

A study on relations among finite multiple zeta values

村原, 英樹

<https://doi.org/10.15017/1654672>

出版情報 : 九州大学, 2015, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名 : 村原 英 樹

論 文 名 : A study on relations among finite multiple zeta values
(有限多重ゼータ値の関係式に関する研究)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

本稿において、著者は A-有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値 (有限実多重ゼータ値) という、2 種類の有限多重ゼータ値の関係式に関する研究を行った。

多重ゼータ値とはリーマンゼータ関数の正の整数点での値の一般化で、ある多重級数で定義される実数値のことである。多重ゼータ値に関する研究は、18 世紀の C. Goldbach や L. Euler によるものが最初であり、そこでは深さが 2 の場合について調べられた。その後しばらくの間、多重ゼータ値が熱心に研究されることはなかったが、1990 年代の初頭に D. Zagier 氏や M. Hoffman 氏によって一般の深さの場合における研究がなされたのをきっかけに、今日に至るまで、活発な研究がなされるようになった。この多重ゼータ値に関しては、近年の研究によって、整数論のみならず、結び目理論や共形場理論、そして量子物理などの様々な他の分野とも関連性があることが知られている。

ところで、ここ数年においては多重ゼータ値と同様に、その類似物である A-有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値という 2 種類の有限多重ゼータ値についても様々な研究が行われている。多重ゼータ値が多重級数で与えられることは上述したが、A-有限多重ゼータ値とは、その多重級数を途中で打ち切って得られる有限和に関連する値である。もう少し詳しく述べると、A-有限多重ゼータ値とは各素数 p ごとに与えられるこの有限和を、法 p で考えたものすべての直積を直和を法として考えたものである。このような枠組みは、Zagier 氏によって考えられた。また対称多重ゼータ値は、2013 年頃、金子昌信氏と Zagier 氏によって得られた概念で、上述の多重ゼータ値と A-有限多重ゼータ値をつなぐ役割を担うと予想されるものであり、多重ゼータ値のある積和で定義される実数を π^2 を法として考えたものである。

さて、このような 2 種類の有限多重ゼータ値に対して、A-有限多重ゼータ値で張られる有理数体 \mathbb{Q} 上のベクトル空間 (または、そこに調和積と呼ばれる積構造を入れた \mathbb{Q} -代数) と対称多重ゼータ値で張られる有理数体 \mathbb{Q} 上のベクトル空間 (または、そこに積構造を入れた \mathbb{Q} -代数) が同型になるという予想が、金子昌信氏と Zagier 氏によって立てられている。この予想によれば、A-有限多重ゼータ値の関係式と対称多重ゼータ値の関係式が、同じ形で与えられることも予想される。

著者はこのことと、以前から A-有限多重ゼータ値の関係式として知られていた「対称和公式」、「和公式」、「高さ 1 における双対定理」に着目し、対称多重ゼータ値の関係式としての「対称和公式」、「和公式」、「高さ 1 における双対定理」を証明した。

また著者は、A-有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値の導分関係式を証明した。これは、従来多重ゼータ値で知られていた、重要な関係式のクラスの 1 つである導分関係式の類似物であり、ここで得られた証明方法を応用して、本来の導分関係式の別証明も与えた。