

## 断面積一定の水平管内において上下に分離された静止気体中を伝播する複合音波

与那嶺, 牧子

九州大学大学院総合理工学研究科環境エネルギー工学専攻

宮里, 義昭

九州大学大学院総合理工学研究科環境エネルギー工学専攻

益田, 光治

九州大学大学院総合理工学研究科環境エネルギー工学専攻

松尾, 一泰

九州大学大学院総合理工学研究科環境エネルギー工学専攻

<https://doi.org/10.15017/16641>

---

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 23 (3), pp.291-294, 2001-12. 九州大学大学院総合理工学府

バージョン：

権利関係：

# 断面積一定の水平管内において上下に 分離された静止気体中を伝播する複合音波

与那嶺 牧子\*1・宮里 義昭\*2・益田 光治\*2・松尾 一泰\*2

(平成13年10月29日 受理)

## Compound Sound Waves Propagating through a Stratified Two-Unmixed Still Gas in a Horizontal Constant Area Straight Duct

Makiko YONAMINE, Yoshiaki MIYAZATO,  
Mitsuharu MASUDA and Kazuyasu MATSUO

†E-mail of corresponding author: [yonamine@ence.kyushu-u.ac.jp](mailto:yonamine@ence.kyushu-u.ac.jp)

A wave equation for the compound sound wave propagating through a stratified two-unmixed still gas in a horizontal constant area duct is derived employing the equations for mass and motion and isentropic relationship. It is found that the expression for the propagation speed of the compound sound wave is identical to that derived from the method of the control volume by considering a stationary compound sound wave front. The present analytical result shows that the concept of the compound sound wave presented by Bernstein et.al. is appropriate.

**Key words** : *Compound Sound Wave, Compound Choking, Compressible Flow*

### 1. まえがき

単一の作動気体先細ノズルを通過して背圧まで膨張する場合のチョークについては一次元的取扱いが確立されており、チョークしたときのノズル出口マッハ数は1となることはよく知られている<sup>1)</sup>。一方、速度の異なる二つの流れが先細ノズルに平行に流入し、背圧まで膨張する場合においても、二つの流れの貯気圧を一定にし、背圧をある圧力まで下げるとチョークする。このような流れのチョークは複合チョークと呼ばれ<sup>2)</sup>、超音速エジェクタ<sup>3)</sup>やスクラムジェットエンジン<sup>4)</sup>などにおいて起こることが報告されている。

複合チョークに関する研究はこれまでにいくつか報告されており、単一の作動気体によるチョークとは異なる特徴を示すことが明らかになっている。例えば二つの亜音速流れが先細ノズルに流入する流れにおいて、背圧を減少させ流れをノズル出口でチョークさせると、ノズル出口において高速流れのマッハ数は1より大きく、低速流れのマッハ数は1より小さい<sup>2),5),6)</sup>。よって、流れはチョークしているにもかかわらず、その下流の圧力変動はこの低速流れの亜音速領域を伝わり上流に及ぶことが考えられる。Bernsteinらはこの矛盾を回避するため複合音波の概念を導入し、複合チョークが起

こった場合でも単一流れの場合と同様に背圧の影響は上流に及ばないことを理論的に示した<sup>2)</sup>。しかし複合音波については現在でもわかっていない点が多く、実験的な検証も全くなく、また理論的な概念も不十分であるように思われる。

本論文では、水平に置かれた断面積一定の管内の上部に密度が小さい気体、下部に密度が大きい気体が満たされており、その2層気体中を伝播する複合音波について波動方程式を導出し、波動方程式が示す音波の伝播速度がBernsteinらによって導かれた複合音波の伝播速度と一致することを示す。

### 2. Bernsteinら<sup>2)</sup>による複合音波の解析

Fig.1(a)に示すように、断面積一定の水平管内において、圧力 $p_1$ は等しいが比熱比 $\gamma$ と密度 $\rho$ の異なる完全気体が上部( $\gamma_1, \rho_1$ )と下部( $\gamma_2, \rho_2$ )で二つに分離している静止気体中を微小振幅の波が速度 $c$ で右方向に伝播する流れ場を考える。この複合音波は上部と下部をそれぞれ同じ絶対速度 $c$ で右に伝播し、その波の通過によって上部と下部の密度が $\rho_1 + \delta\rho_1, \rho_2 + \delta\rho_2$ 、断面積が $A_1 + \delta A_1, A_2 + \delta A_2$ に微小変化したと仮定する。ただし、波の通過後の上部と下部の圧力は $p_1 + \delta p_1$ で、断面にわたって一

\*1 環境エネルギー工学専攻修士課程

\*2 環境エネルギー工学専攻

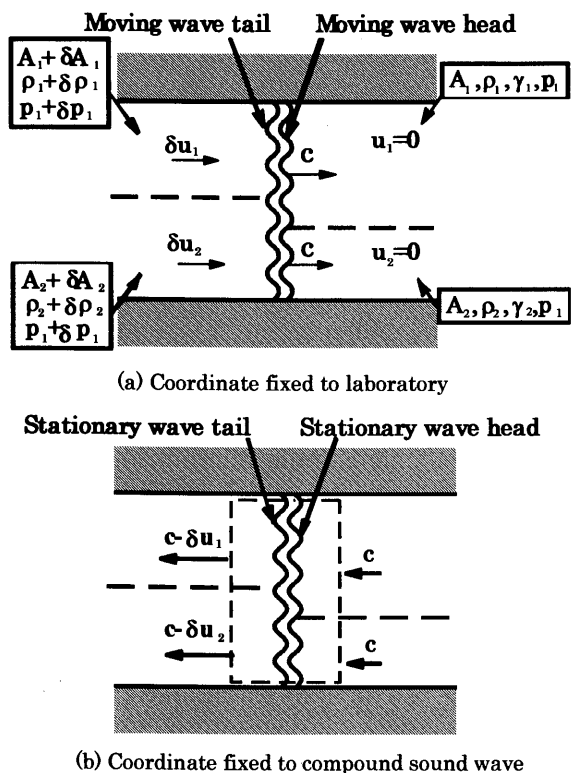


Fig.1 Compound sound wave propagating through a stratified two-unmixed still gas

定と仮定する。また複合音波の通過前と通過後で二つの気体は混合せず、上部と下部の間の界面や壁面の摩擦は無視する。さらに複合音波通過後の上部と下部の圧力上昇 $\delta p_1$ と誘起速度 $\delta u_1$ と $\delta u_2$ および断面積変化 $\delta A_1$ と $\delta A_2$ は微小で、流れは等エントロピー変化と仮定する。まず、上部の流れについて考える。Fig.1(b)の破線で示すように複合音波を固定した座標系を考え、検査体積を複合音波の波頭と波尾を含むように十分大きくとると質量保存則より

$$(\rho_1 + \delta\rho_1)(c - \delta u_1)(A_1 + \delta A_1) = \rho_1 c A_1 \quad \dots (1)$$

また、運動量保存則より

$$\begin{aligned} &(\rho_1 + \delta\rho_1)(c - \delta u_1)^2 (A_1 + \delta A_1) - \rho_1 c^2 A_1 \\ &= \rho_1 A_1 + (\rho_1 + \frac{\delta\rho_1}{2})\delta A_1 - (\rho_1 + \delta\rho_1)(A_1 + \delta A_1) \end{aligned} \quad \dots (2)$$

等エントロピー流れの仮定より

$$\frac{\delta p_1}{\rho_1} = \gamma_1 \frac{p_1}{\rho_1} \quad \dots (3)$$

式(1)の二次以上の微小項を省略すると

$$\delta u_1 = c \left( \frac{\delta A_1}{A_1} + \frac{\delta p_1}{\rho_1} \right)$$

上式と式(3)より

$$\delta u_1 = c \left( \frac{\delta A_1}{A_1} + \frac{\delta p_1}{\gamma_1 p_1} \right) \quad \dots (4)$$

式(2)も、二次以上の微小項を省略すると

$$\delta u_1 = \frac{\delta p_1}{c\rho_1} = \frac{R_1 T_1 \delta p_1}{c p_1} = \frac{a_1^2 \delta p_1}{c \gamma_1 p_1} \quad \dots (5)$$

ただし、 $R_1$ 、 $T_1$ および $a_1$ は気体1の気体定数、静温度、音速を表し、 $a_1 = (\gamma_1 p_1 / \rho_1)^{1/2}$ である。

式(4)と式(5)から $\delta u_1$ を消去し、面積の項について解くと

$$\frac{\delta A_1}{A_1} = \left\{ \left( \frac{a_1}{c} \right)^2 - 1 \right\} \frac{\delta p_1}{\gamma_1 p_1} \quad \dots (6)$$

下部の流れについても同様にして

$$\frac{\delta A_2}{A_2} = \left\{ \left( \frac{a_2}{c} \right)^2 - 1 \right\} \frac{\delta p_1}{\gamma_2 p_1} \quad \dots (7)$$

ここで仮定より

$$\sum_{i=1}^2 \delta A_i = \delta A = 0 \quad \dots (8)$$

式(6)と式(7)を式(8)に代入し

$$\frac{A_1}{\gamma_1} \left\{ \left( \frac{a_1}{c} \right)^2 - 1 \right\} + \frac{A_2}{\gamma_2} \left\{ \left( \frac{a_2}{c} \right)^2 - 1 \right\} = 0 \quad \dots (9)$$

cについて解くと

$$c = \sqrt{\frac{A_1 \gamma_2 a_1^2 + A_2 \gamma_1 a_2^2}{A_1 \gamma_2 + A_2 \gamma_1}} \quad \dots (10)$$

上式はBernsteinら<sup>2)</sup>が導いた複合音波の伝播速度に対する一般式をFig.1の場合に適用した式である。上式より、 $A_1=0$ のとき $c=a_2$ 、 $A_2=0$ のとき $c=a_1$ を満足し、音波はそれぞれの単一の気体中をその気体の音速で伝播する。また、 $A_1$ と $A_2$ がいずれも0でないときのcは二つの層の断面積の大きさ $A_1$ 、 $A_2$ の影響を受ける。

### 3. 複合音波の波動方程式

2章の場合と同様に、圧力 $p_1$ は等しく比熱比 $\gamma$ と密度 $\rho$ の異なる完全気体が二つに分離している静止気体中を複合音波が速度cで右方向に伝播する流れ場を考える。ここでも複合音波の通過によって密度と断面積は、上部・下部それぞれ $\rho_1 + \delta\rho_1$ 、 $\rho_2 + \delta\rho_2$ 、 $A_1 + \delta A_1$ 、 $A_2 + \delta A_2$ に微小変化したと仮定し、他の仮定も2章の場合と同様である。Fig.2はFig.1(a)の波面の部分を横方向に拡大した図で、波頭の右側は静止気体、波尾の左側は複合音波通過後の状態を示している。すなわち、上部気体の流速は最初 $u_1=0$ で、複合音波の通過により $\delta u_1$ となる。 $\delta u_1$ は場所にも時間にも依存しない一定値である。複合音波内部の流速は $\delta u_1$ で、これは場所 $x$ と時間 $t$ の関数である。同様に $\delta u_2$ も $x$ と $t$ の関数である。複合音波内部の上部の流れについて考えると運動

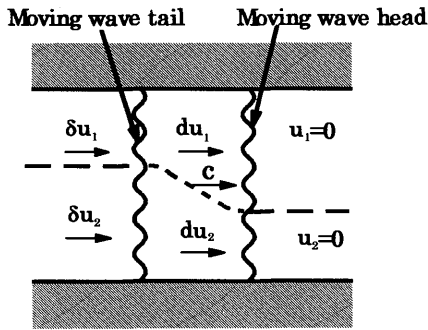


Fig.2 Enlarged view of Fig.1(a)

方程式, 連続の式, 等エントロピーの式はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial t}(du_1) + (du_1) \frac{\partial}{\partial x}(du_1) + \frac{1}{(\rho_1 + d\rho_1)} \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 + d\rho_1) = 0 \quad \dots(11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{(\rho_1 + d\rho_1)(A_1 + dA_1)\} + \frac{\partial}{\partial x}\{(\rho_1 + d\rho_1)(A_1 + dA_1)du_1\} = 0 \quad \dots(12)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_1^\gamma} = \text{const} \quad \dots(13)$$

複合音波の伝播による状態量の変化は微小なので式

(11)の二次以上の微小項を無視し, さらに  $\partial p_1 / \partial x = 0$

であることを考慮すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(du_1) + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x}(d\rho_1) = 0 \quad \dots(14)$$

Fig.2 の複合音波内部の下部の流れについても同様に

$$\frac{\partial}{\partial t}(du_2) + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x}(d\rho_2) = 0 \quad \dots(15)$$

$\partial p_1 / \partial x = 0$  と  $\partial p_2 / \partial x = 0$  の関係を用いると,  $\partial(d\rho_1) / \partial x$  は次のように変形される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(d\rho_1) &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 + d\rho_1) \\ &= \frac{\partial(\rho_1 + d\rho_1)}{\partial(\rho_1 + d\rho_1)} \frac{\partial(\rho_1 + d\rho_1)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial(\rho_1 + d\rho_1)}{\partial(\rho_2 + d\rho_2)} \frac{\partial(\rho_2 + d\rho_2)}{\partial x} \\ &= a_1^2 \frac{\partial(d\rho_1)}{\partial x} = a_2^2 \frac{\partial(d\rho_2)}{\partial x} \end{aligned} \quad \dots(16)$$

式(16)より

$$\frac{\partial(d\rho_2)}{\partial x} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \frac{\partial(d\rho_1)}{\partial x} \quad \dots(17)$$

式(14)と式(15)を式(16)と式(17)を用いて変形し, 整理するとそれぞれ

$$\frac{\partial(d\rho_1)}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{a_1^2} \frac{\partial(du_1)}{\partial t} \quad \dots(18)$$

$$\frac{\partial(du_2)}{\partial t} = -\frac{a_1^2}{\rho_2} \frac{\partial(d\rho_1)}{\partial x} \quad \dots(19)$$

式(18)と式(19)より以下の式が導かれる.

$$du_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} du_1 \quad \dots(20)$$

また, 式(12)は  $\partial(\rho_1 A_1) / \partial t = 0$  を考慮して整理し,  $x$  で偏微分すると

$$\frac{\partial^2(dA_1)}{\partial t \partial x} + \frac{A_1}{\rho_1} \frac{\partial^2(d\rho_1)}{\partial t \partial x} + A_1 \frac{\partial^2(du_1)}{\partial x^2} = 0 \quad \dots(21)$$

下部についても同様に

$$\frac{\partial^2(dA_2)}{\partial t \partial x} + \frac{A_2}{\rho_2} \frac{\partial^2(d\rho_2)}{\partial t \partial x} + A_2 \frac{\partial^2(du_2)}{\partial x^2} = 0 \quad \dots(22)$$

式(21)と式(22)から式(17)~(20)を用いて  $d\rho$ の項を消去するとそれぞれ

$$\frac{\partial^2(dA_1)}{\partial t \partial x} - \frac{A_1}{a_1^2} \frac{\partial^2(du_1)}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial^2(du_1)}{\partial x^2} = 0 \quad \dots(23)$$

$$\frac{\partial^2(dA_2)}{\partial t \partial x} - \frac{A_2 \rho_1}{a_2^2 \rho_2} \frac{\partial^2(du_1)}{\partial t^2} + A_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial^2(du_1)}{\partial x^2} = 0 \quad \dots(24)$$

式(23)と式(24)を辺々加えると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}(dA_1 + dA_2) - \frac{\partial^2(du_1)}{\partial t^2} \left( \frac{A_1}{a_1^2} + \frac{A_2 \rho_1}{a_2^2 \rho_2} \right) \\ + \frac{\partial^2(du_1)}{\partial x^2} \left( A_1 + A_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad \dots(25)$$

仮定より

$$\sum_{i=1}^n dA_i = dA = 0$$

従って

$$\frac{\partial^2(du_1)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2(du_1)}{\partial x^2} = 0 \quad \dots(26)$$

ただし

$$c = \sqrt{\frac{A_1 + A_2 \frac{\rho_1}{\rho_2}}{a_1^2 + \frac{A_2 \rho_1}{a_2^2 \rho_2}}} \quad \dots(27)$$

式(26)は複合音波についての波動方程式となっており  
複合音波は式(27)で示す速度  $c$  で伝播する。

完全気体の仮定より

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1/R_1T_1}{p_1/R_2T_2} = \frac{\gamma_1 a_2^2}{\gamma_2 a_1^2} \quad \dots (28)$$

上式の  $\rho_1/\rho_2$  を式(27)に代入すると

$$c = \sqrt{\frac{A_1 \gamma_2 a_1^2 + A_2 \gamma_1 a_2^2}{A_1 \gamma_2 + A_2 \gamma_1}} \quad \dots (29)$$

となり, Bernstein らが導いた複合音波の速度の式(10)  
と一致する。以上の結果より, Bernstein らの提案し  
た複合音波の概念は妥当であると結論される。

#### 4. あとがき

断面積一定の水平管内において密度の異なる気体が  
上下に分離された静止気体中を伝播する複合音波につ

いての波動方程式を導出し, Bernstein らの複合音波の  
概念が妥当であることを示した。しかし, 実際の流れ  
において複合音波がどのように伝播するか実験的な検  
証は全くなく, 今後の課題である。

#### 参考文献

- 1) 松尾 一泰: "圧縮性流体力学", 理工学社 (1994)p65.
- 2) Bernstein, A., Heiser, W.H. and Hevenor, C., Trans. ASME, J. Applied Mechanics, 34-4, 548 (1967).
- 3) Hoge, H.J. and Segars, R.A., AIAA J., 3-12, 2177 (1965).
- 4) 佐藤 哲也, 梶 昭次郎, 日本航空宇宙学会誌, 41-476, 515 (1993).
- 5) 片野田 洋, 権 眞卿, 権 純範, 宮里 義昭, 益田 光治, 松尾 一泰, 九州大学大学院総合理工学報告, 22-1, 29 (2000).
- 6) Miyazato, Y., Kwon, J.K., Yonamine, M., Katanoda, H., Masuda, M., and Matsuo, K., Proc. 6<sup>th</sup> Asian Symposium, 188(2001).