

## ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化とKernel-basedパターン構造解析を用いた行動選択への応用

高木, 昇  
九州産業大学商学部 : 准教授 : 複雑系, 学習理論

時永, 祥三  
九州大学大学院経済学研究院経済工学部門 : 教授

<https://doi.org/10.15017/15770>

---

出版情報 : 経済学研究. 74 (5/6), pp.97-115, 2008-04-30. 九州大学経済学会  
バージョン :  
権利関係 :

# ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の 最適化と Kernel-based パターン構造解析を 用いた行動選択への応用

高 木 昇  
時 永 祥 三

## 1 まえがき

近年, 情報技術や通信技術の高度化にともない, 信号処理の分野においても定常的な信号に加えてジャンプ状の急激な変動を考慮したシステム記述とモデル化が追及されている [1]-[4]。同時に, さまざまな変動要因を含む最適化問題を確率的動的計画法などを用いて解き, システムの運用を評価する方法も検討され [5]-[8], 更に, ジャンプ過程を変動要因として含む場合への拡張がなされている [9]-[12]。本論文では, ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と Kernel-based パターン構造解析を用いた行動選択への応用を示す [13]。

これまでシステムの最適化問題においては, 変動要因を定常的なブラウン運動でモデル化することが行われたきたが [14], 最近, ジャンプ状の変化を行う過程 (以下ではジャンプ過程と呼ぶ) を変動要因として含む問題が考察され, 地震波の解析や CDMA 設計, 目標追尾などの信号処理分野への応用がなされ [1]-[4], さらに価格にこのような変動を組み入れた資産運用や発電設備の運用最適化などが提案されている [5]-[10]。しかしながら, これらの研究の多くでは, ジャンプ過程のモデルとしてはマルコフ過程など瞬間的な変動が対象であり, 電力価格や商品価格などのように, 上昇のあとに元のレベルに戻るまで時間経過を含むような一般化されたものではない。これに対して, Thompsonらの研究では, ジャンプ過程を状態依存にすることで一般化しているが, 最適化問題を単独で解析するにとどめており, 意思決定問題などへと拡張することはなされていない [9]。すなわち, 繰り返し行われる製品製造や通信においては, 単独の解析だけではなく個別の解析を集約して, パターンに応じて最適な行動選択を提供する仕組みとしてパターン指向 (pattern-directed) の行動選択が必要である。このような理由により本論文では, ジャンプ過程を変動要因として含む最適化問題の解法と Kernel-based パターン構造解析による行動選択への応用を示す [11]-[13]。このことにより, 価格がジャンプ変動を含む最適化問題に対する解を容易に選択することが可能となり, 損失を回避することができる。

本論文ではまず, ジャンプ過程を含む変動要因で記述される評価関数の最適化問題をモデル化するが, この場合, 変動要因のパラメータが状態に依存するように一般化されていることを仮定する。次に, 分かりやすい例として製品の製造販売をとりあげ, 利益を最大化する最適化問題の定式化を行い, 確率的動的計画法の手法を用いることにより状態変数に対する偏微分方程式を用いた解析が可能となることを示す。このような最適化問題の解析手法を準備したのちに, 種々の条件のもとで

の行動選択のための Kernel-based 手法によるパターン構造解析を適用する。具体手的には、最適化問題を記述する外部条件を変化させ、この条件とこのときに最適化の結果として得られる解とを組み合わせて、さまざまな状況のもとでの行動選択のためのデータを収集する。この場合、得られた評価関数の値と決定変数ベクトルの値を用いてサンプルをカテゴリ化し、外的基準として用いる。判別分析の手法として、Kernel-based 統計による方法を用い、入力変数に対する非線形変換関数を適用し、やや高次元の線形判別関数を用いた問題へと帰着させ、分析の精度を向上させる。応用例として、シミュレーションにより本論文の手法による行動決定の有効性を議論する。

以下では、2. においてはジャンプ過程を変動要因として含む評価関数の最適化問題のモデル化について述べる。3. では Kernel-based 手法による判別関数の推定について示し、4. においては応用例について述べる。

## 2 ジャンプ過程を含む変数の評価関数と最適化

### 2.1 ジャンプ過程と評価関数

不確実な変動要因で記述される評価関数とその最適化のモデルには、さまざまなものが考えられるが、本論文では分かりやすい事例として、部品を調達して製品を製造販売するケースをモデルとして仮定する。なお、以下で述べるモデルは資源投入と製造販売の基本的なモデルであり、この分野以外に拡張することは難しくはない。

いま、製品製造を行う企業（メーカー）が存在し、メーカーは部品（簡単のため1種類とする）を調達して製品として製造し販売するケースを考える。製造販売は期間  $t = 1, 2, \dots, T$  にわたって行われると仮定する。市場の商品価格と部品の価格が急変するモデルを仮定する。

メーカーは需要にみあった生産をするが、価格が変動すると仮定しているので、これらを変動要因とする評価関数の最適化手法により最適な生産計画を求める。以下のように、記号を定義しておく。すべて時刻  $t$  における値である。

製品製造の部品の単価:  $f(t)$

市場での製品需要数量:  $D(t)$

市場での製品の販売価格:  $P(t)$

メーカーの製品の製造数量:  $c(t)$

メーカーの在庫数量:  $R(t)$

なお、 $c(t) \leq 0$  となるケースでは商品を製造しないで、直接購入し販売すると仮定しておく。企業の時刻  $t$  における投資の価値を  $V(t)$  としておくと、この値を最大化する問題は、複数の変動過程を含む評価関数の最大化問題として記述することができる [7]-[13]。多くの問題で、変動過程をブラウン運動でモデル化した場合には、その微小変化、および時間の微小変化を用いて、偏微分方程式を導出することができる [14]。原理的にはこの偏微分方程式を解くことにより最適な政策を求めることができる。しかし、本論文ではジャンプ過程を含む要因を変動過程として含むので、このような問題に適したように拡張を行う。

需要  $D(t)$  は、1 次の AR モデルに従うと仮定する。

$$D(t+1) = d_0 + d_1 D(t) + \varepsilon_D(t) \quad (1)$$

ただし,  $d_0, d_1$  は定数であり,  $\varepsilon_D(t)$  は平均がゼロ, 分散が  $\sigma_D^2$  の正規乱数である。製品の製造数量  $c(t)$  は決定変数であるので, これを用いた在庫数量の変分とは次のような関係になる。

$$dR(t) = [c(t) - D(t)]dt \quad (2)$$

また,  $P(t)$  は定常的にはブラウン運動に従って変動すると仮定するが, 消費動向などにより急激に価格が高騰 (あるいは低落) するモデルを用いる [13]。

$$dP(t) = \mu_P(P, t)dt + \sigma_P(P, t)dz_P + \sum_{k=1}^{N_P} \gamma_k(P, t, J_k)dq_k \quad (3)$$

ここで,  $\alpha_i(\cdot), \sigma_i(\cdot)$  は任意の  $P_i(t), t$  に関する関数である。  $dz_P$  はブラウン運動の微分値であり,  $dq_k$  は 0 あるいは 1 をとる変動に従うポアソン過程である。また,  $\gamma_k(P(t), t, J_k)$  は,  $P(t), t$  およびある定められた確率分布から生成される確率変数  $J_k$  の関数である。最後の項が, ジャンプ状の価格変動に対応している。

$$dq_k = \begin{cases} 0, & 1 - \epsilon_k(P, t)dt \quad \text{の確率で;} \\ 1, & \epsilon_k(P, t)dt \quad \text{の確率で} \end{cases} \quad (4)$$

$N_P$  は発生するジャンプの種類数の総数である。なお, ジャンプ過程の生成に関する第 3 項については, 通常はランダムな発生を仮定しているが, もとの価格レベルまでの回復時間が長くかかるなどの現実的な状況を考慮して, ある一定の時間にわたって大きな値をとり続けるケースも許すような設定しておく。

同様に, 部品価格  $f(t)$  も, 急激に変化する事態 (高騰あるいは低落) が発生するモデルを導入する。

$$df = \mu_f(f, t)dt + \sigma_f(f, t)dz_f + \sum_{k=1}^{N_f} \delta_k(f, t, K_k)dr_k \quad (5)$$

$$dr_k = \begin{cases} 0, & 1 - \eta_k(f, t)dt \quad \text{の確率で;} \\ 1, & \eta_k(f, t)dt \quad \text{の確率で} \end{cases} \quad (6)$$

ここで,  $dz_f$  はブラウン運動の微分値であり,  $dr_k$  は,  $dq_k$  と同様にある一定の確率分布に従う, 1 または 0 をとるポアソン過程であり, これにかかっている係数  $\delta_k(f, t, K_k)$  は,  $f(t), t$  およびある定められた確率分布から生成される確率変数  $K_k$  の関数であり, 事故などの事象が発生したときに高騰 (低落) する大きさに対応する。  $N_f$  はジャンプの種類数の総数である。

## 2.2 確率微分と 2 次の偏微分方程式

上に述べたような前提のもとで, 現在の時刻  $t$  から最終の時刻  $T$  までの製品の製造販売による価値は, 次のようになる。

$$V(P, f, c, t, R) = \max_c E \left[ \int_t^T e^{-\rho(t-\tau)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right] \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 F(P, f, c, t, R) = & \\
 & P(t)D(t) - A(c(t), f(t)) - H(R) \\
 & - B([D(t) - c(t) - R(t)]^+)
 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで,  $A(\cdot), H(\cdot), B(\cdot)$  は製品を生産するコストを表す関数, 在庫コスト関数, 在庫切れ (back order) コスト関数である。 $\rho$  は, このような投資問題で設定する定数で, 時間経過とともに価値が減少する割合 (割引率) を示す。この式を2つの時間区間に分けて表現すると, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
 V(P, f, c, t, R) = & \\
 & \max_c E \left[ \int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right. \\
 & \left. + \int_{t+dt}^T e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right]
 \end{aligned} \tag{9}$$

更に変形すると, 次のようなる。

$$\begin{aligned}
 V(P, f, c, t, R) = & \\
 & \max_c E \left[ \int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau + \right. \\
 & \left. e^{-\rho dt} \int_{t+dt}^T e^{-\rho(\tau-(t+dt))} F(P, f, c, t, R) d\tau \right]
 \end{aligned} \tag{10}$$

この第2項は, 評価関数の定義式において時間をずらした表現であるので, この式を, 時間  $t$  の微小変化  $dt$  の間における変分を用いて書き直すと, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
 V = & \max_c E \left[ \int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} F(P, f, c, t, R) d\tau \right. \\
 & \left. + e^{-\rho dt} V(P + dP, f + df, c(t + dt), t + dt, \right. \\
 & \left. R + dR) \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

この式に対して, 多次元変数に対する Ito のレンマを用いて確率変数の2次微分までを求めたあと, 代入を繰り返し, 式(2)~(6)を用いて変形すると, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
 0 = & \max_c [F(P, f, c, t, R) + L(V) + (c - D)V_R] dt \\
 & + \sum_{k=1}^{N_P} E[V_k^{(+,P)} - V] dq_k + \sum_{k=1}^{N_f} E[V_k^{(+,f)} \\
 & - V] dr_k
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 L(V) = & V_t + \frac{1}{2} \sigma_P^2 V_{PP} + \frac{1}{2} \sigma_f^2 V_{ff} + \mu_P V_P \\
 & + \mu_f V_f - \rho V
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$V_k^{(+,P)} = V(P + \gamma_k(P, t, J_k), f, c, t, R) \tag{14}$$

$$V_k^{(+,f)} = V(P, f + \eta_k(f, t, K_k), c, t, R) \tag{15}$$

ただし,  $V_k^{(+,P)}$  ( $V_k^{(+,f)}$ ) は, 価格  $P(f)$  において大きさが  $\gamma_k(\cdot)$  ( $\delta_k(\cdot)$ ) のジャンプが発生した場合の  $V(\cdot)$  の値である。

$dt$  より早く減衰する項目を除去し, 期待値を取り微小量  $dt$  により割ることで, 次の偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \max_c [L(V) + F(P, f, c, t, R) \\ & + (c - D)V_R + \sum_{k=1}^{N_P} \epsilon_k E[V_k^{(+,P)} - V] \\ & + \sum_{k=1}^{N_f} \eta_k E[V_k^{(+,f)} - V]] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

この式の中で, 決定変数  $c$  に関する項だけをまとめると次のようになる。

$$\max_c [(c - D)V_R - A(c(t), f(t))] \quad (17)$$

$$c_{min}(P, f, t, R) \leq c \leq c_{max}(P, f, t, R) \quad (18)$$

このように決定された  $c$  を代入して, 利益  $V(\cdot)$  に関する偏微分方程式を得ると, 式 (16) において  $\max_c$  をはずした, 以下の偏微分方程式になる。

$$\begin{aligned} & L(V) + (c - D)V_R + F(P, f, c, t, R) \\ & + \sum_{k=1}^{N_P} \epsilon_k E[V_k^{(+,P)} - V] \\ & + \sum_{k=1}^{N_f} \delta_k E[V_k^{(+,f)} - V] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

以上のような確率微分方程式を, 境界条件を定めることにより解けば, 価格が決定される。この偏微分方程式の解の終端条件は次のようになる。

$$V(P, f, T; c) = 0 \quad (20)$$

これまでの導出手順を用いると, 変動要因に関する偏微分方程式が得られるので, これを解くことにより評価関数の最適化をを行う決定変数の値およびこのときの評価関数の値を求めることができる。しかしながら, 一般には, 変動要因の数が増加したり係数の形状が複雑になると, 解析的に解を求めることは極めて困難になる。このようなことを考慮して, 以下では, 偏微分方程式を数値的に解く方法として, よく用いられる有限差分による計算法を使用する [11][22]。

なお, 上に示したような確率的動的計画法から偏微分方程式を導出し, これを解いて解を求める方法に対して, ある場合には, 等価な動的計画法による近似解法を適用することができる [15]-[18]。しかし, 本論文で取り扱っているような変数がジャンプ過程を含んでいるケースでは, 等価な表現を得ることは難しい。したがって, 以下では直接偏微分方程式を解く方法を用いている。

### 3 Kernel-based 手法による判別関数の推定

#### 3.1 Kernel-based 手法の原理

以下では、本論文で提案する価格変動などの状況などを与えた場合に、これらをデータとして最適な行動選択を出力する仕組みとして用いる Kernel-based 手法について述べる [19]-[21]。この方法は、入力変数に対する非線形変換関数を適用し、やや高次元の線形判別関数を用いた問題へと帰着させ、判別効率を向上させる方法である。

サンプルの全体を通じて  $k$  番目のサンプルを表す変数ベクトルを  $y_k, k = 1, 2, \dots, M$  とする。Kernel-based 手法においては判別分析の問題は、変数ベクトルの  $M$  個のサンプルから共分散行列  $C$  を計算し、これを用いて固有値問題を解くことに帰着される。いま、判別すべきクラスの数  $N$  とし、それぞれのクラス  $i$  には  $n_i$  個のサンプルがあり、この合計を  $M = \sum_{i=1}^N n_i$  とする。

次のような共分散行列を定義する。

$$C = M^{-1} \sum_{k=1}^M y_k y_k^T \quad (21)$$

いま、変換関数  $\phi(x)$  を用いて入力変数  $x$  を変換する。この場合、変換されたデータ  $\phi(x)$  の次元は、もとの変数の次元より多く設定されており (いわゆる高次元)、これにより、より自由度の高い判別関数の構成が可能となる。

変換されたデータについての共分散行列は、次のようになる。

$$Z = M^{-1} \sum_{k=1}^M \phi(y_k) \cdot \phi(y_k)^T \quad (22)$$

クラス  $i$  の第  $j$  番目のサンプルの入力変数ベクトルを  $x_{ij}$  としておく。すなわち  $y_k = x_{ij}, k = \sum_{l=1}^{i-1} n_l + j, j = 1, 2, \dots, n_i$  とする。この変換後の値である  $\phi(x_{ij})$  のクラスごとの平均値  $\bar{\phi}_i$  を次のように定義し、この平均値に関する共分散行列  $B$  を定義する。

$$\bar{\phi}_i = n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \phi(x_{ij}) \quad (23)$$

$$B = M^{-1} \sum_{i=1}^N n_i \bar{\phi}_i \bar{\phi}_i^T \quad (24)$$

変換されたデータについての共分散行列  $Z$  は、また次のように書くこともできる。

$$Z = M^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \phi(x_{ij}) \cdot \phi(x_{ij})^T \quad (25)$$

なお、この計算の過程で、写像  $\phi(\cdot)$  による計算を簡便化するため dot product という表現を用いる。例えば2次元ベクトル  $(a_1, a_2)$  を3次元  $(a_1^2, \sqrt{2}a_1a_2, a_2^2)$  という2次モーメントへ変換する変換がある。このとき、2つのベクトル  $(a_1^2, \sqrt{2}a_1a_2, a_2^2), (b_1^2, \sqrt{2}b_1b_2, b_2^2)$  の要素の、すべての組み合わせの積和  $\sum_{i_1, i_2, j_1, j_2=1}^2 a_{i_1} a_{i_2} b_{j_1} b_{j_2}$  を計算することを dot product とよぶ。これを  $(a \cdot b)^2 = g(a, b)$

として表現する。また,  $g(a, b) = \exp(-||a - b||/\sigma)$  の形の計算をする場合にはガウシアン Kernel とよぶ。

線形判別関数を構成することにより, いくつかのクラスに分類する問題は, いわゆる Kernel Fisher Discriminant Analysis(KFD) と呼ばれるものであり, 複数のクラスの平均値ができるだけ乖離しており, それぞれのクラスの分散は小さくなるように構成する。この問題は, 次に示す Rayleigh coefficient  $\lambda$  を最大化することに帰着される [19]-[21]。

$$\lambda = \frac{\nu^T B \nu}{\nu^T V \nu} \quad (26)$$

$$\nu = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \phi(x_{ij}) \quad (27)$$

ここで固有ベクトル  $\nu$  は, 写像  $\phi(\cdot)$  により形成される空間の要素の線形結合となることを用いている。 $i$  はクラスを指す添え字であり,  $j$  はクラス  $i$  内のサンプルを示す添え字である。ベクトル  $\alpha$  を, 次のように定義しておく。

$$\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{ij}, \dots, \alpha_{Nn_N}) \quad (28)$$

この問題は, 次に示す固有値問題において最大固有値  $\lambda$  を求める問題と等価である。

$$\lambda \nu^T V \nu = \nu^T B \nu \quad (29)$$

2つのクラス  $p, q$  に関して, 次のような dot product を定義する。

$$(g_{ij})_{pq} = \phi(x_{pi})^T \cdot \phi(x_{qj}) \quad (30)$$

これらを用いて, 次の  $M \times M$  行列  $G$  を定義する。

$$\begin{aligned} G &= (G_{pq}), p, q = 1 \sim N, G_{pq} = (g_{ij})_{pq}, i \\ &= 1 \sim n_p, j = 1 \sim n_q \end{aligned} \quad (31)$$

$G_{pq}$  は  $n_p \times n_q$  行列である。

また, クラス  $l$  ごとに要素が  $1/n_i$  に等しい部分行列  $W_i$  からなる  $M \times M$  ブロック対角行列  $W = (W_i), i = 1 \sim N$  を導入する。これにより, 式 (26) の問題は次のようになる。

$$\lambda = \frac{\alpha^T G W G \alpha}{\alpha^T G G \alpha} \quad (32)$$

$$\nu^T \nu = \alpha^T G \alpha = 1 \quad (33)$$

更に, 正規直交行列  $U$  を導入して行列  $G$  を  $G = U \Gamma U^T$  のように対角化し, この対角行列  $\Gamma$  を用いてベクトル  $\alpha$  の変換を行う。

$$\beta = \Gamma U^T \alpha, U U^T = I \quad (34)$$

この結果, 式 (26)(27) に示す問題は, 次のような固有値問題における最大固有値を求める問題に帰着される。

$$\lambda \beta = U^T W U \beta \quad (35)$$



以上の準備にもとで,KFD アルゴリズムは,次のように整理される。

1. 行列  $Z, W$  を計算する。
2. 固有値分解により行列  $G$  を分解する。
3. 固有ベクトル  $\beta$  と固有値を計算する。
4. 係数  $\alpha$  を用いて固有ベクトル  $\nu$  が得られる。係数  $\alpha_{lk}$  を,  $\sqrt{\alpha^T G \alpha}$  により割り,  $\nu \nu^T = 1$  となるように正規化する。
5. 未知の入力データである変数ベクトル  $z$  を有するサンプルが, どちらのクラスに属するかを, 次の関数により推定する。

$$(\nu^T \cdot \phi(z)) = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \alpha_{lk} k(x_{lk}, z) \quad (36)$$

### 3.2 行動パターン情報の収集と学習

これまで述べた最適化のモデルを用いて, メーカーが行う最適な生産を, 偏微分方程式の解より推定することができる。しかしながら実際には, 将来の価格変動などは既知ではないので, 予想される状況のもとでの望ましい方策を推定するためのデータが必要となる。このため, 状況をさまざまに変化させた場合の最適な解を求め, 適用する行動を選択する(これを行動選択と呼んでおく)ためのデータを整備しておくことは有用である。このような作業を行う場合の問題点として, まずさまざまな状況を発生させることがあり, もう1つはメーカーがとった行動をカテゴリ化すること(すなわち外的基準を与えること)がある。本論文ではこのような行動パターン情報収集と学習を自動化するために, 以下のような方法を用いている。

#### (1) 状況に対応する乱数生成

本論文で用いるモデルでは, 製品や部品の価格を変動要因としている。したがって, これらを生成するパラメータ値を乱数として与えることにより, 状況の変化するサンプルを発生させている。具体的には, 価格変動の基本部分であるブラウン運動のパラメータとジャンプ過程の発生頻度を変えたりすることで, モデルのパラメータを変化させてみる。このようなパラメータを与えた場合の現在の生産の状況を変数ベクトル  $A$  により表現しておく。

#### (2) 行動パターン情報の蓄積

このように, さまざまに与えられた状況(パラメータ)のもとで偏微分方程式を解くことにより, 最適な政策である評価関数の値  $V_0$ (利益に相当する) およびこの場合の決定変数のベクトル  $c(t), t = 1, 2, \dots, T$  が求められる。これらの評価関数の値  $V(P, f, t)$  と決定変数  $c(P, f, t)$  および付随して求められる back order の値  $B(P, f, t)$  と在庫レベル  $R(P, f, t)$  を最初の入力変数ベクトル  $A$  に加えたものを, 行動選択のデータの対として蓄積する。なお後述するが, 最適化の結果である  $V(\cdot)$  および  $c(\cdot)$  (同時に  $B(\cdot), R(\cdot)$  についても) はベクトルであり, そのまま判別分析に用いることは適切ではないので,  $k$  番目のサンプルについてこれらの期待値  $(\bar{v}_k, \bar{c}_k, \bar{b}_k, \bar{r}_k$  として表示する)を用いる。

#### (3) 外的基準導入による領域分割

与えられた状況のもとで最適と考えられる政策をとることが行動選択であるので, 行動選択をいくつかのグループにカテゴリ化(パターン化)する。具体的には評価関数の値  $V(\cdot)$  と決定変数ベク

トルの値  $c(\cdot)$  および付随する back order と在庫レベルから求められる  $\bar{v}_k, \bar{c}_k, \bar{b}_k, \bar{r}_k$  をもとに、いくつかのしきい値を設けて、サンプルのカテゴリ化を行う (カテゴリ化された区分を外的基準とよぶ)。例えば、頻繁に back order が発生する場合には、「外部購入を重視」などの行動の意義付けを行う。このような手順により、状況を示すパラメータ  $A$  と、これをグループ化するための外的基準の対が構成される。外的基準の設定は後で述べるが外部からの購入の是非、利益水準や設備の稼働率を考慮する。

#### (4) 判別関数の推定

Kernel-based 手法により、学習データを利用して変数ベクトル  $A$  を判別変数として入力し、カテゴリ化するための判別関数を推定する。Kernel-based 手法では、変換された変数についての判別関数は線形となること、および、変換関数を直接的に用いる必要はなく、いわゆる Kernel function を適用するだけで計算が可能となる。これにより、状況が与えられた場合に望ましい行動選択を実施するための判別関数が推定される。

#### (5) 入力からの最適行動選択の実施

Kernel-based 手法による判別関数が推定されるので、これを用いて将来起こるであろう状況のもとでの、最適な行動選択を推定する。具体的には、将来起こるであろう状況を入力変数ベクトル  $A$  を作成し、これを判別関数の判別変数の値として入力変数ベクトル  $A$  に代入することにより、この変数ベクトル  $A$  が所属する領域が求まるので、メーカーはこの領域に示された行動を選択する。

## 4 応用例

### 4.1 ジャンプ過程の生成

以下では、これまで述べたジャンプ過程を変動要因として含む変数で記述される評価関数の最適化問題の解析と、これを基礎としたメーカーの製品製造における行動選択への応用を、シミュレーションを基礎として考察する。最初に、メーカーの製品製造の最適化問題に関して、パラメータをさまざまに変化させた場合の評価関数の値と最適解に対するデータ収集について述べる。

ジャンプ過程変動は製品価格および部品価格の双方に含まれていると仮定するが、ジャンプ過程の方向は、正と負のどちらもありうると仮定しておく。本論文で用いる変動要因に含まれるジャンプ過程については、瞬間的な上昇か下降かに限定したものではなく、商品価格のように上昇 (下降) した場合にもとのレベルに戻るまでに時間を要する場合も仮定する。この場合ジャンプ過程が瞬間的に上昇 (下降) する価格変化を持っている場合を以下では簡単のため上昇 (下降) ジャンプ過程と呼んでおく。

本論文では、これらの2つのケースについて記述するパラメータが最適化問題に与える影響についても議論するが、以下のシミュレーションにおいては、Thompson らの研究でも用いられている変動を参考にしたモデルを基本となるケースとして考察する。変動のモデルを以下に示す。それぞれのジャンプ過程は価格の急激な増加 (減少) と、この時点からの急激な減少 (増加) の2つのポアソン過程から成り立っている。したがって式 (3)~(6) において、 $N_P = n_f = 4$  とする。なお、説明は価格  $P$  について行っているが同様のモデルを価格  $f$  にも適用する。

(1) 上昇ジャンプ過程の場合

$$dP = 0.2[15 \sin(2\pi t - 15.4\pi/24) + P_Z - P]dt + \sigma_P dz + (J_1 - P)dq_1 + (J_2 - P)dq_2 \quad (37)$$

$$J_1 \sim N(a_{P11}, s_{P11}), J_2 \sim N(a_{P12}, s_{P12}) \quad (38)$$

$dq_1, dq_2$  は、それぞれ、次の確率  $\lambda_{up}(P)dt, \lambda_{down}(P)dt$  で 1 になる。

$$\lambda_{up}(P) = \begin{cases} \theta_{P11}P/3P_Z; & P \leq PT_{11}; \\ \theta_{P11}; & P > PT_{11}; \end{cases} \quad (39)$$

$$\lambda_{down}(P) = \begin{cases} \theta_{P12}; & P \geq PT_{12}; \\ 0; & P < PT_{12}; \end{cases} \quad (40)$$

(2) 下降ジャンプ過程の場合

$$dP = 0.2[15 \sin(2\pi t - 15.4\pi/24) + P_Z - P]dt + \sigma_P dz + (J_1 - P)dq_1 + (J_2 - P)dq_2 \quad (41)$$

$$J_1 \sim N(a_{P21}, s_{P21}), J_2 \sim N(a_{P22}, s_{P22}) \quad (42)$$

$dq_1, dq_2$  は、それぞれ、次の確率  $\lambda_{down}(P)dt, \lambda_{up}(P)dt$  で 1 になる。

$$\lambda_{down}(P) = \begin{cases} \theta_{P21}(3P_Z - P); & P \leq PT_{21}; \\ \theta_{P21}; & P > PT_{21}; \end{cases} \quad (43)$$

$$\lambda_{up}(P) = \begin{cases} \theta_{P22}; & P \leq PT_{22}; \\ 0; & P > PT_{22}; \end{cases} \quad (44)$$

なお、これらのパラメータを変更する影響の概要については、以下のようにまとめられる。乱数の平均と標準偏差 ( $a_{Plk}, s_{Plk}$  は、ジャンプの大きさを規定する。上昇(下降)ジャンプの場合の確率  $\theta_{P11}(\theta_{P21})$  は、上昇(下降)ジャンプの発生頻度を与え、これらが大きいと上昇(下降)ジャンプが頻発する。同時に上昇(下降)ジャンプの場合の確率  $\theta_{P12}(\theta_{P22})$  が大きい場合には、価格が上昇(下降)してもとのレベルに戻る時間が短いことを意味しており、確率が小さい場合には、上昇(下降)したまま継続する時間が長くなる。

図1には、これらのジャンプ過程を含む価格変動について、 $\sigma_P = 0.1, P_Z = 150, a_{P11} = 700, s_{P11} = 100, a_{P12} = 200, s_{P12} = 10, a_{P21} = 30, s_{P21} = 10, a_{P22} = 50, s_{P22} = 10, PT_{11} = 450, PT_{12} = 450, PT_{12} = 90, PT_{22} = 50, \theta_{P11} = 0.01, \theta_{P12} = 0.85, \theta_{P21} = 0.001, \theta_{P22} = 0.85$  として設定した場合の例を示している。

なお、これらのパラメータと同様なものを価格  $f$  に対しても割り当てるため、 $\sigma_P, a_{Plk}, s_{Plk}, PT_{lk}, \theta_{Plk}$  に対応する記号を、それぞれ  $\sigma_f, a_{flk}, s_{flk}, fT_{lk}, \theta_{flk}, l, k = 1, 2$  としておく。

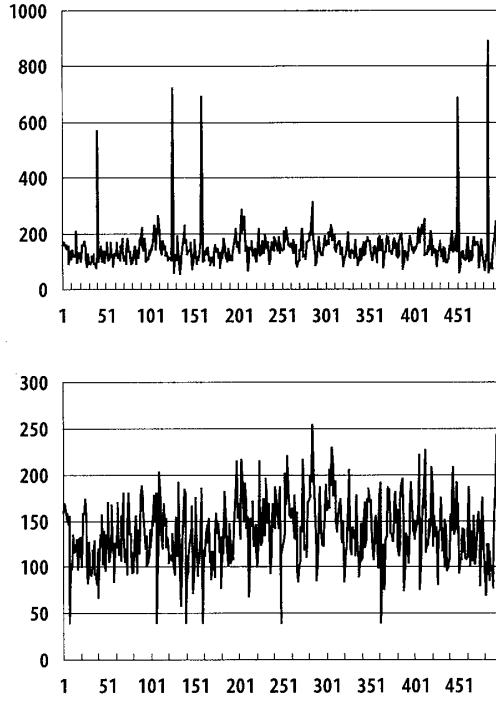


図 1: 上昇 (下降) ジャンプ過程を含む価格変動 (上:上昇ジャンプ, 下:下降ジャンプ)

なお, 式 (19) に示す偏微分方程式を解くためには, ジャンプが発生した場合の評価関数の値, すなわち  $V_k^{(+,P)} = V(P + \gamma_k(P, t, J_k), f, c, t, R)$ ,  $V_k^{(+,f)} = V(P, f + \eta_k(f, t, K_k), c, t, R)$  を計算する必要がある。これには, 次のような期待値を求める計算を適用する。式 (19) にジャンプ過程変動を記述する部分を代入して整理すると, 次のようになる。

$$\begin{aligned} H_{ik} &= \int_{-\infty}^{\infty} V(J_{ik}) r_k(J_k) dJ_k, k \\ &= \text{up, down} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} I_{ik} &= \int_{-\infty}^{\infty} V(K_k) s_k(K_k) dK_k, k \\ &= \text{up, down} \end{aligned} \quad (46)$$

ここで,  $V_k^{(+,P)}(\cdot)$ ,  $V_k^{(+,f)}(\cdot)$  の期待値の計算において,  $V_k(P + \theta_{ik}) = V(P + J_k - P) = V(J_k)$ ,  $V_k(f + \eta_k) = V(f + K_k - f) = V(K_k)$  となることを用いている。

ただし, 関数  $r_k(J_k)$  ( $s_k(K_k)$ ),  $k = \text{up, down}$  は, それぞれ, 価格  $P$  ( $f$ ) に対する  $N(700, 100)$ ,  $N(200, 10)$  に対応する変数  $J_k$  ( $K_k$ ) についての正規確率密度関数である。この積分は, 台形則により簡易計算される。

この偏微分方程式を, 有限差分の方法により数値計算し, あらためて変数  $R$  に関する 1 次の偏微分の値を求めておく [19]。なお, 偏微分方程式は有限差分のもとでは連立方程式になるが, この方程式は取り扱っている偏微分方程式の性質からスパースな係数行列となるので, ガウス消去法で解いても安定的に解が求まる [11]-[13][22]。

## 4.2 評価関数と決定変数の特性事例

以下の応用例を通じて、シミュレーションを実施するための変数  $P, f$  の刻み幅である  $\Delta P, \Delta f$  は、変数の範囲を適切に選び、変数を 40 分割した離散的な値を仮定する。また、 $\Delta t = 1$  とする。すでに述べたように本論文ではモデルを記述するパラメータを外部条件としてランダムに変化させた場合の最適解との組み合わせをデータとして収集し判別分析のサンプルとしている。このため以下のシミュレーションを通じて、パラメータを変化させる範囲条件を次のように設定している。

$$\sigma_P = 0.01 \sim 0.4, \sigma_f = 0.01 \sim 0.4$$

$$a_{P1j} = 10 \sim 700, s_{P1j} = 10 \sim 100, a_{P2j} = 10 \sim 300, s_{P2j} = 10 \sim 60$$

$$a_{f1j} = 10 \sim 200, s_{f1j} = 10 \sim 50, a_{f2j} = 10 \sim 100, s_{f2j} = 10 \sim 60$$

$$\theta_{P11} = 0.001 \sim 0.1, \theta_{P12} = 0.1 \sim 0.9, \theta_{P21} = 0.001 \sim 0.01, \theta_{P22} = 0.1 \sim 0.9$$

$$\theta_{f11} = 0.001 \sim 0.1, \theta_{f12} = 0.1 \sim 0.9, \theta_{f21} = 0.001 \sim 0.01, \theta_{f22} = 0.1 \sim 0.9$$

なお、商品価格と部品価格の平均的な数値に対応する  $P_Z, f_Z$  については、 $P_Z > 1.3f_Z$  の関係が保たれる範囲で変更してもシステム全体の挙動には大きな変化はないことから、 $P_Z = 150, f_Z = 100$  として固定しておく。またジャンプ発生条件については、頻度やその大きさは発生のためのしきい値である  $PT_{lk}, fT_{lk}$  により調整することもできるが、同様に条件を簡単に正規乱数のパラメータを変化させることによっても与えることができる。したがって以下では、ジャンプ過程変動発生を規定するパラメータ  $PT_{lk}, fT_{lk}$  についても、 $PT_{11} = 450, PT_{12} = 450, PT_{21} = 90, PT_{22} = 50, fT_{11} = 300, fT_{12} = 300, fT_{21} = 60, fT_{22} = 30$  に固定しておく。

Kernal-based 手法によるパターン構造解析について述べる前に、まずシミュレーションを通じて得られる最適化された評価関数  $V(P, f, t)$  と、これに関連した決定変数である  $c(P, f, t)$  の特性の事例を示しておく。図 2 には商品価格に上昇あるいは下降ジャンプ過程が含まれている場合の評価関数  $V(P, f, t)$  の最適解を示している。また図 3 には、このときの決定変数である  $c(P, f, t)$  の特性を示している。これらの図において両方の軸には、価格  $P(t), f(t)$  をとっている。なお、これ以外のケースについての評価関数  $V(\cdot)$  と変数が示す特性について図示することは省略するが、変数の軸方向に関数値が変化することが確認できる。

図 2 から分かるように、商品価格に上昇ジャンプ変動が含まれている場合には価格  $P(f)$  が大きく(小さく)なるにしたがって単調に評価関数の値  $V(\cdot)$  は増加している。評価関数が形成する関数値の表面形状は滑らかであり急激な変化は見られない。これに対して価格に下降ジャンプが含まれている場合には、やや複雑な形状を示すことが分かる。

次に、最適な製造数量である  $c(P, f, t)$  を示した図 3 から分かるように、生産に有利な状況では製造数量は大きな値をとっているが、部品価格が高騰するにしたがって、その数量は減少することが分かる。特に、製品価格に下降ジャンプが含まれている場合には、この傾向が顕著であることが分かる。

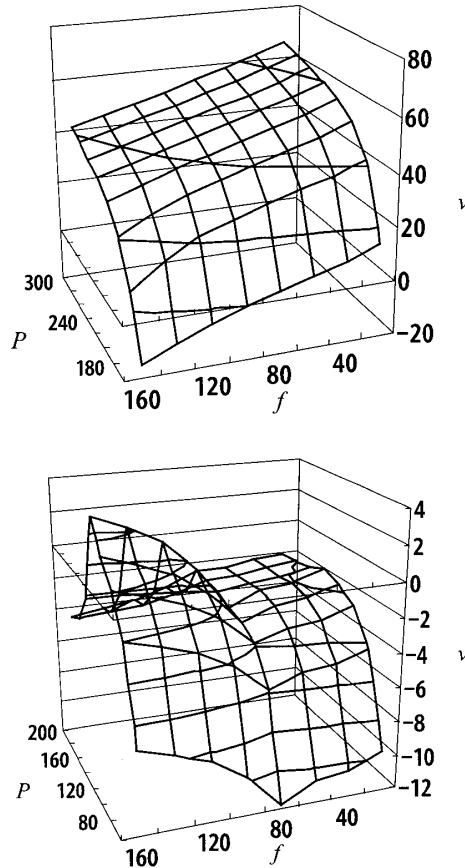


図 2: 商品価格がジャンプ過程を含む場合の評価関数 (上:価格に上昇ジャンプが含まれる, 下:価格に下降ジャンプ)

### 4.3 期待値の近似と外的基準の設定

すでに述べたモデル化により, 商品生産の状況を仮定した場合に最適な生産方法を求めることができるので, この場合に得られる利益  $V(P, f, t)$  と, この政策を実施するための決定変数ベクトル  $c(P, f, t)$  をもとにして, 行動選択のパターンをカテゴリ化することができる。しかしながら式 (16) ~ (20) により記述される関数と変数の関係およびこれを最適化する方法は, 特定の  $P, f$  において成立すべき関係を示しただけであり, システム運用の全体を通じての期待値を与えるものではない。一方, 本論文でとりあつかうような判別分析にもとづく行動パターン分析においては, 期待値などの簡略化された数値を用いるメリットが大きい。このようなことを考慮し本論文では, システムを記述する変数の近似的な期待を求め, 判別分析に応用する。具体的には, 商品価格  $P$  と部品価格  $f$  がある値を取る確率を近似的に推定し, これらを  $prob(P), prob(f)$  として決定変数  $c(P, f, t)$  の近似的な期待値を求める。これを以下では,  $\bar{c}_k, k = 1, 2, \dots, N$  としておく ( $N$  はサンプルの総数)。同様な方法を, 利益  $V(\cdot)$ , back order 発生の大きさ  $B(\cdot)$ , 在庫の数量  $R(\cdot)$  についても適用する (これらを,  $\bar{v}_k, \bar{b}_k, \bar{r}_k, k = 1, 2, \dots, N$  としておく。これらの近似的な期待値は, シミュレーションの条件により大きく変動することが予想される。図 4,5 にはあるパラメータ  $a_{P11}, a_{P12}$  をそれぞれ 10~700, 10~300 の範囲で相互に増加傾向を対応させながら変化させた他のパラメータは固定した場合

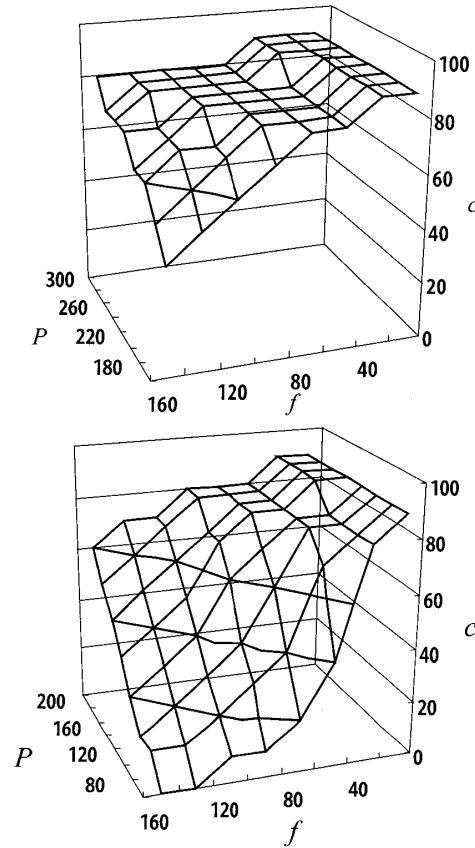


図 3: 商品価格がジャンプ過程を含む場合の最適な製造数量 (上: 価格に上昇ジャンプ, 下: 価格に下降ジャンプ)

の  $\bar{c}_k, \bar{v}_k$  の変化の事例を示している。図 4,5 より分かるように,  $\bar{c}_k, \bar{v}_k$  の値は増加傾向にあるが単調ではない。

観測されたサンプルのカテゴリ化にはさまざまな方法が考えられるが, 以下では商品の製造数量とこれに関連した行動選択の研究事例を参考にして,  $c_k, v_k, b_k, r_k$  に注目した方法を用いることにする [7][13]。

### Case A

最初に, 生産状況に注目した外的基準を与える。これを Case A と呼んでおく。なお後での議論の都合上, 記号で区別しておく。生産の条件を変えながら評価関数の最適化を実施したシミュレーション結果を 1つのサンプルと考えた場合に, これを以下の 4つのクラスタのいずれかに属すると仮定する。

#### (1) 外部調達 (BM: Backorder Mitigation)

部品価格の高騰が頻繁に発生するケースや, 製品の価格が安定している場合には, 完成した商品を外部から調達する政策が頻繁にとられる。外的基準が BM であるサンプルは, このようなケースが属すると仮定する。

#### (2) 生産優先 (PP: Production Priority)

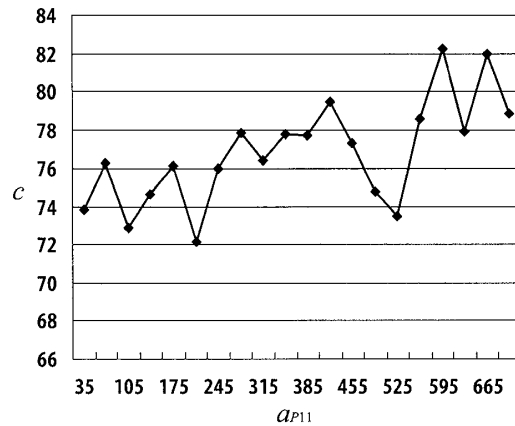


図 4: 種々の  $a_{P11}, a_{P12}$  による  $\bar{c}_k$  の変化

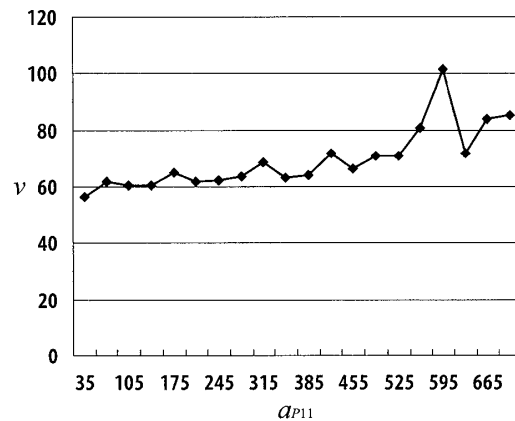


図 5: 種々の  $a_{P11}, a_{P12}$  による  $\bar{v}_k$  の変化

稼働率に対応する生産数量が相対的に大きく、逆に外部調達が少ないケースにおいては、自社での生産を優先することが望ましいケース (クラスタ) に属する。

### (3) 在庫優先 (IM:Inventory Mitigation)

サプライヤの事故の頻発や、メーカ工場での生産数量の減少確率の増加などにより、在庫を常に確保しておく政策がとられる可能性がある。在庫数量を相対的に多く確保することにより、事故などで生産数量、あるいは部品調達数量が大幅に減少した場合にも対応できる体制をとっておく。

### (4) リスク順応 (A:Acceptance)

以上の3つのケース (クラスタ) には属さないサンプルであり、特別な政策が取られないで、もし事故などで部品価格が高騰しても、そのまま通常の実産を継続するケースである。

シミュレーションを繰り返してこれらの4つのクラスタについて、それぞれ40サンプルのデータを収集しておく。

## Case B

次に、生産状況に注目した外的基準を与える。これを Case B と呼んでおく。同様に生産条件を変えながらシミュレーション結果を1つのサンプルと考えた場合に、これを以下の3つのクラスタ



のいずれかに属すると仮定する。

(1) 利益優先 (RP:Return Priority)

できるだけ大きな利益を獲得できるような生産体制をとるケース(クラス)である。評価関数の最適化の結果として、相対的に大きな利益が得られるケースであり、最適解を分析することにより実現方法を調べることは可能である。

(2) 稼働優先 (OP:Operation Priority)

例えば設備への投資金額が大きい場合など、設備の有効利用をはかって、利用効率をあげることに重点を置いているケースである。この場合には、獲得できる利益については、相対的に過小にならない限りは許容されると仮定しておく。(3) 損益順応 (A:Acceptance)

以上の2つのケース(クラス)には属さないサンプルであり、特別な政策が取られないで、多少の利益損失の変化に対応をとらないで製品価格や部品価格の変動に対しても、そのまま通常のプロセスを継続するケースである。

シミュレーションを繰り返してこれらの3つのクラスについて、それぞれ40サンプルのデータを収集しておく。

#### 4.4 判別分析の結果

以下では、本論文で提案する商品生産における行動選択の判別分析について結果をまとめている。すなわち、さまざまな生産の状況を判別関数における判別変数として入力した場合に、外的基準として与えたカテゴリとどの程度の割合で一致するかを検証する。Kernel function としてはガウシアン RBF を用いて、 $k(x, y) = \exp(-|x - y|^2 / \sigma^2)$ ,  $\sigma = 1$  として定義する。なお、本来の判別分析においては、このような学習データとは別の、検証を進めるためのデータの対が必要となる。しかし、本報告では、初期の分析段階であることを考慮して、学習データを同時に検証データとしても使用している。

##### Case A

最初に Case A について、Kernel-based パターン構造解析による判別分析の結果を表1にまとめている。結果の比較分析を行うため同じサンプルに対して多変量解析の判別分析 (MDA:Multi-variate Discriminant Analysis) を適用した結果を表2にまとめている。表1,2において、縦の欄は本来のクラスを、横の欄は判別分析により予測されたクラスを意味しており、数値はこれらの発生頻度を確率として表示している。この表1から分かるように、本論文で提案する Kernel-based 手法によるパターン行動分析では100%の認識が得られている。この結果は、同じ分析を多変量解析を用いて実施した結果(識別率は60%から80%の間)より十分の良好である。したがってメーカーが行動を選択する場合の基準として利用するには、意義がある方法であると言えよう。

表1 パターン構造解析の結果 (Case A:%)

Table 1-Result of pattern-directed clustering (Case A%)

	BM	PP	IM	A
BM	100.0	0.0	0.0	0.0
PP	0.0	100.0	0.0	0.0
IM	0.0	0.0	100.0	0.0
A	0.0	0.0	0.0	100.0

表 2 対応する MDA による結果 (Case A:%)

Table 2-Corresponding result by MDA (Case A%)

	BM	PP	IM	A
BM	50.0	20.0	10.0	20.0
PP	15.0	62.5	12.5	10.0
IM	20.0	0.0	80.0	0.0
A	20.0	7.5	5.0	67.5

### Case B

次に Case B について,Kernel-based パターン構造解析による判別分析の結果を表 3 にまとめ,比較分析のため同じサンプルに対して MDA を適用した結果を表 4 にまとめている。欄の配置と意味は表 1,2 と同じである。この表 3 から分かるように,本論文で提案する Kernel-based 手法によるパターン行動分析では 95%~100%の認識が得られている。この結果は,同じ分析を多変量解析を用いて実施した結果(識別率は 47%から 70%の間)より十分の良好である。したがって Case A の場合と同様に,メーカーが行動を選択する場合の基準として利用するには,意義がある方法であると言える。

表 3 パターン構造解析の結果 (Case B:%)

Table 3-Result of pattern-directed clustering (Case B%)

	RP	OP	A
RP	2.5	0.0	
OP	95.0	0.0	
A	0.0	100.0	

表 4 対応する MDA による結果 (Case B:%)

Table 4-Corresponding result by MDA (Case B%)

	RP	OP	A
RP	47.5	20.0	32.5
OP	10.0	70.0	20.0
A	30.0	20.0	50.0

## 5 むすび

本論文では,ジャンプ過程を変動要因として含む評価関数の近似解法と Kernel-based パターン構造解析による行動選択手法とその応用を示した。まず評価関数に含まれる変動要因がジャンプ過程を含むように拡張し,偏微分方程式を解く問題へと帰着する方法を示した。外部パラメータと評価関数の最適化の結果として得られる解を組み合わせるにより,データを収集したのちサンプルをカテゴリ化し,Kernel-based 手法を適用し,パターン指向の行動決定に適用するの有効性を議論した。

今後の課題として,変動要因が更に多くなった場合の特性分析などがあり,検討を進める予定である。

### 謝辞

本研究の一部は,日本学術振興会科学研究費基盤研究 (B)19310099 により実施されている。ここに感謝の意を表す。

## 参考文献

- [1] A. Logothetis and V. “Expectation-Maximization algorithm for MAP estimation of jump Markov linear systems,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.47, no.8, pp.2139-2156, 1999.
- [2] A.D. Neil, J. Gordon and V. Krishnamurthy “Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.49, No.3, pp.613-624, 2001.
- [3] T.-J. Ho and B.-S. Chen “Novel extended Viterbi-based multiple-model algorithms for state estimation of discrete-time systems with Markov jump parameters,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.54, No.2, pp.393-404, 2006.
- [4] V.P. Jilkov and X.R. Li “Online Bayesian estimation of transition probabilities for Markovian jump systems,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.52, no.6, pp.1620-1630, 2004.
- [5] R. Merton, “Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case,” *The Review of Economics and Statistics*, vol.LI, pp.247-257, 1969.
- [6] R. Merton, “Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model,” *Journal of Economic Theory*, vol.3, pp.373-413, 1971.
- [7] B. Tomlin, “On the value of mitigation and contingency strategies for managing supply chain disruption risks,” *Management Science*, vol.52, no.5, pp.639-657, 2006.
- [8] B. Kamrad and A. Siddique, “Supply contracts, profit sharing, switching, and reaction options,” *Management Science*, vol.50, no.1, pp.64-82, 2004.
- [9] M. Thompson, M. Davison and H. Rasmussen, “Valuation and optimal operation of electric power plants in competitive markets,” *Operations Research*, vol.50, no.4, pp.546-562, 2004.
- [10] S. Takriti, B. Krasenbrink and L. Wu, “Incorporating fuel constraints and electricity spot prices into the stochastic unit commitment problems,” *Operations Research*, vol.48, no.2, pp.268-280, 2000.
- [11] 譚康融, 儲梅芬, 時永祥三, 「ジャンプ過程変動を含む確率モデル分析における Importance Sampling を用いた評価関数のテイル分布推定とその応用」『電子情報通信学会論文誌』 vol.J90-A, no.2, pp.92-102, 2006.
- [12] 池田欽一, 時永祥三, 「ジャンプ過程を含む変数で記述される評価関数の最適化と資産配分変更を用いた Value at Risk 制御への応用」『電子情報通信学会論文誌』, vol.J91-A, no.3, pp.360-372, Mar. 2008.
- [13] 高木昇, 時永祥三, 「ジャンプ過程を変動要因として含む評価関数の近似解法と Kernel-based パターン構造解析を用いた行動選択手法」『信学技報 SIP2006-81』 pp.53-58, 2006.

- [14] F.Black and M.Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities”, *Journal of Political Economy*, vol.81,pp.637-659,1973.
- [15] R.L.McDonald and D.R.Siegel, “Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down”, *International Economic Review*, vol.26(June), pp.331-349, 1985.
- [16] B.Kogut and N.Kulatilaka, “Operational flexibility, global manufacturing and the option value of a multinational networks”, *Management Science*, vol.40, no.1 ,pp.123-139 ,1994.
- [17] A.Huchzermeier and C.H.Loch, “Project management under risk:Using the real options approach to evaluate flexibility in R&D”, *Management Science*, vol.47,no.1, pp.100-113,1996.
- [18] N.Takagi and S.Tokinaga, “Prediction of chaotic time-series by using the multi-stage fuzzy inference systems and its applications to the analysis of operating flexibility,” *Journal of Operations Research Society of Japan*, vol.20,no.3,pp.33-33,2002.
- [19] B.Scholkopf and A.Smola , “Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem,” *Neural Computation*, vol.10,pp.1299-1319,1998.
- [20] H.Kwon and N.M.Nasrabadi , “Kernel matched subspace detectors for hyperspectral target detection,” *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.28,no.2,pp.178-194,2006.
- [21] G.Baudat and E.Anouar, “Generalized discriminant analysis using a Kernel approach,” *Neural Computing*,vol.12,pp.2385-2404,2000.
- [22] A.J.G.Cairns,Interest Rate Models:An Introduction, Princeton University Press, New Jersey,2004.

高木 昇〔九州産業大学商学部 准教授〕  
時永 祥三〔九州大学大学院経済学研究院 教授〕