BELS法，WIV法および2SLS法の関連について

花田，武史
九州大学大学院システム情報科学府電気電子システム工学専攻 : 修士課程

金，春植
九州大学大学院システム情報科学研究院電気電子システム工学部門

和田，清
九州大学大学院システム情報科学研究院電気電子システム工学部門

https://doi.org/10.15017/1515726

出版情報：九州大学大学院システム情報科学紀要. 6 (1), pp.113-117, 2001-03-26. 九州大学大学院システム情報科学研究院

九州大学大学院
システム情報科学紀要
第6巻　第1号　平成13年3月

Research Reports on Information Science and
Electrical Engineering of Kyushu University
Vol.6, No.1, March 2001

BELS法，WIV法および2SLS法の関連について

花田武史*・金　春植**・和田　清**

On the Relationship of BELS Method , WIV Method and 2SLS Method

Takeshi HANADA , Chun-Zhi JIN and Kiyoshi WADA

(Received December 15, 2000)

Abstract: BELS method is one of consistent estimation methods for unknown parameters of transfer functions. In this paper, we discuss the equivalence of BELS method , IV method and 2SLS method under cirtain condition.

Keywords: Identification, Parameter estimation, Bias-eliminated least squares

1. はじめに

雑音がある場合に伝達関数のパラメータ推定に，最小2乗(least squares:LS)法を適用すると，最小2乗推定値は漸近バイアスを持ち一致推定値とはならない．そこで，漸近バイアスを推定しこれを用いて最小2乗推定値のバイアス分を補償することにより一致推定値を得る手法が提案されている[1),2),6),8)]．BELS (bias-eliminated LS)法はこのような手法の一つであるが，最近，文献3)∼5),6),7)などで，ある条件のもとで補助変数法のクラスに属することが示されている．

筆者らは，これらの文献の証明を含むより一般的な設定で，BELS法と補助変数法との関連を議論し，導入された補助変数の次元 m がシステムの次数 n に等しい場合，BELS法が補助変数法のクラスに属する事を示した[9)]．また，この場合漸近バイアスの推定のために導入された行列が，推定精度に全く影響を与えないことを指摘した．

本稿では，重みつき補助変数(weighted instrumental variable: WIV)法と2段階最小2乗(two-stage LS: 2SLS)法のそれぞれの重み行列を適当に選ぶことにより，$m>n$ の場合において，BELS法，WIV法および2SLS法の三つの手法が同じクラスに属する事を示す．

2. 問題の設定

次の一入力一出力線形離散時間システムを考える．

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + v(k) \tag{1}$$

ただし，$u(k)$ は入力，$y(k)$ は出力で，q^{-1} は $q^{-i}u(k) = u(k-i)$ なる遅延演算子であり，$A(q^{-1})$，$B(q^{-1})$ は

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n}$$
$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + \cdots + b_nq^{-n}$$

と定義される q^{-1} の多項式である，また $u(k)$，$v(k)$ は互いに統計的に独立で有限の分散を持つ平均値0の定常確率過程である．ここで，ベクトルを

$$\boldsymbol{\theta} = [\,a_1\,a_2\ldots a_n\,b_1\,b_2\ldots b_n\,]^T$$
$$\boldsymbol{y}(k) = [\,y(k-1)\,y(k-2)\ldots y(k-n)\,]^T$$
$$\boldsymbol{u}(k) = [\,u(k-1)\,u(k-2)\ldots u(k-n)\,]^T$$
$$\boldsymbol{p}(k)^T = [\,-\boldsymbol{y}(k)^T\ \boldsymbol{u}(k)^T\,]$$

と置くと，式(1)は

$$y(k) = \boldsymbol{p}(k)^T\boldsymbol{\theta} + v(k) \tag{2}$$

と書ける．$\boldsymbol{\theta}$ の最小2乗推定値 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ は

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} = \left(\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{p}(k)\boldsymbol{p}(k)^T\right)^{-1}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{p}(k)y(k) \tag{3}$$

で与えられ，$v(k)$ が白色雑音過程という特別の場合を除いて，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ は漸近バイアス $\boldsymbol{h}$ を持つ．

$$\boldsymbol{h} = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} - \boldsymbol{\theta} = -R_{pp}^{-1}\begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}\boldsymbol{m} \tag{4}$$

ただし

$$R_{pp} = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{p}(k)\boldsymbol{p}(k)^T = E[\boldsymbol{p}(k)\boldsymbol{p}(k)^T]$$
$$\boldsymbol{m} = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{y}(k)v(k) = E[\boldsymbol{y}(k)v(k)]$$

である．

平成12年12月15日受付

* 電気電子システム工学専攻修士課程
** 電気電子システム工学部門

3. BELS法

$\boldsymbol{\theta}$ の一致推定値を得るために，まず次のような m 次元ベクトル $\boldsymbol{\zeta}(k)$ を導入する．

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\zeta}(k)v(k)=0$$

つぎに，$(2n+m)$ ベクトル $\overline{\boldsymbol{p}}(k)$ を

$$\overline{\boldsymbol{p}}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}(k)\\ \boldsymbol{\zeta}(k)\end{bmatrix}$$

と定義し，$(2n+m)\times(2n+m)$ 正則行列 M によって，$(2n+m)$ ベクトル $\overline{\boldsymbol{\theta}}$，$\boldsymbol{\psi}(k)$ を

$$M\overline{\boldsymbol{p}}(k)=\boldsymbol{\psi}(k),\quad \overline{\boldsymbol{\theta}}=M^{-T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ 0\end{bmatrix} \tag{5}$$

と定義して，(2)式を次のように書き換える．

$$y(k)=\boldsymbol{\psi}(k)^T\overline{\boldsymbol{\theta}}+v(k) \tag{6}$$

このとき，$\overline{\boldsymbol{\theta}}$ の最小 2 乗推定値 $\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{LS}$ は

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{LS}=\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}\widehat{\boldsymbol{r}}_{\psi y} \tag{7}$$

であり，(6)式を代入して整理すると

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{LS}=\overline{\boldsymbol{\theta}}+\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}\widehat{\boldsymbol{r}}_{\psi v}$$

を得る．ここで

$$\widehat{R}_{\psi\psi}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\psi}(k)\boldsymbol{\psi}(k)^T$$
$$\widehat{\boldsymbol{r}}_{\psi y}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\psi}(k)y(k),\quad \widehat{\boldsymbol{r}}_{\psi v}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\psi}(k)v(k)$$

である．行列 M を

$$M=\begin{bmatrix}M_1 & M_2 & Z\end{bmatrix}:\ M_1,M_2:(2n+m)\times n,\quad Z:(2n+m)\times m$$

と分割するとき，$Z^T\overline{\boldsymbol{\theta}}=0$ であり，また仮定より

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\widehat{\boldsymbol{r}}_{\psi v}=-M_1\boldsymbol{m}$$

であるので，次の関係を得る．

$$Z^T\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{LS}=-Z^T\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}M_1\boldsymbol{m}$$

したがって $\boldsymbol{m}$ の一致推定値 $\widehat{\boldsymbol{m}}$ として，$m\geq n$ のとき，

$$\widehat{\boldsymbol{m}}=-\left(\widehat{D}^TW_{LS}\widehat{D}\right)^{-1}\widehat{D}^TW_{LS}Z^T\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{LS} \tag{8}$$

が考えられる．ここで，W_{LS} は正定値重み行列であり，$m\times n$ 行列 $\widehat{D}$ は

$$\widehat{D}=Z^T\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}M_1$$

である．以上より，$\overline{\boldsymbol{\theta}}$ の BELS 推定値 $\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{BELS}$ は

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{BELS}=\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{LS}+\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}M_1\widehat{\boldsymbol{m}} \tag{9}$$

のように得られ，(5)式の関係から θ の BELS 推定値 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{BELS}$ が

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{BELS}=(H^TH)^{-1}H^T\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{BELS} \tag{10}$$

のように求められる．ここで $(2n+m)\times 2n$ 行列 H は

$$H=M^{-T}\begin{bmatrix}I_{2n}\\ O\end{bmatrix}$$

である．$n+m$ 次元ベクトル $\boldsymbol{\eta}(k)$ を

$$\boldsymbol{\eta}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{\zeta}(k)\end{bmatrix} \tag{11}$$

と定義すると，$\boldsymbol{\psi}(k)$ および $\overline{\boldsymbol{p}}(k)$ の定義から，(7)式の最小 2 乗推定値 $\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{LS}$ は

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{LS}=-\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}M_1\widehat{\boldsymbol{r}}_{yy}+\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}\begin{bmatrix}M_2 & Z\end{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{r}}_{\eta y}$$

のように書ける．ここで

$$\widehat{\boldsymbol{r}}_{yy}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{y}(k)y(k),\quad \widehat{\boldsymbol{r}}_{\eta y}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\eta}(k)y(k)$$

である．一方，(8)と(9)式から BELS 推定値 $\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{BELS}$ は

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{BELS}=\left[I-\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}M_1(\widehat{D}^TW_{LS}\widehat{D})^{-1}\widehat{D}^TW_{LS}Z^T\right]\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{LS}$$

と書けるので

$$\left[I-\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}M_1(\widehat{D}^TW_{LS}\widehat{D})^{-1}\widehat{D}^TW_{LS}Z^T\right]\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}M_1=0$$

に注意すると

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{\theta}}}_{BELS}=\left[I-\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}M_1(\widehat{D}^TW_{LS}\widehat{D})^{-1}\widehat{D}^TW_{LS}Z^T\right]\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}M_2 & Z\end{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{r}}_{\eta y}$$

を得る．したがって，$2n\times n$ 行列 $\widehat{C}$ および $2n\times(n+m)$ 行列 $\widehat{K}$ を

$$\begin{bmatrix}\widehat{C} & \widehat{K}\end{bmatrix}=(H^TH)^{-1}H^T\widehat{R}_{\psi\psi}^{-1}M$$

と定義すると，(10)式より $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{BELS}$ は

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{BELS} = \left[\widehat{K} - \widehat{C}(\widehat{D}^T W_{LS} \widehat{D})^{-1} \widehat{D}^T W_{LS} \widehat{F}\right] \widehat{\boldsymbol{r}}_{\eta y} \quad (12)$$

と表される．ここで，$\widehat{F}$ は $m \times (n+m)$ 行列であり

$$\widehat{F} = Z^T \widehat{R}_{\psi\psi}^{-1} \left[M_2 \ Z \right]$$

である．

4. WIV法と2SLS法

(11)式の $\boldsymbol{\eta}(k)$ に対して

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\eta}(k) v(k) = 0$$

であるので，(2)式より

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widehat{\boldsymbol{r}}_{\eta y} = \operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widehat{G}\boldsymbol{\theta}$$

を得る．ここで，$(n+m) \times 2n$ 行列 $\widehat{G}$ は

$$\widehat{G} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\eta}(k) \boldsymbol{p}(k)$$

である．したがって，W_{IV} を正定値行列とするとき，$m \geq n$ のとき $\boldsymbol{\theta}$ の重みつき補助変数(WIV)推定値 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{WIV}$ が

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{WIV} = (\widehat{G}^T W_{IV} \widehat{G})^{-1} \widehat{G}^T W_{IV} \widehat{\boldsymbol{r}}_{\eta y}$$

のように得られる．

また，行列 $Y, U, \mathcal{H}$ およびベクトル $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{v}$

$$Y^T = [\boldsymbol{y}(1), \boldsymbol{y}(2), \cdots, \boldsymbol{y}(N)]\ ,\ U^T = [\boldsymbol{u}(1), \boldsymbol{u}(2), \cdots, \boldsymbol{u}(N)]$$
$$\mathcal{H}^T = [\boldsymbol{\eta}(1), \boldsymbol{\eta}(2), \cdots, \boldsymbol{\eta}(N)]$$
$$\boldsymbol{\rho} = [y(1), y(2), \cdots, y(N)]\ ,\ \boldsymbol{v} = [v(1), v(2), \cdots, v(N)]$$

と定義すると，2SLS 推定値 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS}$ は

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS} = \left(\begin{bmatrix} -\widehat{Y}^T \\ U^T \end{bmatrix} W_{2SLS} \begin{bmatrix} -\widehat{Y} & U \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\widehat{Y}^T \\ U^T \end{bmatrix} W_{2SLS} \boldsymbol{\rho}$$

ただし，W_{2SLS} は正定値重み行列で

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{LS} = (\mathcal{H}^T \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}^T Y$$
$$\widehat{Y} = \mathcal{H} \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{LS}$$

である．

5. BELS法，WIV法，2SLS法の関連

定理

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{WIV}$，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS}$ の重み行列をそれぞれ

$$W_{IV} = \left(\begin{bmatrix} \widehat{G} & \widehat{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & W_{LS}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^T \\ S^T \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$W_{2SLS} = \mathcal{H} W_{IV} \mathcal{H}^T$$

と置くと

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{BELS} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{WIV} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS}$$

が成り立つ．ただし $(n+m) \times (2n+m)$ 行列 $\begin{bmatrix} \widehat{G} & \widehat{S} \end{bmatrix}$ は

$$\begin{bmatrix} \widehat{G} & \widehat{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \widehat{R}_{\psi\psi} \begin{bmatrix} H & Z(Z^T Z)^{-1} \end{bmatrix}$$

である．

証明

$\widehat{C}, \widehat{K}, \widehat{D}$ および $\widehat{F}$ の定義より

$$\begin{bmatrix} \widehat{C} & \widehat{K} \\ \widehat{D} & \widehat{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H^T H)^{-1} H^T \\ Z^T \end{bmatrix} \widehat{R}_{\psi\psi}^{-1} M$$

であり，この行列の逆行列は

$$\begin{bmatrix} \widehat{R} & \widehat{Q} \\ \widehat{G} & \widehat{S} \end{bmatrix} = M^{-1} \widehat{R}_{\psi\psi} \begin{bmatrix} H & Z(Z^T Z)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{C} & \widehat{K} \\ \widehat{D} & \widehat{F} \end{bmatrix}^{-1}$$

でと書ける．これより

$$\begin{bmatrix} \widehat{R} & \widehat{Q} \\ \widehat{G} & \widehat{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C} & \widehat{K} \\ \widehat{D} & \widehat{F} \end{bmatrix} = I, \quad \begin{bmatrix} \widehat{G} & \widehat{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C} & \widehat{K} \\ \widehat{D} & \widehat{F} \end{bmatrix}^{-1}$$

である．よって，W_{IV} は

$$\begin{aligned} W_{IV} &= \left(\begin{bmatrix} \widehat{G} & \widehat{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & W_{LS}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{G}^T \\ \widehat{S}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C} & \widehat{K} \\ \widehat{D} & \widehat{F} \end{bmatrix}^{-1} \Omega \begin{bmatrix} \widehat{C} & \widehat{K} \\ \widehat{D} & \widehat{F} \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{K} & \widehat{F} \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \widehat{K}^T \\ \widehat{F}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widehat{K} & \widehat{F} \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \widehat{C} \\ \widehat{D} \end{bmatrix} \widehat{\Phi}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{C}^T & \widehat{D}^T \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \widehat{K} \\ \widehat{F} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$\Omega = \begin{bmatrix} I & O \\ O & W_{LS}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Phi} = \begin{bmatrix} \widehat{C}^T & \widehat{D}^T \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \widehat{C} \\ \widehat{D} \end{bmatrix}$$

よって

$$\widehat{G}^T W_{IV} = \widehat{G}^T \left[\widehat{K}^T \ \ \widehat{F}^T\right]\Omega\left\{I - \begin{bmatrix}\widehat{C}\\ \widehat{D}\end{bmatrix}\widehat{\Phi}^{-1}\left[\widehat{C}^T \ \ \widehat{D}^T\right]\Omega\right\}\begin{bmatrix}\widehat{K}\\ \widehat{F}\end{bmatrix}$$

であり

$$\begin{bmatrix}\widehat{C} & \widehat{K}\\ \widehat{D} & \widehat{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{R} & \widehat{Q}\\ \widehat{G} & \widehat{S}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I & O\\ O & I\end{bmatrix}$$

より

$$\begin{bmatrix}\widehat{K}\\ \widehat{F}\end{bmatrix}\widehat{G} = \begin{bmatrix}I\\ O\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\widehat{C}\\ \widehat{D}\end{bmatrix}\widehat{R}$$

従って

$$\begin{aligned}\widehat{G}^T W_{IV} &= \left\{\begin{bmatrix}I\\ O\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\widehat{C}\\ \widehat{D}\end{bmatrix}\widehat{R}\right\}^T\Omega \\ &\qquad \cdot\left\{I - \begin{bmatrix}\widehat{C}\\ \widehat{D}\end{bmatrix}\widehat{\Phi}^{-1}\left[\widehat{C}^T \ \ \widehat{D}^T\right]\Omega\right\}\begin{bmatrix}\widehat{K}\\ \widehat{F}\end{bmatrix} \\ &= \left[I \ \ O\right]\left\{I - \begin{bmatrix}\widehat{C}\\ \widehat{D}\end{bmatrix}\widehat{\Phi}^{-1}\left[\widehat{C}^T \ \ \widehat{D}^T\right]\Omega\right\}\begin{bmatrix}\widehat{K}\\ \widehat{F}\end{bmatrix} \\ &= \left[I - \widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{C}^T \quad -\widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{D}^T W_{LS}\right\}\begin{bmatrix}\widehat{K}\\ \widehat{F}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

を得る．また

$$\widehat{G}^T W_{IV}\widehat{G} = I - \widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{C}^T$$

であることが分かる．以上より

$$\begin{aligned}&(\widehat{G}^T W_{IV}\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T W_{IV} \\ &= (I - \widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{C}^T)^{-1}\left[I - \widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{C}^T \quad -\widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{D}^T W_{LS}\right]\begin{bmatrix}\widehat{K}\\ \widehat{F}\end{bmatrix} \\ &= \left[I \quad -(I - \widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{C}^T)^{-1}\widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{D}^T W_{LS}\right]\begin{bmatrix}\widehat{K}\\ \widehat{F}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}&(I - \widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1}\widehat{C}^T)^{-1}\widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1} \\ &= \left(I + \widehat{C}[\widehat{\Phi} - \widehat{C}^T\widehat{C}]^{-1}\widehat{C}^T\right)\widehat{C}\widehat{\Phi}^{-1} \\ &= \left[\widehat{C} + \widehat{C}(\widehat{D}^T W_{LS}\widehat{D})^{-1}\widehat{C}^T\widehat{C}\right]\widehat{\Phi}^{-1} \\ &= \widehat{C}(\widehat{D}^T W_{LS}\widehat{D})^{-1}[\widehat{D}^T W_{LS}\widehat{D} + \widehat{C}^T\widehat{C}]\widehat{\Phi}^{-1} \\ &= \widehat{C}(\widehat{D}^T W_{LS}\widehat{D})^{-1}\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}&(\widehat{G}^T W_{IV}\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T W_{IV} \\ &\quad = \left[I \quad -\widehat{C}(\widehat{D}^T W_{LS}\widehat{D})^{-1}\widehat{D}^T W_{LS}\right]\begin{bmatrix}\widehat{K}\\ \widehat{F}\end{bmatrix} \\ &\quad = \widehat{K} - \widehat{C}(\widehat{D}^T W_{LS}\widehat{D})^{-1}\widehat{D}^T W_{LS}\widehat{F}\end{aligned}$$

従って

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{BELS} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{WIV}$$

が成り立つ．

また，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS}$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS} = &\left[P^T\mathcal{H}(\mathcal{H}^T\mathcal{H})^{-1}\mathcal{H}^T W_{2SLS}\mathcal{H}(\mathcal{H}^T\mathcal{H})^{-1}\mathcal{H}^T P\right]^{-1} \\ &\cdot P^T\mathcal{H}(\mathcal{H}^T\mathcal{H})^{-1}\mathcal{H}^T W_{2SLS}\boldsymbol{\rho}\end{aligned}$$

ただし

$$P = [-Y \ \ U]$$

である．この式から

$$\widehat{G} = \frac{1}{N}\mathcal{H}^T[-Y \ \ U], \quad \widehat{\boldsymbol{r}}_{\eta y} = \frac{1}{N}\mathcal{H}^T\boldsymbol{\rho}$$

$$W_{2SLS} = \mathcal{H}W_{IV}\mathcal{H}^T$$

に注意すると，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS}$ は

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS} = (\widehat{G}^T W_{IV}\widehat{G})^{-1}\widehat{G}^T W_{IV}\widehat{\boldsymbol{r}}_{\eta y}$$

となる．よって

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{WIV}$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

6. シミュレーション

シミュレーションの設定

次のシステムについてシミュレーションを行う．

$$\begin{aligned}y(k) - 1.5y(k-1) + 0.7y(k-2) \\ = 1.0u(k-1) + 0.5u(k-2) + v(k)\end{aligned}$$

ただし $v(k)$ は

$$v(k) = e(k) - 1.5e(k-1) + 0.7e(k-2)$$

とする，入力 $u(k)$ は分散 1 の正規乱数とし，$e(k)$ は白色雑音とする．$e(k)$ の分散は SN 比が5となるように定めている．また

$$W_{IV} = \left(\left[\widehat{G} \ \ \widehat{S}\right]\begin{bmatrix}I & O\\ O & W_{LS}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{G}^T\\ \widehat{S}^T\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$W_{2SLS} = \mathcal{H}W_{IV}\mathcal{H}^T$$

と選び，$n = 2$，$m = 3$ つまり $m > n$ のときについてシミュレーションを行い，$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{BELS} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{WIV} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2SLS}$ となることを確認する．

シミュレーションの結果

Table-1 Estimates of LS, BELS, WIV and 2SLS method.

	N	a_1	a_2	b_1	b_2
LS法	50	0.9988	-0.2177	0.9501	0.9554
	500	1.0284	-0.2625	0.9757	0.9574
	2000	1.0322	-0.2668	0.9907	0.9841
BELS法	50	1.4303	-0.6632	0.9196	0.5266
	500	1.4595	-0.6360	0.9312	0.5224
	2000	1.4952	-0.6999	0.9976	0.5294
WIV法	50	1.4303	-0.6632	0.9196	0.5266
	500	1.4595	-0.6360	0.9312	0.5224
	2000	1.4952	-0.6999	0.9976	0.5294
2SLS法	50	1.4303	-0.6632	0.9196	0.5266
	500	1.4595	-0.6360	0.9312	0.5224
	2000	1.4952	-0.6999	0.9976	0.5294
True value		1.5	-0.7	1.0	0.5

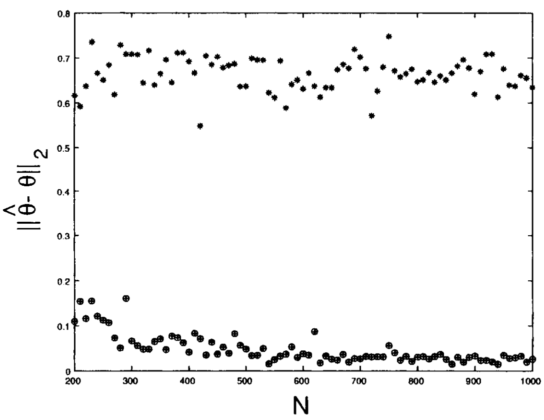

Fig.1 $\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\|_2$ versus N.
LS: * , BELS: · , WIV: + , 2SLS: o

LS法，BELS法，WIV法および2SLS法による推定結果を**Table-1** に示している．**Table-1** において，BELS法，WIV法および2SLS法の推定値がすべて一致している事が確認できる．また，**Fig.1** における2乗誤差に関しても，同じようにBELS法，WIV法および2SLS法は一致している．また，LS法がバイアスの影響で一致推定値が得られていないのに対して，他の三つの手法は一致推定値が得られている事が確認できる．

7. おわりに

本論文では，BELS法，WIV法および2SLS法の関連について理論的な証明を行い，それをシミュレーションにより確認した．シミュレーション結果からも分かるように，WIV法と2SLS法のそれぞれの重み行列を適当に選んだとき，BELS法，WIV法および2SLS法の推定値がすべて一致する．このことから，これら三つの手法は同じクラスに属することが分かる．

参考文献

1) S. Sagara and K. Wada : *On-line modified least-squares parameter estimation on linear discrete dy namic systems*, Int.J.Control.Vol.25,No.3 329/343(1977)

2) C.B. Feng and W.X. Zheng: *Robust identification of stochastic linear systems with correlated output noise*, IEE Proceedings-D,Vol.138,No.5,484-492(1991)

3) P. Stoica, T. Soderstrom and V. Simonyte: *Study of a bias-free least squares parameter estimator*, IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol.142, No.1, 1-6(1995)

4) 和田: *C.B. Fengらのバイアス補償最小2乗法について*, 第48回電気関係学会九州支部連合大会, 1440, 898-899(1995)

5) Y. Zhang, T.T. Lie and C.B. Soh: *Consistent parameter estimation of systems disturbed by correlated noise*, IEE Proc.-Control Theory Appl, Vol.144, No.1, 40-44(1997)

6) W.X. Zheng: *On a least-squares-based algorithm for identification of stochastc linear systems*, IEEE Trans. Signal Processing, Vol.46, No.6, 1631-1638(1998)

7) T. Soderstrom, W.X. Zheng and P. Stoica: *Comments on "On a least-squares-based algorithm for identification of stochastc linear systems"*, IEEE Trans. Signal Processing, Vol.47, No.5 1395-1396(1999)

8) W.X. Zheng: *On parameter estimation of transfer function models*, Proc. 38th IEEE CDC, 2412-2413(1998)

9) 和田，花田，今井：伝達関数のパラメータ推定における*BELS法について*，第29回制御理論シンポジウム，329-332(2000)