

相対論的電子-陽電子プラズマにおけるアルフヴェン波のパラメトリック不安定性

松清, 修一
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

羽田, 亨
九州大学大学院総合理工学研究科大気海洋環境システム学専攻

<https://doi.org/10.15017/16643>

出版情報 : 九州大学大学院総合理工学報告. 23 (3), pp.303-309, 2001-12. Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

相対論的電子-陽電子プラズマにおけるアルフヴェン波の パラメトリック不安定性

松清 修一^{*1,†} · 羽田 亨^{*1}

(平成13年10月31日 受理)

Parametric instabilities of a circularly polarized Alfvén wave in a nondispersive relativistic electron-positron plasma

Shuichi MATSUKIYO and Tohru HADA

[†]E-mail of corresponding author: matsukiy@esst.kyushu-u.ac.jp

Dispersion relations of parametric instabilities of circularly polarized Alfvén waves in a relativistic electron-positron plasma is investigated. In addition to the usual decay and beat instabilities, two new types of instabilities involving the parallel/anti-parallel propagating Alfvén-like waves and the parallel propagating Langmuir-like wave are found to be destabilized when the plasma parameters satisfy the condition, $2\omega_p^2 < (\omega_0 + \Omega_0)^2$, where ω_p , ω_0 , and Ω_0 respectively represent the plasma frequency, parent wave frequency, and the gyro-frequency. The maximum growth rates for these instabilities are derived analytically. Further, weakly relativistic effects are discussed for all the instabilities.

Key words : parametric instability, electron-positron plasma, relativistic effect

1. 緒 言

磁気流体 (MHD) 乱流の生成は宇宙線の加速に強く寄与していると考えられている。その MHD 乱流生成の有効な候補として、パラメトリック不安定性がある。パラメトリック不安定性はいわゆるモード間結合であり、波動の振幅が十分大きくなるとポンプ波のエネルギーが他の波動 (プラズマでは密度揺らぎ) を介して異なる別の波動へと運ばれていく。太陽風プラズマでは、地球のフォアショック領域においてアルフヴェン波のパラメトリック不安定性が実際に観測されている¹⁻²。アルフヴェン波は宇宙・天体プラズマ中に普遍的に存在する波動モードであり MHD 方程式の厳密解でもあることから、これまでに多くの理論的研究がなされてきた³⁻¹²。それらの結果をまとめると次のようになる (ただし波動の伝播方向が磁力線に平行または反平行な場合 (1次元問題))。

1. ポンプ波が右円偏波のとき
 - (a) $\beta < 1$... 崩壊不安定性
 - (b) $\beta > 1$... 変調不安定性、ビート不安定性
2. ポンプ波が左円偏波のとき
 - (a) $\beta < 1$... 崩壊不安定性、変調不安定性、ビート不安定性

(b) $\beta > 1$... ビート不安定性

ここに、 $\beta = v_s^2/v_A^2$ はイオン音波の音速とアルフヴェン速度の比の2乗である。崩壊不安定性はポンプ波がそれと平行方向に伝播する静電波と平行および反平行方向に伝播する電磁波に崩壊するもので、ビート不安定性はポンプ波と密度揺らぎのビートによって新たにポンプ波と平行および反平行方向に伝播する電磁波を励起するものである。また変調不安定性ではすべてのサイドバンドがポンプ波と平行方向に伝播する。いずれの場合もポンプ波とサイドバンドの周波数・波数との間に次のような共鳴条件が成り立つ。

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \omega, \quad k_{\pm} = k_0 \pm k$$

ここで、 (ω_0, k_0) および (ω, k) はそれぞれポンプ波と密度揺らぎの周波数と波数である。

上の結果は主に太陽風プラズマをモデル化した電子-イオンプラズマ中のアルフヴェン波に関するものであるため、高周波のプラズマ振動等とは独立である ($\omega_0 \ll \omega_p^2$)、すなわち系に現れる空間電荷は電子による瞬時の応答によって打ち消される、という仮定がなされている。一方で、高エネルギー天体現象への応用を考えると、しばしば電子-陽電子がプラズマの主成分を成すことが知られており、そのような系では粒子のサイクロトロン周波数が

*1 大気海洋環境システム学専攻

プラズマ周波数を上回ることがあるため、 $\omega_0^2 \sim \omega_p^2$ となり得る。必ずしも空間電荷が無視できない。さらに、このような高エネルギー天体では相対論的効果による粒子質量の増加が本質的な役割を演じる。電子-陽電子プラズマ中のパラメトリック不安定性については、最近 Munoz and Gomberoff¹³ による報告があるが、これには空間電荷の効果が含まれていないため結果は電子-イオンプラズマの場合とそれほど大きく違わない。よって本研究では、空間電荷の効果を考慮に入れた電子-陽電子プラズマ中のパラメトリック不安定性の分散関係式を求め、その解を議論する。特に、プラズマ周波数がポンプ波の周波数と同程度以下になると新たに別の崩壊不安定性が現れることを示す。なお、解析では簡単のため分散を無視している。

2. 基礎方程式とその線形化

ここでは、相対論的電子および陽電子から成る系を考え、各物理量は次の2流体方程式系に従うものとする。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla\right) (\gamma_j \mathbf{v}_j) = \frac{q_j}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}}{c}\right) - \frac{v_s^2}{n_0} \nabla n_j, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\mathbf{J} = \sum_j q_j n_j \mathbf{v}_j, \quad (6)$$

$$\rho = \sum_j q_j n_j, \quad (7)$$

ここに $\mathbf{v}_j = (u_j, \mathbf{v}_{\perp j})$ 、 $\gamma_j = 1/\sqrt{1 - v_j^2/c^2}$ 、 v_s 、 n_j 、 q_j および m_0 はそれぞれ、プラズマの速度、ローレンツ因子、音速、密度、電荷および静止質量を表す。また、 c は光速、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} は電場、磁場である。添字 j は粒子種を表す。

ポンプ波として磁力線 \mathbf{B}_0 に平行方向 (x 軸方向) に伝播する円偏波のアルフヴェン波を仮定する。各物理量は、添字 0 を定数、 \mathbf{p} をポンプ波に関する量、 δ を摂動量として次のように表される。

$$n_j = n_0 + \delta n_j \quad (8)$$

$$u_j = \delta u_j \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_p + \delta \mathbf{B} \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_{\perp j} = \mathbf{v}_{pj} + \delta \mathbf{v}_j \quad (11)$$

さらに、ポンプ波および摂動量を次のように書く。

$$\mathbf{B}_p = \frac{B_p}{\sqrt{2}} \exp(-i\phi_0) \hat{\mathbf{e}} + c.c. \quad (12)$$

$$\delta \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta B_+ \exp(-i\phi_+) + \delta B_- \exp(-i\phi_-)) \hat{\mathbf{e}} + c.c. \quad (13)$$

$$\delta n_j = \frac{\delta n_j}{2} \exp(-i\phi) + c.c. \quad (14)$$

ここで B_p は実数、 $\phi_0 = k_0 x - \omega_0 t$ 、 $\phi_{\pm} = k_{\pm} x - \omega_{\pm} t$ 、 $\phi = kx - \omega t$ ((k_0, ω_0) 、 (k, ω) はそれぞれポンプ波および密度変動の波数、周波数であり、 $(k_{\pm}, \omega_{\pm}) = (k_0 \pm k, \omega_0 \pm \omega)$ である)、 $\hat{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{y}} - i\hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ ($\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$ は、 y 方向および z 方向の単位ベクトル)、 $c.c.$ は複素共役を表す。速度 \mathbf{v}_j についても同様に書き下すことができる。

これから各粒子種の 0 次の (ポンプ波に対応する) 速度は、 $\Omega_{0j} = q_j B_0 / m_0 c$ を非相対論的サイクロトロン周波数、 $\eta = B_p / B_0$ として次のように書ける。

$$\frac{v_{pj}}{c} = -\frac{\omega_0}{ck_0} \frac{\Omega_{0j} \eta}{\gamma_j \omega_0 + \Omega_{0j}} \quad (15)$$

ポンプ波の周波数 ω_0 は、分散関係

$$\frac{c^2 k_0^2}{\omega_0^2} = 1 - \sum_j \frac{\omega_p^2}{\omega_0 (\gamma_j \omega_0 + \Omega_{0j})} \quad (16)$$

に従う。ここで ω_p はプラズマ周波数である。上式で $|(\omega_0 + \Omega_{0j})/\omega_0| \gg v_{pj}^2/2c^2$ が成り立つとすれば、

$$\frac{c^2 k_0^2}{\omega_0^2} = 1 - \sum_j \frac{\omega_p^2}{\omega_0 (\omega_0 + \Omega_{0j})} \left[1 - \frac{\eta^2}{2} \frac{\Omega_{0j}^2}{k_0^2 c^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + \Omega_{0j}} \right)^3 \right] \quad (17)$$

と近似できる。

摂動量に関しては、式 (1)~(5) を線形化する。若干の計算の後次の固有値方程式が得られる。

$$\left[\omega_+ \left(1 + \frac{v_p^2}{c^2} \right) + \Omega_0 \right] \delta v_{p+} + \frac{v_p^2}{2c^2} \omega_+ \delta v_{p-}^* - \frac{1}{2} \left[v_p \left(1 + \frac{v_p^2}{2c^2} \right) + \Omega_0 \eta \right] \delta u_p = -\frac{\omega_+}{k_+} \delta b_+ \quad (18)$$

$$\left[\omega_- \left(1 + \frac{v_p^2}{c^2} \right) + \Omega_0 \right] \delta v_{p-}^* + \frac{v_p^2}{2c^2} \omega_- \delta v_{p+} - \frac{1}{2} \left[v_p \left(1 + \frac{v_p^2}{2c^2} \right) + \Omega_0 \eta \right] \delta u_p = -\frac{\omega_-}{k_-} \delta b_-^* \quad (19)$$

$$\left[\omega_+ \left(1 + \frac{v_e^2}{c^2} \right) - \Omega_0 \right] \delta v_{e+} + \frac{v_e^2}{2c^2} \omega_+ \delta v_{e-}^* - \frac{1}{2} \left[v_e \left(1 + \frac{v_e^2}{2c^2} \right) - \Omega_0 \eta \right] \delta u_e = \frac{\omega_+}{k_+} \delta b_+ \quad (20)$$

$$\left[\omega_- \left(1 + \frac{v_e^2}{c^2} \right) - \Omega_0 \right] \delta v_{e-}^* + \frac{v_e^2}{2c^2} \omega_- \delta v_{e+} - \frac{1}{2} \left[v_e \left(1 + \frac{v_e^2}{2c^2} \right) - \Omega_0 \eta \right] \delta u_e = \frac{\omega_-}{k_-} \delta b_-^* \quad (21)$$

$$\left[\omega^2 \left(1 + \frac{v_p^2}{2c^2} \right) - k^2 v_s^2 \right] \delta u_p = \omega_p^2 (\delta u_p - \delta u_e) -$$

$$\omega [v_p(\delta b_+ - \delta b_-) - \Omega_0 \eta (\delta v_{p+} - \delta v_{p-}^*)] \quad (22)$$

$$\left[\omega^2 \left(1 + \frac{v_e^2}{2c^2} \right) - k^2 v_s^2 \right] \delta u_e = -\omega_p^2 (\delta u_p - \delta u_e) + \omega [v_e(\delta b_+ - \delta b_-) - \Omega_0 \eta (\delta v_{e+} - \delta v_{e-}^*)] \quad (23)$$

$$(k_+^2 c^2 - \omega_+^2) \delta b_+ = \omega_p^2 k_+ \left[(\delta v_{p+} - \delta v_{e+}) + \frac{k}{2\omega} (v_p \delta u_p - v_e \delta u_e) \right] \quad (24)$$

$$(k_-^2 c^2 - \omega_-^2) \delta b_- = \omega_p^2 k_- \left[(\delta v_{p-} - \delta v_{e-}^*) + \frac{k}{2\omega} (v_p \delta u_p - v_e \delta u_e) \right] \quad (25)$$

ここに、 $\Omega_0 = eB_0/m_0c$ 、 $\delta b_{\pm} = e\delta B_{\pm}/m_0c$ 、および * は複素共役を表す。なお、上式の導出にあたっては $v_p^2/c^2, v_e^2/c^2 \ll 1$ を仮定し、規格化として $k_0 = \omega_0 = 1$ を用いた。各式はそれぞれ、運動方程式 (1) の垂直成分が式 (18)~(21) に、平行成分および式 (2)、(3) が式 (22)~(23) に、式 (4)、(5) が式 (24)~(25) に対応する。ここで $\eta = 0$ とすると、式 (18)~(21) および式 (24)~(25) より

$$D_{\pm} \equiv \left(k_{\pm}^2 - \frac{\omega_{\pm}^2}{c^2} \right) v_A^2 + \frac{\omega_{\pm}^2 \Omega_0^2}{\omega_{\pm}^2 - \Omega_0^2} = 0 \quad (26)$$

が、また式 (22)~(23) から

$$\begin{cases} S \equiv \omega^2 - k^2 v_s^2 = 0 \\ \omega^2 - 2\omega_p^2 - k^2 v_s^2 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

が得られ、これらは背景プラズマの分散関係になっている。式 (26) は電磁波の分散関係を与えるが、もし変位電流 (式 (5) 右辺第2項) が無視できるほど小さければ、 $\omega_{\pm}^2/k_{\pm}^2 c^2 \ll 1$ であり式 (26) の括弧中第2項は無視できる (同じ理由で式 (16) の右辺第1項も)。一方、式 (27) の第1、2式はそれぞれ音波およびラングミュア波の分散関係である。 $\eta = 0$ では電磁波 [式 (26)] と静電波 [式 (27)] は独立であるが、 $\eta \neq 0$ となるとポンプ波は密度揺らぎ (静電波) を介して他の電磁波と相互作用することが分かる。ポンプ波の周波数・波数が (1, 1) であることを考えると、 (ω, k) および (ω_{\pm}, k_{\pm}) は共にせいぜい (1, 1) のオーダーでなければならない。このことを踏まえ $\omega_p^2 \rightarrow \infty$ とすると、ラングミュア波的な密度揺らぎは不安定性に寄与し得ないであろう。したがって密度揺らぎは音波的、すなわち $S \approx 0$ または $\delta u_p \approx \delta u_e$ であり、これは空間電荷を無視することに対応する。太陽風の電子-イオンプラズマでは $1 < \Omega_i \ll \omega_{pe}$ であるため、空間電荷は無視してよいことが分かる。ここに Ω_i および ω_{pe} は、それぞれイオンサイクロトロン周波数、電子プラズマ周波数である。逆に $\omega_p^2 \sim O(1)$ となると、ラングミュア波的な密度揺らぎを含む枠組みで不安定性を議論する必要がある。以下では式 (18)~(25) の自明でない解として得られる分散関係式を解いて、系の安定性を調べる。簡単のため、 $1/\Omega_0^2 (\omega_0^2/\Omega_0^2) \rightarrow 0$ とし分散効果は無視する。

2.1 非相対論的プラズマ

相対論的效果を無視すると ($v_p^2/c^2, v_e^2/c^2 \rightarrow 0$)、分散関係式は次のようになる。

$$\omega_p^2 \left\{ 2S + \eta^2 \left[\frac{(k - 2\omega - \omega^2)^2}{D_+} - \frac{(k - 2\omega + \omega^2)^2}{D_-} + 2\omega^2 \right] - S \left[S + \frac{\Omega_0^2 \eta^2}{2} (\omega - k)^2 \left(\frac{1}{D_+} + \frac{1}{D_-} \right) \right] + \frac{\Omega_0^2 \eta^4 \omega^2 (\omega - k)^2}{2} \left[\frac{2\omega^2}{D_+ D_-} + \left(\frac{1}{D_+} + \frac{1}{D_-} \right) \right] \right\} = 0 \quad (28)$$

ここで $v_A^2/c^2 \equiv \Omega_0^2/2\omega_p^2 = 1/(c^2 - 1)$ 。太陽風プラズマでは、 $1/c^2 \ll 1$ であるため通常変位電流の効果は無視できるが、高エネルギー天体プラズマにおいては、しばしば $1/c^2 \sim 1$ となる。よってここでは変位電流を含んだ形で式 (28) を議論する。

2.1.1 空間電荷を無視した場合 ($\omega_p^2 \rightarrow \infty$)

空間電荷が無視できる場合、すなわち $\omega_p^2 \rightarrow \infty$ または $\delta u_e = \delta u_p$ ($\delta n_e = \delta n_p$) が良い近似として成り立つ場合、式 (28) は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - k^2 v_s^2)(\omega - k)(\omega + k + 2)(\omega + k - 2) \\ & - \frac{\eta^2}{2v_A^2} \left[(\omega + k - 2)(k - 2\omega - \omega^2)^2 \right. \\ & \quad \left. + (\omega + k + 2)(k - 2\omega + \omega^2)^2 \right. \\ & \quad \left. - 2v_A^2 \omega^2 (\omega - k)(\omega + k + 2)(\omega + k - 2) \right] = 0 \quad (29) \end{aligned}$$

上式で更に変位電流の効果は無視すると ($v_A^2 = 1$ あるいは $c^2 \rightarrow \infty$)、MHD プラズマにおける分散関係式 (Goldstein⁵ および Derby⁶) と一致する。式 (29) の数値解を Fig.1 に示す。パラメータはそれぞれ、(a) $v_s = 0.2$ 、 $c^2 = 2.0$ 、(b) $v_s = 1.05$ 、 $c^2 = 2.0$ である。各々、最上部が $\eta = 0$ の場合、中・下部がそれぞれ $\eta = 0.1$ の場合の周波数の実部・虚部を表す。 $v_s < 1$ の場合 (Fig.1(a))、いわゆる崩壊不安定性が見られる。これは、ポンプ波 (ω_0, k_0) が磁力線に平行方向に伝播する静電波 (ω, k) と平行および反平行方向に伝播する電磁波 (ω_{\pm}, k_{\pm}) に崩壊するもので、静電波と電磁波の一つ (ω_-, k_-) がそれぞれ音波とアルフヴェン波の分散関係を近似的に満たすことから acoustic 崩壊不安定性と呼ぶことにする。不安定性の最大成長率 δ_{\max} は

$$\delta_{\max} = \frac{\eta(1 - v_s)^{1/2}}{2v_A v_s^{1/2}(1 + v_s)} \quad (30)$$

と見積もられる。ただし $\eta^2 \ll 1$ 、 $v_A \sim O(1)$ 、 $0 < 1 - v_s^2 \sim O(1)$ とした。式 (30) から明らかのように、変位電流が大きくなると成長率が減少する (磁場のエネルギーが増加するため、摂動を与えても振幅の変調が起こりにくくなる)。 $v_s^2 > 1$ となると (Fig.1(b))、acoustic 崩壊不安定性に代わっていわゆるビート不安定性が観測される。これは、ポンプ波 (ω_0, k_0) が密度揺らぎ (ω, k)

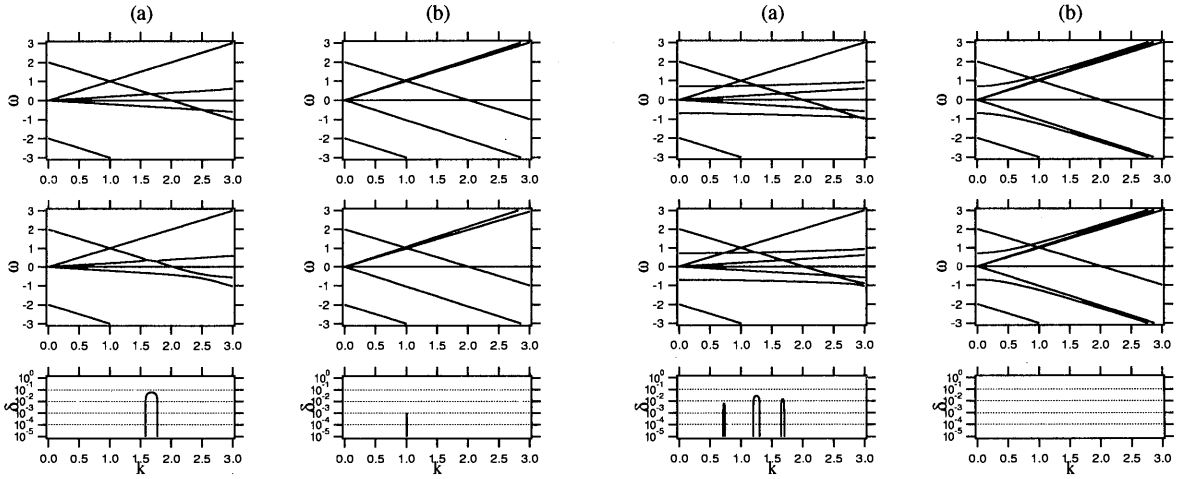


Fig. 1 Solutions of eq.(29). Used parameters are, the light speed $c^2 = 2.0$, and the sound speed (a) $v_s = 0.2$, and (b) $v_s = 1.05$. The top panels represent the frequency of the density fluctuation (ω) for $\eta = 0$, and the middle and the bottom panels show the real (ω) and the imaginary (δ) frequencies for the normalized parent wave amplitude $\eta = 0.1$, plotted versus the wavenumber (k).

とのビートによって磁力線に平行および反平行方向に伝播する電磁波 (ω_{\pm}, k_{\pm}) を励起するもので、励起される電磁波 (ω_{\pm}, k_{\pm}) がともにアルフヴェン波の分散関係を近似的に満たすので、ここではアルフヴェンビート不安定性と呼ぶことにする。最大成長率は次の通りである。

$$\delta_{\max} = \frac{\eta^3}{4\sqrt{2}v_A^3(v_s^2 - 1)^{3/2}} \quad (31)$$

Jayanti and Hollweg¹¹ によって指摘されたように、 v_s^2 が増加するにしたがって密度揺らぎが成長しにくくなるので急速に不安定性の成長率が減少する。

2.1.2 空間電荷を考慮した場合 ($\omega_p^2 \ll \infty$)

ω_p^2 が有限であれば、式 (28) をフルに解かなければならない。この場合、系の基本モードとしてラングミュア波が新たに加わる。結果として、不安定性の特徴が前節とは大きく異なることが示される。

式 (28) を整理すると、

$$\begin{aligned} S(\omega^2 - k^2 v_s^2 - 2\omega_p^2)(\omega - k)(\omega + k + 2)(\omega + k - 2) \\ + \frac{\eta^2}{v_A^2} \{ \omega_p^2 [(\omega + k - 2)(k - 2\omega - \omega^2)^2 \\ + (\omega + k + 2)(k - 2\omega + \omega^2)^2] \\ - 2v_A^2 \omega^2 (\omega - k)(\omega + k + 2)(\omega + k - 2) \\ - S\Omega_0^2 (\omega - k)^2 (\omega + k) \} \\ + \frac{\eta^4}{v_A^4} \Omega_0^2 \omega^2 (\omega - k) [\omega^2 - v_A^2 (\omega^2 - k^2)] = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

となる。Fig.2 に、式 (32) の数値解を示す。パラメータはそれぞれ (a) $\omega_p = 0.5, v_s = 0.2$, (b) $\omega_p = 0.5, v_s = 1.05$,

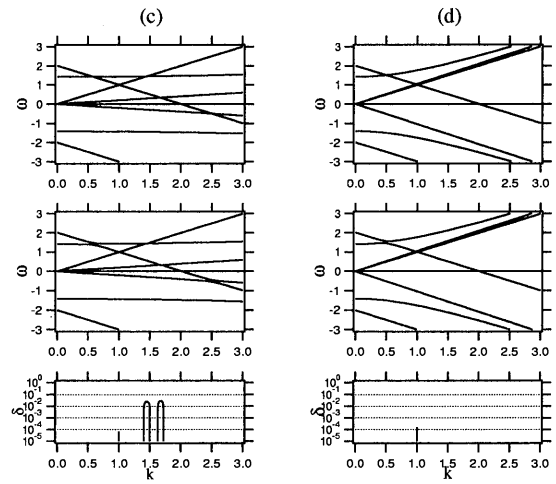


Fig. 2 Solutions of eq.(32) are displayed in the same format as Fig.1. The parameters used are (a) $\omega_p = 0.5, v_s = 0.2$, (b) $\omega_p = 0.5, v_s = 1.05$, (c) $\omega_p = 1.0, v_s = 0.2$, (d) $\omega_p = 1.0, v_s = 1.05$, and $\Omega_0 = 4.0$ for all the cases.

(c) $\omega_p = 1.0, v_s = 0.2$, (d) $\omega_p = 1.0, v_s = 1.05$ である。ただし $\Omega_0 = 4.0$ とした。カットオフ周波数 $\pm\sqrt{2}\omega_p$ のラングミュア波の存在が確認できる。Fig.2(a) において、acoustic 崩壊不安定性 ($k \sim 1.7$) に加え、新たに2種類の不安定性が見られる。1つは ($k \sim 1.25$)、ポンプ波 (ω_0, k_0) が磁力線に平行方向に伝播する静電波 (ω, k) と平行および反平行方向に伝播する電磁波 (ω_{\pm}, k_{\pm}) とに崩壊するもので、静電波と電磁波の1つ (ω_-, k_-) がそれぞれラングミュア波と反平行伝播のアルフヴェン波の分散関係を近似的に満たすのでここではこれを Lb⁻ 不安定性と呼ぶことにする。最大成長率は

$$\delta_{\max} = \frac{\eta}{2v_A} \left[\frac{(K-1)(4\Omega_0^2 - K^2)}{2(2-K)} \right]^{1/2} \quad (33)$$

であり、ここに

$$K = \frac{2 - [2\omega_p^2(1 - v_s^2) + 4v_s^2]^{1/2}}{1 - v_s^2}$$

は静電波の波数である。不安定性が起こる条件は $1 < K (< 2)$ すなわち $2\omega_p^2 < 1 - v_s^2$ である。また今の場合、 Lb^- 不安定性の成長率は acoustic 崩壊不安定性よりも大きい。この他にも様々なパラメータに対して数値計算を行った結果、 Lb^- 不安定性の成長率は多くの場合 acoustic 崩壊不安定性と同じオーダーであった。2つ目も ($k \sim 0.7$) やはりラングミュア波的な密度揺らぎを介した不安定性であるが、この場合は静電波と電磁波の1つ (ω_-, k_-) がそれぞれラングミュア波および平行伝播のアルフヴェン波の分散関係を近似的に満たす。ここではこれを Lf^- 不安定性と呼ぶことにしよう。最大成長率は次の通りである。

$$\delta_{\max} = \frac{\eta\omega_p}{\sqrt{2}v_A(1-v_s^2)^{1/2}} \quad (34)$$

ここで、 Lf^- 不安定性は $2\omega_p^2 < (\Omega_0 + 1)^2$ においてしか存在し得ないことを注意しておく。本来 $2\omega_p^2 > (\Omega_0 + 1)^2$ においては、ラングミュア波はアルフヴェン波と直接相互作用することができないからである。したがって、式 (34) は分散効果を考慮すると大きく修正を受ける可能性がある。Fig.2(c) において、acoustic 崩壊不安定性 ($k \sim 1.7$) および Lf^- 不安定性 ($k \sim 1.4$) は観測されるが、 Lb^- 不安定性に代わってアルフヴェンビート不安定性 ($k \sim 1.0$) が起きていることがわかる。このとき、最大成長率は

$$\delta_{\max} = \frac{\eta^3\omega_p}{2v_A^3} \left[\frac{\omega_p^4 - \Omega_0^2(1-v_s^2)^2}{(1-v_s^2)^3(1-v_s^2-2\omega_p^2)^3} \right]^{1/2} \quad (35)$$

で与えられ、不安定性の条件として i) $v_s^2 > 1$, $\omega_p^4 > \Omega_0^2(v_s^2 - 1)^2$ または ii) $0 < 1 - v_s^2 < 2\omega_p^2 < 2\Omega_0(1 - v_s^2)$ が得られる。ここでも i) の場合、 v_s^2 が増加するにつれてプラズマの熱的圧力によって成長率が抑えられる。一方で ii) のときは、 ω_p^2 が増加すると静電的な復元力のために成長率が減少する。Fig.2(b) では、これまで述べてきたいかなる不安定性の条件をも満足しないので系は安定である。Fig.2(d) においては、アルフヴェンビート不安定性のみが観測されるが、成長率は Fig.1(c) の場合に比べて非常に小さい。

2.2 相対論的プラズマ

ここでは相対論的效果による分散関係式 (28) の補正を議論する。弱い相対論的效果を仮定し、ポンプ波の振幅 η の4次以上の項は無視した。したがって分散関係式は次のようになる。

$$\omega_p^2 \left\{ 2S' + \eta^2 \left[\frac{(k-2\omega-\omega^2)^2}{D_+} - \frac{(k-2\omega+\omega^2)^2}{D_-} + 2\omega^2 \right] \right\} - \left[S'^2 + S \frac{\Omega_0^2 \eta^2}{2} (\omega-k)^2 \left(\frac{1}{D_+} + \frac{1}{D_-} \right) \right] \quad (36)$$

ここで

$$S' = g^2\omega^2 - k^2v_s^2 \quad (37)$$

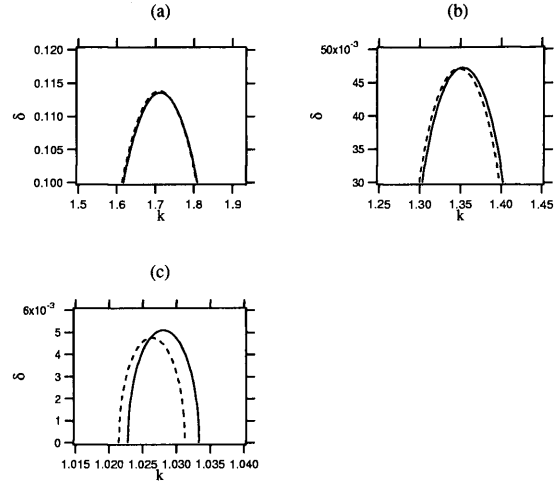


Fig. 3 Comparison between the relativistic and non-relativistic instability growth rates. The solid and the dashed lines are evaluated from eqs.(39) (relativistic) and (29) (non-relativistic), respectively. The parameters used are $\eta = 0.2$, $c^2 = 2.0$, and (a) $v_s = 0.2$, (b) $v_s = 0.5$, (c) $v_s = 1.05$.

$$g^2 = 1 + \frac{\eta^2}{c^2} \quad (38)$$

である。式 (36) と式 (28) の違いは S が相対論的效果によって修正されていることと η^4 に比例した最終項が消去されている点である。以下の計算では $\Omega_0 = 4.0$ とする。

2.2.1 空間電荷を無視した場合 ($\omega_p^2 \rightarrow \infty$)

この場合、式 (36) は次のようになる。

$$g^2 \left(\omega^2 - \frac{k^2v_s^2}{g^2} \right) (\omega-k)(\omega+k-2)(\omega+k+2) - \frac{\eta^2}{2v_A^3} \left[(\omega+k-2)(k-2\omega-\omega^2)^2 + (\omega+k+2)(k-2\omega+\omega^2)^2 - 2v_A^2\omega^2(\omega-k)(\omega+k+2)(\omega+k-2) \right] \quad (39)$$

仮に v_s^2/g^2 と η^2/g^2 を v_s^2 と η^2 で置き換えると、式 (39) は式 (29) に一致する。このことから、相対論的效果は粒子質量の増加によって実効的な音速を減少させ、振幅の効果を抑えるという形で作用することがわかる。その結果 acoustic 崩壊不安定性の成長率は次のような補正を受ける。

$$\delta_{\max} = \frac{\eta(g-v_s)^{1/2}}{2v_Av_s^{1/2}(g+v_s)} \approx \frac{\eta(1-v_s)^{1/2}}{2v_Av_s^{1/2}(1+v_s)} \left(1 - \frac{\eta^2}{4c^2} \frac{1-3v_s}{1-v_s^2} \right) \quad (40)$$

これは式 (30) と比べると、 $v_s < 1/3$ のとき小さく $v_s > 1/3$ のとき大きい。式 (39) (実線) と式 (29) (破線) の数値解を比較したのが Fig.3(a) ($v_s = 0.2$)、(b) ($v_s = 0.5$) である。またアルフヴェンビート不安定性の成長率を

Fig.3(c) ($v_s = 1.05$) に示す。最大成長率は次式にしたがって増加することが分かる。

$$\delta_{\max} = \frac{\eta^3}{4\sqrt{2}v_A^3(v_s^2 - g^2)^{3/2}} \quad (41)$$

2.2.2 空間電荷を考慮した場合 ($\omega_p^2 \ll \infty$)

式 (36) を整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & g^4 \left(\omega^2 - \frac{k^2 v_s^2}{g^2} \right) \left(\omega^2 - \frac{k^2 v_s^2 + 2\omega_p^2}{g^2} \right) \\ & \times (\omega - k)(\omega + k + 2)(\omega + k - 2) \\ & + \frac{\eta^2}{v_A^2} \left\{ \omega_p^2 [(\omega + k - 2)(k - 2\omega - \omega^2)^2 \right. \\ & \quad + (\omega + k + 2)(k - 2\omega + \omega^2)^2 \\ & \quad \left. - 2v_A^2 \omega^2 (\omega - k)(\omega + k + 2)(\omega + k - 2)] \right. \\ & \quad \left. - \Omega_0^2 (g^2 \omega^2 - k^2 v_s^2) (\omega - k)(\omega + k) \right\} \quad (42) \end{aligned}$$

ここで再び v_s^2/g^2 、 ω_p^2/g^2 、 η^2/g^2 を v_s^2 、 ω_p^2 、 η^2 で置き換えると上式は式 (32) に一致する。したがって Lb^- 不安定性の成長率は

$$\delta_{\max} = \frac{\eta}{2v_A g} \left[\frac{(K-1)(4\Omega_0^2 - K^2)}{2(2-K)} \right]^{1/2} \quad (43)$$

$$K = \frac{2 - [2g^2\omega_p^2(g^2 - v_s^2) + 4v_s^2 g^2]^{1/2}}{g^2 - v_s^2}$$

となり、これは常に式 (33) よりも小さい。 Lf^- 不安定性の成長率も以下のように補正を受ける。

$$\delta_{\max} = \frac{\eta\omega_p}{\sqrt{2}g v_A (g^2 - v_s^2)^{1/2}} \quad (44)$$

さらに、アルフヴェンビート不安定性に関しては

$$\delta_{\max} = \frac{\eta^3 \omega_p^2}{2v_A^3} \left[\frac{\omega_p^2 - 2\Omega_0^2(g^2 - v_s^2)}{(g^2 - v_s^2)^3 (g^2 - v_s^2 - 2\omega_p^2)^3} \right]^{1/2} \quad (45)$$

となる。ところが式 (45) は $g = 1$ としても式 (35) には一致しない。これは η^4 の項を無視したためで、したがって不安定性の条件も i) $v_s^2 > g^2$ または ii) $0 < g^2 - v_s^2 < 2\omega_p^2 < 4\Omega_0^2(g^2 - v_s^2)$ となる。Fig.4において式 (42) と式 (32) の数値解を比較した。図中のラベル Lb^- 、 Lf^- 、 AD 、は Lb^- 、 Lf^- 、acoustic 崩壊不安定性を、また AB はアルフヴェンビート不安定性を表す。Fig.4(b) ($\omega_p = 0.5, v_s = 1.05$)、(d) ($\omega_p = 1.0, v_s = 1.05$) では、上述のように相対論的 (実線)、および非相対論的 (破線) な場合でアルフヴェンビート不安定性の成長率に大きな違いがあることが分かる。Fig.4(a) ($\omega_p = 0.5, v_s = 0.2$) では、 Lb^- および Lf^- 不安定性が相対論的效果によって抑制されている。acoustic 崩壊不安定性の成長率も減少しているが縦軸が対数スケールであるため分かりにくくなっている。Fig.4(c) ($\omega_p = 1.0, v_s = 0.2$) において acoustic 崩壊不安定性および Lf^- 不安定性の成長率は共に減少している。ここでもアルフヴェンビート不安定性に関しては成長率が増加している (対数スケールのため顕著ではない) がこれは式 (42) で η^4 の項を無視したためである。

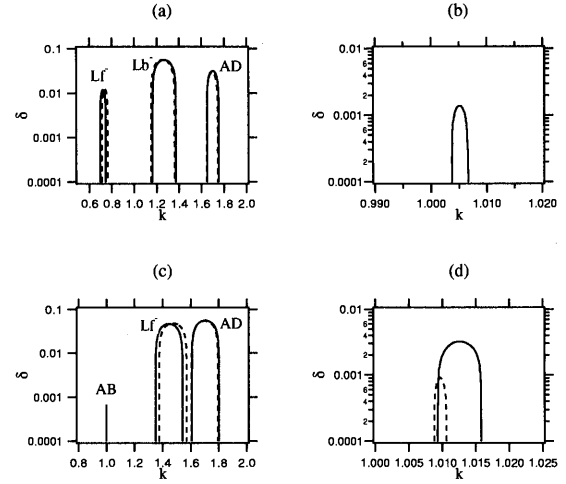


Fig. 4 Comparison between the relativistic and non-relativistic instability growth rates. The solid and the dashed lines are evaluated from eqs.(42) (relativistic) and (32) (non-relativistic), respectively. The parameters used are $\eta = 0.2$, $\Omega_0 = 4.0$, and (a) $\omega_p = 0.5, v_s = 0.2$, (b) $\omega_p = 0.5, v_s = 1.2$, (c) $\omega_p = 1.0, v_s = 1.05$, (d) $\omega_p = 1.0, v_s = 1.05$.

3. 結 言

本論文では、電子-陽電子プラズマにおける円偏波のアルフヴェン波のパラメトリック不安定性についてその線形分散関係式を議論した。各不安定性の最大成長率を解析的に見積もり、幾つかのパラメータに対して分散関係式の数値解を示した。

電子-陽電子プラズマでは、 $2\omega_p^2 < (\Omega_0 + 1)^2$ において空間電荷をきちんと考慮する必要がある。このとき、新たに Lf^- 不安定性が現われるが、 $1 \ll 2\omega_p^2 < (\Omega_0 + 1)^2$ の場合分散効果が本質的となる可能性がある。 $2\omega_p^2 < 1$ となると、さらに Lb^- 不安定性が現われる。

$v_s^2 > 1$ のとき、 ω_p^2 の値によらずアルフヴェンビート不安定性だけが可能であるが、その最大成長率は小さい。 $v_s^2 < 1$ のときは広いパラメータ領域で acoustic 崩壊不安定性が支配的であるが、 $2\omega_p^2 < 1$ においては Lb^- 不安定性が acoustic 崩壊不安定性と同程度の最大成長率を持つ。

ここではプラズマの運動論的效果を無視しているが、実際に $v_s^2 > 1$ においてはランダウ減衰によりアルフヴェンビート不安定性の成長率はさらに低くなると考えられる。 $v_s^2 < 1$ の場合でも、acoustic 崩壊不安定性については $v_{th} \sim v_s$ (v_{th} はプラズマの熱速度) であるためやはりランダウ減衰が無視できない。結果として、 $2\omega_p^2 < 1$ では相対的に Lb^- 不安定性が広いパラメータ領域で優勢となる可能性がある。

弱い相対論的效果は、粒子の質量増加に伴う音速およびプラズマ周波数の減少、さらに実効的な振幅の効果 (波動に対する粒子の応答) を抑制する働きがある。結果と

して、acoustic 崩壊不安定性の成長率は $v_s > 1/3$ で増加し、 $v_s < 1/3$ で減少する。また、 Lb^- および Lf^- 不安定性は相対論的効果によって抑制されることが分かった。アルフヴェンビート不安定性に関しては、 $\omega_p^2 \rightarrow \infty$ の極限では成長率が増加するが、空間電荷を考慮した場合には η^4 の項まで考慮して成長率を見積もる必要がある。式 (36) ではこれを無視しているため結果は式 (28) と大きく異なる。また振幅が更に大きくなると、サイクロトロン周波数が減少する効果が重要になるはずであり、今後強い相対論的効果を考慮に入れた解析が必要である。

参考文献

- 1) S. Spangler, S. Fuselier, A. Fey and G. Anderson, J. Geophys. Res. **93** 845 (1988).
- 2) S. R. Spangler, J. A. Leckband and I. H. Cairns, Phys. Plasmas **4** 846 (1997).
- 3) A. A. Galeev and V. N. Oraevskii, Sov. Phys. Dokl. **7** 988 (1963).
- 4) R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, W. A. Benjamin, Inc. (1969).
- 5) M. L. Goldstein, Astrophys. J. **219** 700 (1978).
- 6) N. F. Derby, Jr., Astrophys. J. **224** 1013 (1978).
- 7) J. I. Sakai and B. U. O. Sonnerup, J. Geophys. Res. **88** 9069 (1983).
- 8) M. Longtin and B. U. O. Sonnerup, J. Geophys. Res. **91** 6816 (1986).
- 9) H. K. Wong and M. L. Goldstein, J. Geophys. Res. **91** 5617 (1986).
- 10) T. Terasawa, M. Hoshino, J. I. Sakai, and T. Hada, J. Geophys. Res. **91** 4171 (1986).
- 11) V. Jayanti and J. V. Hollweg, J. Geophys. Res. **98** 19049 (1993).
- 12) J. V. Hollweg, J. Geophys. Res. **99** 23431 (1994).
- 13) V. Munoz and L. Gomberoff, Phys. Rev. E **57** 994 (1998).