

レイノルズ応力モデルによる同心二重円管内加熱層 硫化現象の解析

吉田, 啓之
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

清水, 昭比古
九州大学大学院総合理工学研究科エネルギー変換工学専攻

長谷川, 修
久留米高専

<https://doi.org/10.15017/17230>

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 13 (2), pp.189-195, 1991-09-01. 九州大学大学院総合理工学研究科
バージョン :
権利関係 :

レイノルズ応力モデルによる同心二重円管内 加熱層流化現象の解析

吉田 啓之*・清水 昭比古**・長谷川 修***
(平成3年5月31日 受理)

Numerical analysis of laminarization phenomena in a concentric annular tube by means of Reynolds stress model

Hiroyuki Yoshida, Akihiko Shimizu and Syu Hasegawa

In this paper, numerical analysis of laminarization phenomena of strongly heated gas flows within concentric annular tube was performed and an improvement of the Reynolds stress turbulence model is proposed. In the first part, the Reynolds stress model proposed by Launder and Shima was tested in its original form. Numerical results show that the main features of laminarizing flows such as a change in time-averaged velocity profiles and the reduction in turbulent kinetic energy can be reproduced to a certain extent. However, it was also found that if the heating rate is relatively low, the prediction efficiency of local Nusselt numbers are considerably poorer than expected. Therefore, it was anticipated that there remains much for the improvement of the original model particularly for the low Reynolds number region. Following these results, an attempt was made to improve the model by reforming the shape of the empirical function that appears there for taking into account the effects of the wall. The modified model was applied to the case of relatively low heating rate and the considerable betterment was achieved.

1. 緒 言

これまでに著者らは、管路内のガスの流れが強く加熱される場合に、熱物性値の急激な変化とガスの膨張による加速の結果流れが層流に遷移する現象に着目し、実験と数値解析の両面からその解明を試みてきた。

乱流モデルとして $k-\epsilon$ モデルを用いた解析において、層流化時の熱伝達率等の変化は再現されたが、層流化発生の限界付近での予測が十分ではなかった。その原因は $k-\epsilon$ モデルは乱れの等方性を仮定したモデルであり、流体の強い加速による乱れの非等方性の増加を再現出来ないためと思われる。

この点を改良する方法としてレイノルズ応力モデルの使用が考えられる。レイノルズ応力モデルは、レイノルズ応力輸送方程式を直接モデル化するため乱れの非等方性を再現することが可能であり、 $k-\epsilon$ モデルによる結果を改善する可能性がある。そこで本研究で

は乱流モデルにレイノルズ応力モデルを用いて同心二重円管内加熱層流化現象の解析を行なう。レイノルズ応力モデルは種々の研究者によって開発が行なわれているが、現在のところそのモデル化は十分とは言いがたい。本研究では、レイノルズ応力モデルの予測精度にも注目し、モデルの修正を行なった。

2. レイノルズ応力モデル

一般的なレイノルズ応力輸送方程式のモデル化と、本解析で用いた Launder-Shima¹⁾ のモデルについての簡単な説明を行なう。

以下にレイノルズ応力の厳密な輸送方程式を示す。

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \\ & \text{生成} \\ & + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ & \text{再分配} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} - \overline{u_i u_j u_k} - \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right\} \quad (1) \\ & \text{粘性拡散 乱流拡散 圧力拡散} \end{aligned}$$

*エネルギー変換工学専攻博士課程

**エネルギー変換工学

***久留米高専

$$- 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

消 散

上式中でモデル化が必要な項は消散，再分配，乱流拡散，圧力拡散の各項である．この内圧力拡散項は一般に無視する．レイノルズ応力モデルにおいて特に問題となるのは乱流拡散項と再分配項のモデル化である．

圧力変動のポアソン方程式にグリーンの定理を適用すると，再分配項は変動速度の寄与分 $\Phi_{ij,1}$ と，平均速度の寄与分 $\Phi_{ij,2}$ に分解される．壁近傍での再分配の抑制を，2つの部分の双方に壁の影響による修正分を付加することで表現する．そこで再分配項は， $\Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij,1w} + \Phi_{ij,2w}$ と表わされる．

$\Phi_{ij,1}$ は return-to-isotropy と呼ばれるレイノルズ応力自身の等方化を促進する項であり，Rotta²⁾ によりモデル化されている． $\Phi_{ij,2}$ はレイノルズ応力の生成の等方化を促進する働きを持ち rapid 項と呼ばれる．この項に対しては Gibson-Lauder³⁾ のモデル化が一般に採用されている．Shir⁴⁾，Gibson-Lauder により各々の壁修正分のモデル化が成されている．乱流拡散項に対しては Daly-Hallow⁵⁾ のモデル化が，その簡便さから一般に用いられる．

加熱層流化現象では壁近傍で物性値の大きな変化が起こるため，壁関数法などの使用は不適當である．壁近傍では乱流コアと異なり乱れの非等方性が大きく，この領域まで予測するためにはモデル中にその影響を考慮する必要がある．上述のモデルは壁の影響を考慮してはいるが，壁まで使用することはできない．本研究で用いた Launder-Shima モデルは Shumann⁶⁾，Lumley⁷⁾ の提唱した Realizability の考えに従い，上式中のモデル定数を関数に置き換えることで，壁面まで適用可能としたものである．具体的なモデルは次章の基礎式中に示す．

3. 解析方法

計算体系を Fig. 1 に示す．鳥居ら⁸⁾の実験と対応させ，内，外管半径を 27.2, 39.4mm，作動流体を窒素ガスとする．この場合，管半径比 α は 0.69 である．流れは流体力学的に十分発達した等温流として加熱部に入り，両面から壁面熱流束一定の加熱を受ける．空間座標は円筒座標系で取り扱い，各方向速度を U, V, W で表わし，平均値は大文字，変動値は小文字で表

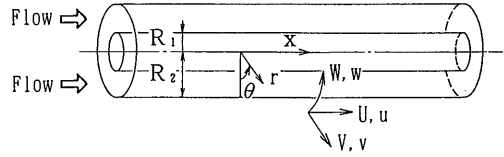


Fig. 1 Flow field schematic

現する．

解くべき式は，以下に示す運動量，エネルギー，レイノルズ応力，乱流エネルギー消散率の各保存式および連続の式である．

連続の式

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

運動量保存式

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (3)$$

レイノルズ応力

$$U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = - \frac{\overline{u_i u_j}}{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\overline{u_i u_j}}{u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon + \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij,1w} + \Phi_{ij,2w} \quad (4)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ C_s \frac{k}{\epsilon} u_k u_l \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right\}$$

$$k = \overline{u_i u_i} / 2 \quad (5)$$

$$\Phi_{ij,1} = - C_1^* \frac{\epsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) \quad (6)$$

$$\Phi_{ij,2} = - C_2^* (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P k) \quad (7)$$

$$\Phi_{ij,1w} = C_1'^* \frac{\epsilon}{k} (u_k u_m n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} u_k u_l n_k n_l - \frac{3}{2} u_k u_l n_k n_l) f_x \quad (8)$$

$$\Phi'_{ij, 2w} = C_2'^* (\Phi'_{ij, 2n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi'_{ij, 2n_k n_j} - \frac{3}{2} \Phi'_{jk, 2n_k n_i}) f_x \quad (9)$$

$$\Phi'_{ij, 2} = P_{ij} - 2 \delta_{ij} Pk / 3 \quad (10)$$

$$P_{ij} = - \frac{u_i u_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{u_i u_k}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (11)$$

$$Pk = P_{ii} / 2 \quad (12)$$

モデル関数

$$f_x = \frac{k^{3/2}}{C_1 \epsilon d}$$

$$C_1^* = 1 + f_{R1} A A_2^{0.25}, \quad C_2^* = C_2 A^{0.5}$$

$$C_1'^* = -2C_1^* / 3 + C_1'$$

$$C_2'^* = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3} (C_2^* - 1) + C_2' + \left| \frac{2}{3} (C_2^* - 1) + C_2' \right| \right\}$$

$$f_{R1} = 1 - \exp\{- (0.0067 R_t)^2\}$$

$$A_2 = a_{ij} a_{ji}, \quad A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki}, \quad A = 1 - 9A_2 / 8 + 9A_3 / 8$$

$$a_{ij} = \overline{u_i u_j} / k - 2 \delta_{ij} / 3$$

乱流エネルギー消散率

$$U_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = (C_{\epsilon 1} + \Phi_1 + \Phi_2) \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon \bar{\epsilon}}{k} + C_{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{k}{\epsilon} u_k u_l \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right\} + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_k \partial x_k} \quad (13)$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{0.5}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (14)$$

$$\Phi_1 = \frac{3}{2} A \left(\frac{Pk}{\epsilon} - 1 \right) \quad (15)$$

$$\Phi_2 = 0.35 f_{R2} (1 - 0.3 A_2) \quad (16)$$

$$f_{R2} = \exp\left\{ - (0.002 R_t)^{0.5} \right\} \quad (17)$$

エネルギー保存式

$$U_k \frac{\partial h}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{(\lambda + \lambda_t)}{\rho c_p} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right\} \quad (18)$$

ここで $h = \rho c_p T$

$$\lambda_t = \frac{\mu_t c_p}{Pr_t}, \quad \mu_t = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\rho \overline{u_i u_j}}{\partial U_i / \partial x_j} + \left| \frac{-\rho \overline{u_i u_j}}{\partial U_i / \partial x_j} \right| \right\} \quad (19, 20)$$

$$Pr_t = 0.86 \frac{1 - \exp\{- (y^+ / 26.5)^3\}}{1 - \exp\{- (y^+ / 30)^3\}} \quad (21)$$

Table 1 Model constants

C_2	C_2'	C_1'	C_2'	C_s	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	C_{ϵ}	C_t
2.58	0.75	1.67	0.5	0.22	1.45	1.9	0.18	2.5

実際の計算では上式を円筒座標系に変換し、流れ方向の変化が小さいとして境界層近似を行なった。激しい温度変化が起こる流れを取り扱う必要から、各式中では物性値の温度依存性と密度変動を考慮した。

(18)式中に現れる乱流熱流束に対しても、レイノルズ応力と同様に輸送方程式を解くべきであるが、本研究の主目的が流れ場の記述にあること、方程式系が複雑になることを考慮し、乱流熱伝導率 λ_t を介した近似を採用する。なお式中の μ_t は乱流粘性係数、 Pr_t は乱流プラントル数である。 Pr_t は定数とせず、半径方向の分布を考慮した長野ら⁹⁾の式(21式)を用いる。

層流化解析の場合の計算パラメータは、以下の式で示される無次元熱流束である。

$$q^+_{in} = \frac{(R_1 q_1 + R_2 q_2)}{R_1 + R_2} \frac{1}{(Gc_p T)_{in}} \quad (22)$$

本解析では鳥居らの実験、解析に合わせ、Table 2 に示す3ケースの解析を行なった。なお各ケース共通で加熱部入口レイノルズ数 Re_{in} は8000である。

Table 2 Calculation parameter

Case	1	2	3
$q^+_{in} \times 10^3$	4.65	3.10	1.54

Fig. 2 に Case 1 の主流方向速度分布の変化を示す。入口の乱流の速度分布が、出口部では層流の分布に近

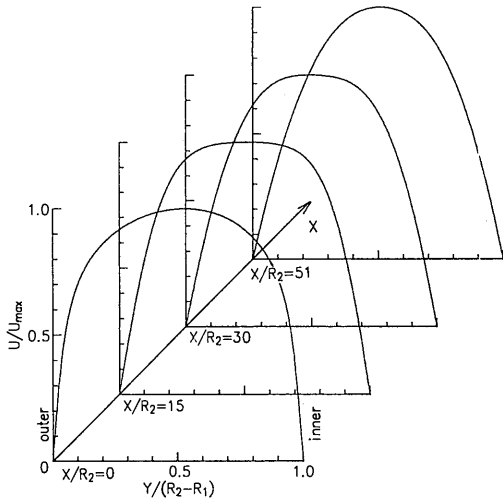


Fig. 2 Mean velocity profiles

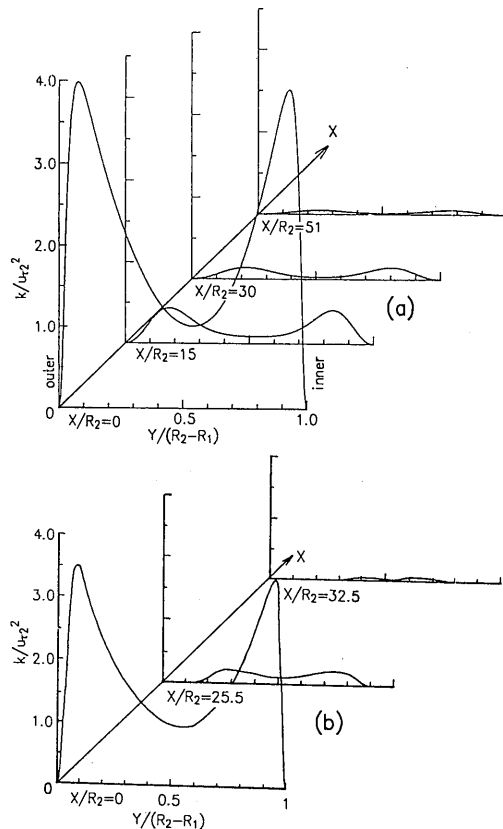


Fig. 3 Turbulent kinetic energy profiles
(a) presents (b) $k-\epsilon$ model

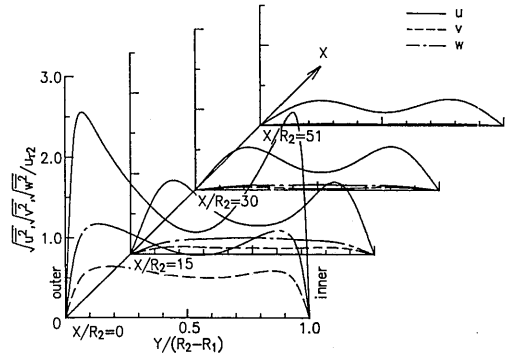


Fig. 4 Turbulent intensities profiles

づいており、層流化の発生が認められる。以下この場合の乱流場の変化について考察を行なう。Fig. 3に本解析 (a) および鳥居らの $k-\epsilon$ モデル (b) による乱流エネルギーの流れ方向変化を示す。 $k-\epsilon$ モデルによる結果では乱流エネルギーが次第に減少し、出口部の両管壁付近では乱れが無くなっている。それに対し本解析の結果では、確かに乱れは減少するもの有為の値を保っている。各方向の乱流強度の変化を Fig. 4 に示す。下流に進行するにつれ乱れは3方向全て減少するが、熱伝達の主な担い手である半径方向の乱れがほとんどないのに対し、主流方向乱れは相対的に減少の割合が小さく、流体の加速により乱れの非等性が増加していることが分かる。

Fig. 5 にレイノルズ数に対する内外壁ヌッセル数の変化を示す。Case 1 に加え Case 2 についても鳥居らの実験、本解析の結果とも層流値に漸近し、層流化が発生しているものと思われる。鳥居らの実験において層流化が発生していない、Case 3 において、本解析の結果では内管側ヌッセル数が大きく減少しており、内管側の予測に問題が認められる。そこで内管付近の予測を改善するために次章で説明するモデルの修正を行なった。

5. モデルの修正

5.1. 従来のモデルの問題点

Case 3 の内管側ヌッセル数の大きな減少は、 \overline{uw} の減衰が過大であることによる。 \overline{uw} の生成に寄与するのは $\overline{v^2}$ であるので、これは $\overline{v^2}$ の減衰が大きいことを意味する。 $\overline{v^2}$ の保存式には生成項がなく、再分配項を通じてエネルギー供給を受けることから、この項

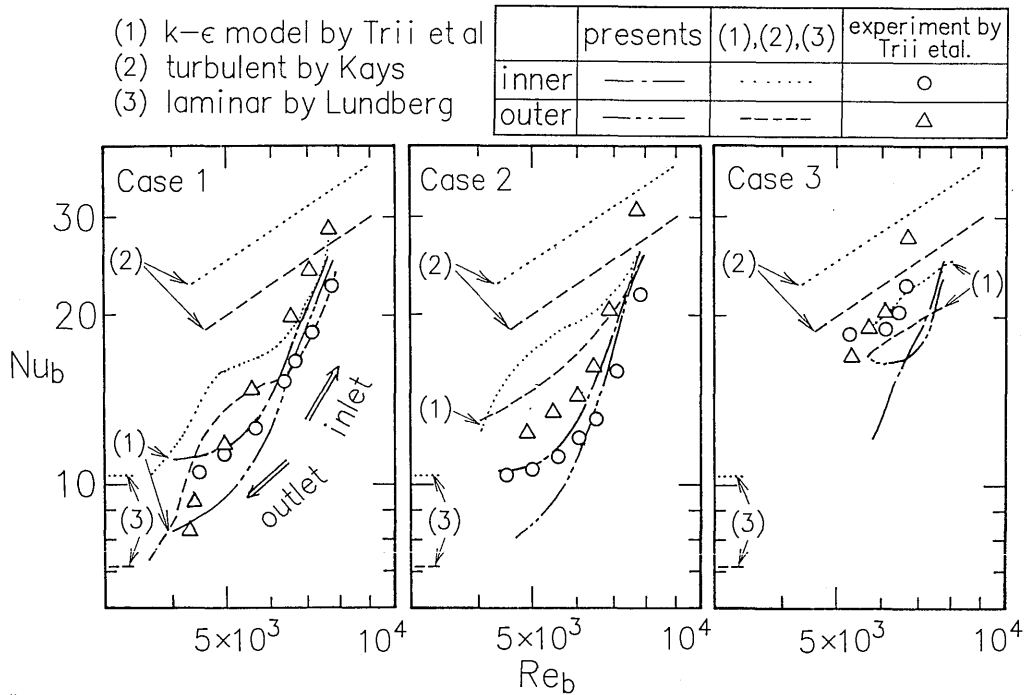


Fig. 5 Nusselt number vs. Reynolds number

のモデル化に問題があると考えられる。内管側のみに問題が生じることから、再分配項中の壁の影響による修正分が壁面形状の情報を含んでいないことに問題があるように思われる。今、二重円管の内管半径のみを、限りなく小さくしていくことを考えよう。このような場合内管の影響は非常に小さく、再分配項中の内管の影響を表わす項は0となるべきである。流体による間接的差違は存在するが、従来のモデルでは管壁は直接的には半径に関係のない影響を流体に対して与える。つまり従来のモデルでは内管側で壁修正分を過大に評価することになる。この事は再分配の過剰な抑制と同義なので \bar{v} の減衰が早すぎることの説明になる。

そこで次に、管半径の減少に伴い再分配項への内管の影響が小さくなるようにモデルを修正した。具体的な修正は、モデル関数 f_x を、曲率のある壁面の外側に流体があるような場合には小さくなる、ある関数で置き換える事で行なった。

5.2. 修正モデル

壁面上の点 C において圧力が瞬間的に増加した場合を想定する (Fig. 6)。圧力増加の影響は周囲の流体

に伝播するが、 C 点での圧力変動により A 点の流体が受ける影響は $\cos \theta / S$ に比例すると仮定する。ここで S は影響の伝わる面の面積である。ところで影響の伝わる面は、その伝播速度が流体の速度に比べ十分に大きいことを考慮し、球形であるとする。次に A 点にある乱流渦は、その渦の壁面への投影断面積に比

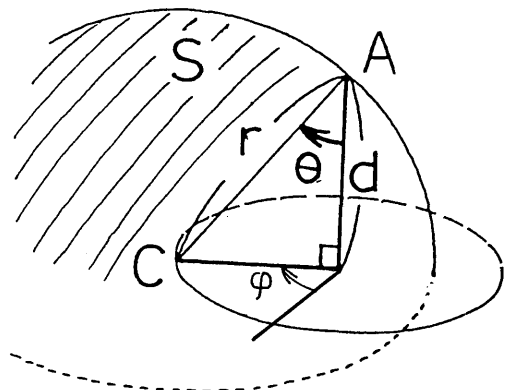


Fig. 6

例する影響を受けるものとする。乱れの長さスケールは $k^{2/3}/\epsilon$ で表わされるので、A点にある流体は $\pi k^3 \cos \theta / \epsilon^2 S$ に比例する影響をC点の圧力変動から受ける。

C点での圧力変動を生み出すのは速度変動であろうが⁸、ここでは速度と壁面での圧力変動の関係が未知であるので、 $fx = F(\pi k^3 \cos \theta / \epsilon^2 S)$ とおき無限大平板上の流れについて考えることで、Fの形を決定する。平板上であればSは半球の表面積 $2\pi r^2$ (rは半径) である。Fig. 6のように $r = d/\cos \theta$ であるので代入し、積分を行なう。

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \pi \frac{k^3 \cos \theta}{\epsilon^2 S} d\theta d\phi$$

$$= \frac{\pi k^3}{d^2 \epsilon^2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{2}{3} \pi \frac{k^3}{d^2 \epsilon^2} \quad (24)$$

モデルの他の部分はなるべく修正しないこととし、平板上の流れに対しては修正した fx を従来のものと一致させると以下ようになる。

$$fx = \sqrt{C \int \int \pi \frac{k^3}{\epsilon^2 S} \cos \theta d\theta d\phi}$$

$$C = \frac{3}{2} \frac{1}{\pi C_f^2} \quad (25)$$

ここで積分は全領域にわたって行なわれる。

実際の計算では計算時間を短縮し、かつ計算誤差を小さくするために次のようにする。 fx のうちから流

体の影響する部分を除き fx' と定義する。さらに無限大の平行平板間流に対する結果を $(fx')_f$ として、

$$fx' = C_{fx} (fx')_f \quad (26)$$

から定義した係数 C_{fx} をあらかじめ計算し、流体の計

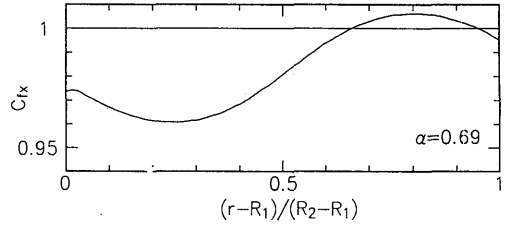


Fig. 7 Profiles of C_{fx}

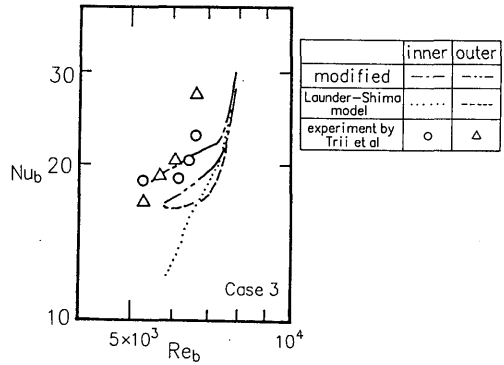


Fig. 8 Nusselt number vs. Reynolds number (modified model)

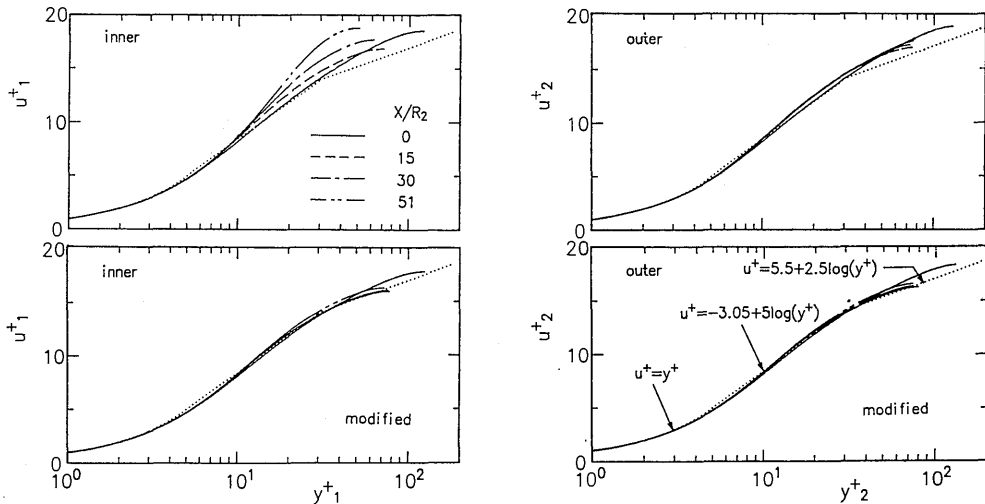


Fig. 9 Mean velocity profiles

算を行なう際にデータを読み込むことで f_x' を求める。この C_{fx} の同心二重円管に対する結果を Fig. 7 に示す。 C_{fx} は内管壁からやや離れたところで最小値を取り、内管壁に近づくにつれ次第に増加する。外管側ではやや大きな値をとるが、ほぼ1である。これは5.1節で述べた性質をうまく再現している。

6. 修正モデルによる結果

Fig. 8 に両面より加熱した場合のヌッセルト数の変化を示す。Case 3 での実験との不一致を十分改善している。Fig. 9 に無次元速度の分布を示す。従来のモデルの外管側の結果では出口部でも対数則を満たすが、内管側では普遍速度分布をはずれ次第に層流の分布に近づく。それに対し改良モデルの結果は、内外管双方とも対数則を満足し流れ方向で変化しない。これらより本研究で行なった修正がある程度の妥当性を持つことが分かる。

7. 結 論

1) 同心二重円管内の両管を強加熱した場合の加熱層流化現象を再現できた。その際主流方向以外の乱れが大きく減少し、乱れの非等方性が大きくなることが分かる。また乱れの減少と非等方性の増加に対応し、レイノルズ応力は下流部で大きく減少する。

2) ヌッセルト数の実験値との比較から、内管側の予測に問題があることがわかった。

3) 内管側の予測の低下の原因は、再分配項の壁修正分に壁面形状の影響を加えていないためと考えモデル関数の修正を行ない、ある程度の予測の改善をみた。

記号説明

アルファベット

- c_p 定圧比熱
 G 単位面積あたりの質量流量
 k 乱流エネルギー ($= \overline{u_i u_i} / 2$)
 Nu ヌッセルト数
 P, p 圧力の平均, 変動値
 q 熱流束
 q_{in}^+ 無次元熱流束 (22式)
 R 管半径

- R_t 乱流レイノルズ数 ($= k^2 / \nu \epsilon$)
 T, t 平均, 変動温度または時間
 U, u 主流 (管軸) 方向平均, 変動速度
 u_τ 摩擦速度
 u^+ 摩擦速度で無次元化した主流方向速度
 V, v 半径方向平均, 変動速度
 W, w 周方向平均, 変動速度
 x 主流 (管軸) 方向座標, 加熱部入口よりの距離
 Y 外管からの距離
 y^+ 摩擦速度で無次元化した壁からの距離

ギリシャ文字

- α 管半径比 ($= R_1/R_2$)
 ϵ 乱流エネルギー消散率

沿 え 字

- b バルク
 i, j, k i, j, k 成分
 in 加熱部入口
 t 乱流
 1 内管
 2 外管

その他

- 平均値

参 考 文 献

- 1) Launder, B. E. and Shima, N., AIAA J. **52** (1989) 1319.
- 2) Rotta, J., Z. Physik **129** (1951) 547.
- 3) Gibson, M. M. and Launder, B. E., J. Fluid Mech. **86-3** (1978) 491.
- 4) Shir, C. C., J. Atoms Sci. **30** (1973) 1327.
- 5) Daly, D. J. and Hallow, F. H., Phys. Fluid **13** (1970) 2634.
- 6) Scumann, U., The Physics Fluids **20-5** (1977) 721.
- 7) Lumley, J. L. Advance in Applied Mech. **18** (1978) 123 Academic Press.
- 8) 鳥居修一ほか2名, 九州大学総合理工学研究科報告, **71** (1985) 69.
- 9) 長野靖尚・菱田幹雄, 空調・冷凍連合講演会20周年記念大会講演集 (1986) 41.