

A study on relations among finite multiple zeta values

村原, 英樹

<https://doi.org/10.15017/1654672>

出版情報 : 九州大学, 2015, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名	村原 英樹			
論 文 名	A study on relations among finite multiple zeta values (有限多重ゼータ値の関係式に関する研究)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	金子昌信
	副 査	首都大学東京	教授	津村博文
	副 査	東北大学	教授	大野泰生
	副 査	大阪大学	准教授	井原健太郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文では、多重ゼータ値の二種類の有限類似について、その満たすいくつかの関係式が証明されている。

多重ゼータ値とはリーマンゼータ関数の正の整数点での値を多重級数に一般化したある実数であり、その研究はオイラーにさかのぼるが、数学や物理学の様々な分野との関係が注目され活発に研究されたのはこの 20 年ほどのことである。とくに、異なるインデックスを持つ多重ゼータ値の間の代数関係式や線型関係式のありようが、様々な数学的、物理学的対象の構造を反映していることが徐々に明らかになっており、多重ゼータ値の関係式を発見、証明することは多重ゼータ値研究の一つの重要な側面である。

さて、特定の素数 p に対し、多重ゼータ値を定義する級数を p が分母に現れる直前で打ち切った有限和（有理数）を法 p で考え、それが例えばバルヌーイ数などの数論的に興味深い対象と合同になる、といった研究がホフマンなどにより 10 年位前からなされていた。数年前ザギエは、これを、有限個の違いを無視しつつ全ての素数で一斉に考えるような優れた枠組みを提唱し、古典的な場合の予想に対応するような「次元予想」を提出した。この枠組み（ある環）における多重ゼータ値の類似物が、本論文で「 \mathcal{A} -有限多重ゼータ値」と呼ばれているものである。さらに金子とザギエは、その \mathcal{A} -有限多重ゼータ値の、実数世界に再び戻った類似物である「対称多重ゼータ値」を定義した。これは、多重ゼータ値のある積和で定義される実数であるが、それらを、実数そのものではなく、多重ゼータ値のなす有理数体上の代数を円周率の自乗で生成される単項イデアル（もしくはリーマンゼータの 2 での値で生成されるイデアルと言ってもよい）で割った商環において考える。このとき驚くべきことに、 \mathcal{A} -有限多重ゼータ値のなす代数とこの商代数の間に、同じインデックスをもつ \mathcal{A} -有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値がしっかり対応するような同型対応が成り立つ、という予想を金子-Zagier は提出した。これは上述の次元予想をはるかに精密化したものと見なせる。この予想は、有限多重ゼータ値（本論文では \mathcal{A} -有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値を総称して「有限多重ゼータ値」と呼んでいる）の研究が、古典的な場合の研究と同様に重要なものである、ということを強く示唆する。

本論文ではこの有限多重ゼータ値について、まず対称多重ゼータ値に対する「対称和公式」、「和公式」、「高さ 1 の双対定理」と呼ばれる関係式群を証明する。これらは \mathcal{A} -有限多重ゼータ値に対する同様の関係式群がホフマン、斎藤-若林によって証明されていたものを、上述の予想を踏まえ対称多重ゼータ値に対して証明したものであり、予想の確からしさを裏付けるものとなっている。三つのうち対称和公式および和公式の証明は \mathcal{A} -版の場合と全く並行して、もしくはほぼ同様に進むが、高さ 1 の双対定理については全く異なるアイデアが用いられている。それは、古典的な場合の多重ゼータ値および等号付き多重ゼータ値と呼ばれるものの、高さ 1 の場合の値の母関数の結果（青本、ドリンプ

ェルト, 金子-大野らによる) を巧みに用いるもので, 興味深いものである. さらに著者は, \mathcal{A} -版, 対称版双方の有限多重ゼータ値の「導分関係式」を一般的に証明した. ここでも双方で全く同じ関係式が成立しており, 予想と整合する. 古典的な導分関係式は, いわゆる「正規化複シャッフル関係式」や「大野関係式」と密接に関係する広いクラスの関係式である. その有限類似は, 本学修士学生の小山宏次郎が予想し特別な場合に証明を与えていたのであったが, 今回それを完全に一般的に証明したものである. 著者は小山の予想式を見かけ上はるかに一般化したもの (しかし実はもとの式と同値) を, 巧妙な帰納法により証明した. そこでは, 有限多重ゼータ値の, 余り知られていない形での双対性が用いられる. 同値ではありながら帰納法はこの一般化により初めて機能するので, よいアイデアであったと言える. また同様のアイデアが本来の導分関係式にも適用出来ることを見抜き, 「川島関係式」を援用した別証明を与えており興味深い.

以上の研究成果のうち, 対称多重ゼータ値の三つの関係式群については既に英文学術雑誌に公表済みであり, 導分関係式については別の英文学術雑誌に現在投稿中である. これらの研究結果は整数論, とくに多重ゼータ値の分野において価値あるすぐれた業績と認められる. よって本研究者は博士 (数理学) の学位を授与される資格があるものと認める.