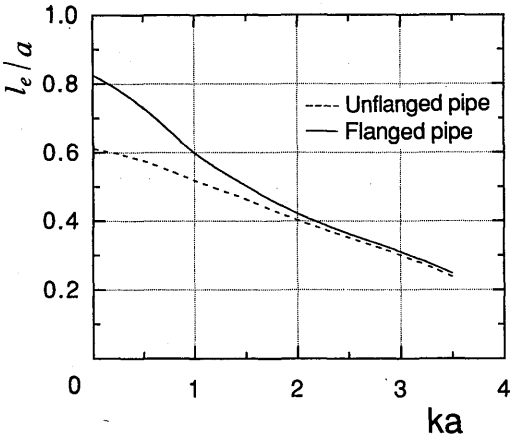
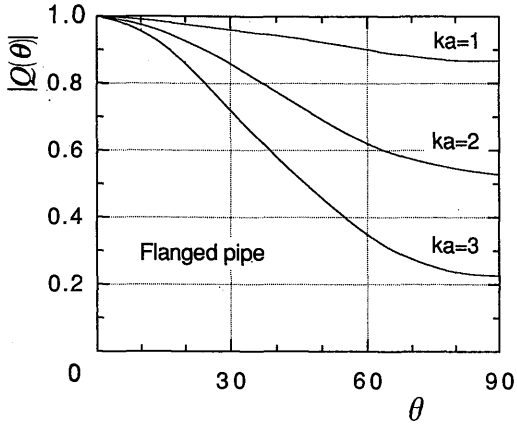
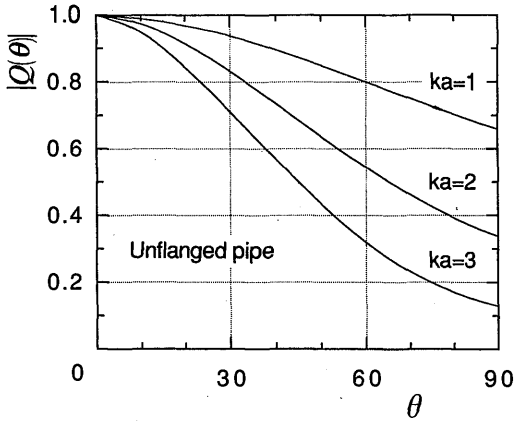


Fig. 3 Length of open end correction as function of *ka*.



(a) Flanged pipe



(b) Unflanged pipe

Fig. 4 Coefficient of directivities as function of θ.

端補正量 ℓ_e, 横軸は *ka* である．実線は無限フランジのある場合，破線はない場合である．$ka=0$，すなわち波長 λ が無限大の場合には補正量はフランジのある場合で $\ell_e=0.8217$，ない場合で $\ell_e=0.6133$ である．図より，補正量は *ka* の増加にともない，減少することがわかる．フランジの影響については，$ka=2$ 以下の領域ではフランジのある方が補正量が多く，これ以上ではほとんど相違を生じない．

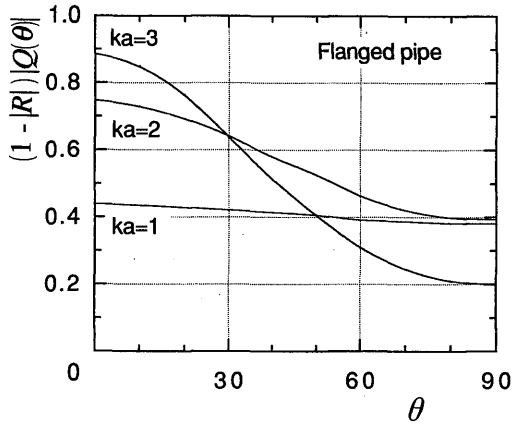
2.4 指向性係数 Q（θ）

次に，放射波の放射空間における物理的特徴について考察する．

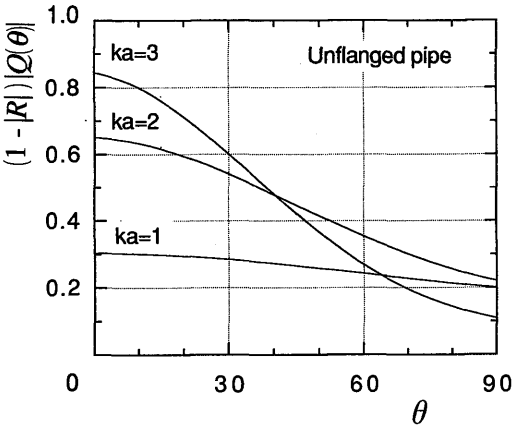
開口端より放射された放射波は，原点からの距離 r が等しい位置においても，中心軸からの角度 θ によって音圧が異なり，指向性を有している．音響理論によれば，音源より十分遠方において音源より任意の方向へ放射される音圧と，音源から一定の基準方向における音圧との比を指向性係数(coefficient of directivity)[8] $Q(\theta)$ とし，これによって指向特性を表している．なお，$Q(\theta)$ は複素数であり，その絶対値を $|Q(\theta)|$ と表す．一般に，本研究のようなモデルでは管の中心軸を基準とする．指向性係数はその定義から，全ての方向で1の場合には音圧分布は同心円状となる．指向性係数は，放射空間の速度ポテンシャルが求まれば，計算することができる．

Fig. 4 (a) (b) に指向性係数を示す．縦軸は指向性係数を，横軸は中心軸からの角度を表し，$ka=1, 2, 3$ の場合について示した．図**(a)** は無限フランジのある場合，図**(b)** はない場合である．管の中心軸を基準としたので，$\theta=0°$のときはいずれも $|Q(\theta)|=1$ である．図より θ の増加にともない，$|Q(\theta)|$ は減少する．また *ka* に対しては，*ka* が上昇するほどその減少割合は大きくなることがわかる．このことは，*ka* の増加により，管の中心軸方向に対する放射波の指向性が強まることを意味する．つまり，音圧分布は管の中心軸方向に片寄った傾向を示す．

次に，フランジの影響については，フランジのある場合の方が $|Q(\theta)|$ の値が高いが，*ka* の増加により，ない場合の $|Q(\theta)|$ との差は減少することがわかる．一方，角度 θ に対しては，フランジのない場



(a) Flanged pipe



(b) Unflanged pipe

Fig. 5 Ratio of sound pressure of incident and radiated waves as function of θ.

合はθの増加により｜$Q(\theta)$｜はほぼ単調に減少する．これに対し，フランジのある場合は$\theta=60\sim70°$あたりから減少傾向がゆるやかになり，フランジのない場合の｜$Q(\theta)$｜との差は増加する．これはフランジの影響によるものと考えられる．以上のことから，フランジの存在により指向性係数は高くなり，特にフランジ付近ではその差は大きくなることが示される．

ところで，指向性係数は基準軸における音圧と任意の方向における音圧との比であり，基準軸上では1となる．ところが，入射波である圧縮波と，放射波であるパルス状の圧力波との関係を求めるような場合には，入射波を基準としてka，すなわち波長λをパラメータとした，管の中心軸方向に対する放射波の指向特性を求めておくことが便利である．入射波は管の開口端で反射と放射を起こし，放射波は指向性を有する．この過程を統一的に評価するには，放射率$(1-|R|)$と指向性係数｜$Q(\theta)$｜の積を求めればよい．$(1-|R|)|Q(\theta)|$は入射波の音圧と放射波の音圧との比を表しており，以下ではこれを音圧比とよぶことにする．

Fig. 5 (a) (b) にその計算結果を示す．縦軸は音圧比$(1-|R|)|Q(\theta)|$，横軸は角度θを表す．パラメータはkaである．図**(a)** は無限フランジのある場合，図**(b)** はない場合を示す．図より，kaの増加にともない$\theta=0\sim30°$の領域では音圧比は上昇することがわかる．これは，開口端での反射率が低下し放射率が上昇するためである．角度θについてみれば，θの増加により音圧比は低下する．これは，指向性がkaの増加により中心軸方向に強くなるためである．入射波に対する放射波の音圧比のθに対する減少割合はkaが大きくなるほど増加する．

次に，フランジの影響については，フランジのある場合の方が音圧比が高いが，kaの増加によってその差は減少する．これは，指向性係数の場合と同様である．また，フランジのある場合，角度θが60～70°あたりから減少傾向がゆるやかになり，フランジのない場合の音圧比との差が増加することも同様である．

Fig. 6 は管の中心軸上において，音圧比$(1-|R|)|Q(\theta)|$とkaの関係を示すものである．縦軸は$(1-|R|)|Q(0)|$を，横軸はkaを表している．

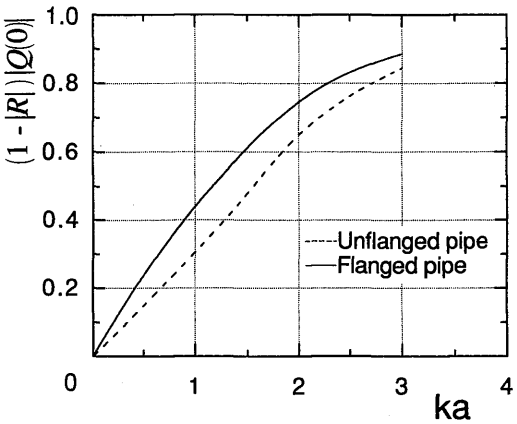


Fig. 6 Ratio of sound pressure of incident and radiated waves on axis as function of ka.

図より，ka の増加による音圧比の変化がよくわかる．$ka=1$ の場合には0.3～0.4程度であり，放射波の音圧割合はそれほど高くはない．しかし，$ka=3$，すなわち管の直径と波長が同程度の場合には0.9程度であり，入射波の大部分が管外へ放射されることがわかる．

2.5 出力利得関数 g（θ）

指向性係数は基準方向と任意方向の音圧の比により，指向特性を表すものである．これに対して，出力利得関数 (power gain function) $g(\theta)$ の定義は，ある方向に放射されたエネルギーと，全放射エネルギーが点音源より等方的に放射されると仮定した場合の放射エネルギーとの比を表す．

無限フランジがある場合，$g(\theta)$ は式(10)で示される[6]．

$$g(\theta)=\frac{8}{\pi(1-|R|^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty}\overline{A}_n A_{n'} j_{2n}(\gamma\sin\theta)\, j_{2n'}(\gamma\sin\theta) \qquad (10)$$

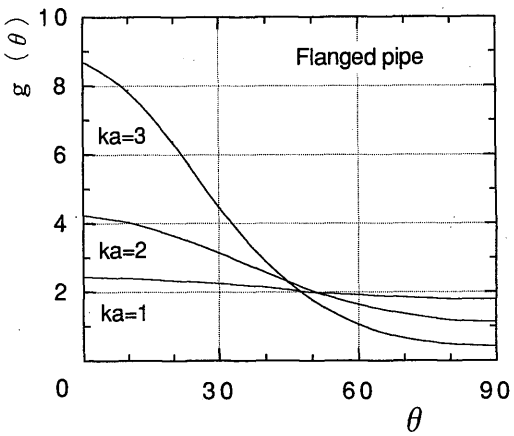
無限フランジがない場合には[7]，

$$g(\theta)=\frac{(ka)^2}{1-|R|^2}\,\frac{|f(\theta)|^2}{|f(0)|^2} \qquad (11)$$

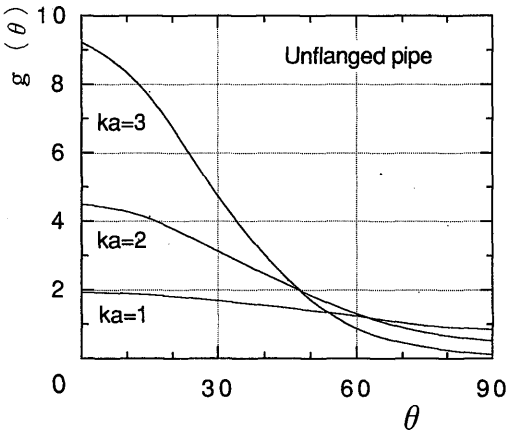
Fig. 7 (a) (b) に，計算結果を示す．縦軸は $g(\theta)$ を，横軸は角度 θ を表す．図**(a)** は無限フランジのある場合，図**(b)** はない場合である．ka の増加により，中心軸方向の放射量が増大し，$g(\theta)$ の θ による変化量が大きくなることは，音圧に基づいた指向性係数の場合と同じ傾向である．また，ka の増加によって逆に放射量が減少する場合のあることも同様である．しかし，フランジの影響に関しては異なった結果を示している．すなわち，$\theta=0$～45° ではフランジのない方が放射量が多いが，$\theta=45$～90° では逆にある場合の方が多い．また，音圧に基づいた場合には，$\theta=70°$ あたりからフランジの有無による音圧比の差が増加する現象が生じていたが，この場合にはそのような現象は発生しないことも特徴的である．

3. 結　　論

円形直管内を定常波の音波が伝播する場合において，開口端での反射，開口端補正，放射波の指向性を，音響理論に基づいて考察を行った．得られた結果を要約すると，以下の通りである．



(a) Flanged pipe



(b) Unflanged pipe

Fig. 7 Power gain function as function of θ.

(1) 開口端における反射率は ka の増加にともない減少する．フランジの影響については，フランジのないほうが反射率が高い．すなわち，同一の波長でもフランジのないほうが管外へ放射されるエネルギー量が多い．

(2) ka の増加にともない開口端補正量は減少する．フランジの影響については，$ka=2$ 以下ではフランジのある方が補正量が多いが，これ以上ではフランジの影響はほとんどない．

(3) ka の増加にともない中心軸方向の指向性が強くなる．フランジの指向性に及ぼす影響については，フランジのある場合の方が指向性係数は高いが，ka

の増加によってその差は減少する．また，フランジ付近では指向性係数の差は大きくなる．

(4) 入射波の音圧に対する放射波の音圧分布については，ka の増加にともない中心軸方向の音圧が増加するが，中心軸からの角度の増加にしたがい，指向性係数の減少により ka に対する変化量も減少する．フランジの影響については，指向性係数の場合とほぼ同様である．

(5) 角度 θ に対する出力利得関数の特性は，指向性係数の場合と同様な結果が得られたが，ka に対しては異なった結果を示した．

参考文献

1) 小沢，鉄道技術研究報告，No. 1121，(1979)．
2) 関根・ほか4名，機論，54-498，B，(1988)，527.
3) リーブマン・ロシュコ，気体力学，(1960)，84，吉岡書店．
4) 五十嵐，音響と振動，(1990)，37，共立出版．
5) 伊藤，音響工学原論（上巻），(1967)，194，171，コロナ社．
6) Y. Nomura, et al., J. of Phys. Soc. Jap., Vol. **15**, (1960), 510.
7) H. Levine and J. Schwinger., Phys. Rev., Vol. **73**, (1948), 383.
8) 伊藤，音響工学原論（下巻），(1967)，468，コロナ社．