

2トランジスタ回路に対する区分線形方程式の解の個数の上界

實松, 豊

九州大学大学院システム情報科学府情報工学専攻 : 博士後期課程

西, 哲生

九州大学大学院システム情報科学研究院情報工学部門

<https://doi.org/10.15017/1515724>

出版情報 : 九州大学大学院システム情報科学紀要. 6 (1), pp.99-106, 2001-03-26. 九州大学大学院システム情報科学研究院

バージョン :

権利関係 :

2トランジスタ回路に対する区分線形方程式の解の個数の上界

實松 豊*・西 哲生**

An Upper Bound for the Number of Solutions of a Piecewise-linear Equation Related to Two-transistor Circuits

Yutaka JITSUMATSU and Tetsuo NISHI

(Received December 15, 2000)

Abstract: This paper discusses the number of solutions for a class of piecewise-linear equations related to two-transistor circuits composed of transistors, linear passive resistors, and DC sources. By using Ebers-Moll model, a transistor is replaced by two nonlinear resistors and two linear current-controlled current sources. We assume in this paper that the nonlinear resistors are ideal diodes. Then a circuit equation for the above circuit is a piecewise-linear equation $Ti + Gv = b$ where each component i_k and v_k of the vectors i and v respectively are subject to $v_k i_k = 0, v_k \leq 0$, and $i_k \geq 0$. We show that the number of solutions for the equation is at most 5.

Keywords: Number of solutions, Transistor circuit, Ideal diode

1. はじめに

トランジスタ回路の直流動作点の最大個数を求めることは、非線形回路の分野で最も関心を集めている問題の一つであり、IEEE CAS Societyにおいて Challenging Problem として取り上げられている。この問題に関しては、回路中のトランジスタの個数を m とすると、 $m = 1, 2$ のとき解の最大個数は、それぞれ 1, 3 となることが知られており、 $m = 3$ に対しては、7個ではないかという推測がある。これらのことから、解の最大個数は一般に $2^m - 1$ ではないかとの予想もある。しかし、 $m \geq 3$ の場合については、この予想が成立するか否かは今までのところ明らかになっていない。

Ebers-Mollの等価回路を用いれば、1個のトランジスタは2個の非線形抵抗と2個の線形従属電源で表現される。 k 番目の非線形抵抗の v - i 特性を $i_k = f_k(v_k)$ とすると、トランジスタ直流回路の回路方程式は、一般に

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ \vdots \\ f_n(x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

の形に帰着できる(ただし $n = 2m$)。

西と川根²⁾は、 $f_k(x_k)$ の1階と2階の導関数が正という仮定の下で、解の個数が有限個になるための A に対する必要十分条件として Ω 行列を導入した。また、西³⁾は上の条

件だけでは、3トランジスタ回路は適当な $f_k(x_k)$ に対して無限個の解を持ちうることを示した。しかし、現実の $f_k(x_k)$ は上記の条件より厳しい条件に従うので、解の個数は有限個になるものと思われる。

實松と西⁴⁾は、 $f_k(x_k)$ を指数関数とし a_{ij} に対する物理的な制約条件($[a_{ij}]$ の非負値性等) を考慮しない場合について、 $n = 2$ のとき式(1)の解の最大個数がちょうど5個であることを解析的に与えた。なお、一般の n に対しては解の個数の上限として $(n+1)^n 2^{n(n-1)/2}$ が知られている⁶⁾が、これは上述の結果からもかなりの過大評価であることがわかる。

また實松と西⁵⁾は、式(1)の $f_k(x_k)$ を理想ダイオード特性で置きかえ、 a_{ij} の物理的な制約を考慮しない場合について、式(1)がちょうど 2^l ($l \leq n$) 個の解を持つための十分条件を与えた。

本稿では、式(1)において、 $f_k(x_k)$ を理想ダイオード特性としたときの、物理的な制約条件の下での解の最大個数について、 $m = 2$ の場合を詳細に検討し、この仮定の下では解の個数が高々5個であることを示す。この結果自体は、従来の結果すなわち、 $m = 2$ のときのトランジスタ回路の解の最大個数が3という結果と比べ劣っているように思えるが、モデルの前提条件が異なっており、単純に比較できない(第2節も参照のこと)。本稿の目的の一つは、理想ダイオード特性を有する回路の解の個数に対する新しい解析手法の提案にある。 $m = 2$ という簡単な場合ですら、難しい問題を含むことを示す。

平成12年12月15日受付

* 情報工学専攻博士後期課程

** 情報工学部門

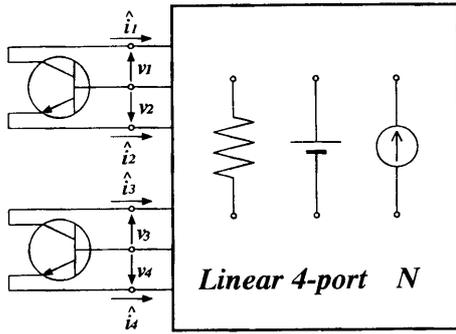


Fig.1 Two-transistor circuit

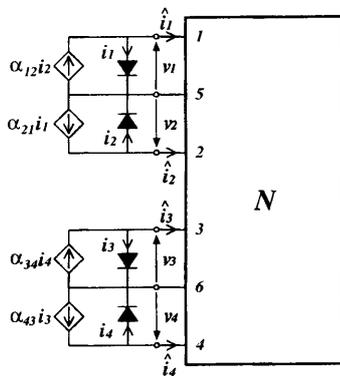


Fig.2 Ebers-Moll's equivalent circuit for the circuit in Fig.1

2. 問題の定式化

本稿では、2個のトランジスタ、線形抵抗、直流電源からなるFig.1の回路について考察する。この回路におけるトランジスタをEbers-Mollの等価回路で置き換えた回路をFig.2に示す。

非線形抵抗を理想ダイオードとし、これを流れる電流 i_k と端子電流 \hat{i}_k ($k = 1, \dots, 4$)の間には、Fig.2より

$$\begin{cases} -\hat{i}_1 = i_1 - \alpha_{12}i_2 \\ -\hat{i}_2 = -\alpha_{21}i_1 + i_2 \\ -\hat{i}_3 = i_3 - \alpha_{34}i_4 \\ -\hat{i}_4 = -\alpha_{43}i_3 + i_4 \end{cases} \quad (2)$$

が成立する。ここに、 α_{ij} は、Ebers-Mollモデル中のCCCSの増幅率であり、次の仮定を満足するものとする。

仮定 1 CCCSの増幅率 α_{ij} は、

$$0 < \alpha_{ij} < 1 \quad (3)$$

を満たす任意の値とする。□
注：実際のトランジスタでは $\alpha_{12} \approx 1$, $\alpha_{21} < 1/2$ 等が満たされているが、本稿では仮定 1のもとで検討する。第1節で述べた従来の結果と本稿の結果との違いがこのよう

な取り扱いの違いによって生じていると想像される。

Fig.2において N は端子対 1-5, 2-5, 3-6, 4-6をもつ線形抵抗と直流電源からなる線形4ポートであり、次の式が成立する。

$$\hat{i} = Gv - b \quad (4)$$

ここで、 $v = [v_1, v_2, v_3, v_4]^T$ はFig.2に示した端子間電圧、 b は直流電源と線形抵抗で決まる定数ベクトル、行列 G は短絡アドミタンス(コンダクタンス)行列である。さらに、一般性を失うことなく N に対し次のことを仮定する。

仮定 2 Fig.2の線形4ポートは、6個の外部端子以外には内部に節点を持たず、全ての節点が互いに抵抗で結合(完全結合)しているものとする。

仮定 3 回路中の直流電圧源は抵抗に直列に、直流電流源は抵抗に並列に接続している。

式(2)を(4)に代入することにより、Fig.2に示した回路の方程式は、

$$Ti + Gv = b \quad (5)$$

と書ける。ここで、

$$i = [i_1, i_2, i_3, i_4]^T \quad (6)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{12} & 0 & 0 \\ -\alpha_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_{34} \\ 0 & 0 & -\alpha_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

である。変数 i_k と v_k は、 k 番目の理想ダイオードの電流と電圧であるから、

$$v_k i_k = 0 \quad (k = 1, \dots, 4) \quad (8)$$

$$i_k \geq 0, \quad v_k \leq 0, \quad v_k i_k = 0, \quad (9)$$

を満たす。

変成器を含まない線形抵抗のみからなる回路のアドミタンス行列は一般に、次のパラマウント行列であることが知られている。

定義 1 A を実対称行列とする。 A のすべての主小行列式が、 A と同じ行と任意の列からなるすべての小行列式の絶対値よりも等しいか大きいとき、すなわち

$$|A_{(i_1, \dots, i_k)}^{(i_1, \dots, i_k)}| \geq \text{Abs}|A_{(j_1, \dots, j_k)}^{(i_1, \dots, i_k)}| \quad (10)$$

が成立するとき、 A をパラマウント行列と呼ぶ。□

ここで $|A|$ は行列 A の行列式を表し、 $\text{Abs}|A|$ は $|A|$ の絶対値を表す。

4×4 行列 G はパラマウント行列であるから

$$g_{11} \geq |g_{12}|, |g_{13}|, |g_{14}| \quad (11)$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \geq \text{Abs} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix}, \text{Abs} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{14} \\ g_{21} & g_{24} \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \geq \text{Abs} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{34} \end{vmatrix} \quad (13)$$

などが成立する。また、パラマウント行列 A は対称なので、行と列を入れ換えても、同様の不等式が成り立つ。

行列 T, G の第 k 列を t_k, g_k とおく。すなわち、

$$T = [t_1 t_2 t_3 t_4] \quad (14)$$

$$G = [g_1 g_2 g_3 g_4] \quad (15)$$

式(8)より、 $k = 1, \dots, 4$ について、 $i_k = 0$ もしくは $v_k = 0$ が成立する。対角行列 $S = S(s_1, s_2, s_3, s_4) = \text{diag}[s_1, s_2, s_3, s_4]$ を次式で定める。

$$\begin{cases} v_k = 0 \Rightarrow s_k = 0 \\ i_k = 0 \Rightarrow s_k = 1 \end{cases} \quad (16)$$

このような行列 $S(s_1, s_2, s_3, s_4)$ は全部で16通りある。

同時に $v_k = 0$ かつ $i_k = 0$ が起こる場合も考えられるが、これは、 $s_k = 0$ での解がちょうど $i_k = 0$ になった場合、あるいは $s_k = 1$ での解がちょうど $v_k = 0$ となった場合と考えればよい。本章の目的は、解の最大個数を求めることであるから、そのような解の縮退した場合は除外して議論してよい。

さらに次のような行列 F とベクトル x を定義する。

$$F(S) = F(T, G, S) \stackrel{\text{def}}{=} T(\mathbf{1} - S) + GS \\ x = (1 - S)i + Sv \quad (17)$$

このとき式(5)は

$$F(s)x = b \quad (18)$$

と書き換えられる。これから $F(S)$ が正則であれば、各 $S(s_1, s_2, s_3, s_4)$ に対して(5)はただ一つの解を持ち、このとき解 (i, v) は

$$i = i(S) = (\mathbf{1} - S)\{F(S)\}^{-1}b \quad (19)$$

$$v = v(S) = S\{F(S)\}^{-1}b \quad (20)$$

で与えられる。行列 S は16個あるから、式(5)は i_k, v_k の符号の条件を無視すれば16個の解を持つ。これらの中で、 $i(S) \geq 0$ かつ $v(S) \leq 0$ を満たすものが式(9)の条件下での(5)の解ということになり、本章ではこれを真の解と呼ぶ。 $i(S) \geq 0$ または $v(S) \leq 0$ のいずれかを満たさないものを偽の解と呼ぶ。

3. 準備

本論文の主な結果は、第4節で定理として与える。この章は、その定理のための準備である。

3.1 行列式 $|F(S)|$ の符号について

本章での解の個数の判定には、後で示すように16個の $S(s_1, s_2, s_3, s_4)$ に対する $F(S)$ の行列式の符号が重要な役割を果たすので、それらを順に調べる。便宜上、 $F(S(s_1, s_2, s_3, s_4))$ を $F(s_1, s_2, s_3, s_4)$ と書くことにする。

(i) $S = \text{diag}[0, 0, 0, 0]$ の場合：

$$|F(0, 0, 0, 0)| = |T| = (1 - \alpha_{12}\alpha_{21})(1 - \alpha_{34}\alpha_{43}) \quad (21)$$

であり、仮定1より、 $|T| > 0$ となる。

(ii) $S = \text{diag}[1, 1, 1, 1]$ の場合：

$$|F(1, 1, 1, 1)| = |G| \quad (22)$$

となるが、 G はアドミタンス行列であり、もちろん非負値行列であるから $|G| \geq 0$ が成立する。

(iii) $S = \text{diag}[0, 0, 0, 1]$ の場合：

$$|F(0, 0, 0, 1)| = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_{12} & 0 & g_{14} \\ -\alpha_{21} & 1 & 0 & g_{24} \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} \\ 0 & 0 & -\alpha_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \\ = (1 - \alpha_{12}\alpha_{21})(g_{44} + \alpha_{43}g_{34}) \quad (23)$$

であるが、 G がパラマウント行列なので、 $g_{44} \geq |g_{34}|$ が成り立ち、 $|F(0, 0, 0, 1)| > 0$ が成立する。同様に、 $|F(0, 0, 1, 0)|, |F(0, 1, 0, 0)|, |F(1, 0, 0, 0)|$ も α_{ij}, g_{ij} の値によらず、常に正であることが分かる。

(iv) $S = \text{diag}[0, 1, 1, 1]$ の場合：

$$|F(0, 1, 1, 1)| = \begin{vmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ -\alpha_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ 0 & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \\ = |G_{(234)}^{(234)}| + \alpha_{21}|G_{(234)}^{(134)}| \quad (24)$$

となり、 G はパラマウント行列なので、 $|G_{(234)}^{(234)}| \geq \text{Abs}|G_{(234)}^{(134)}|$ を満たすことから $|F(0, 1, 1, 1)| > 0$ が言える。同様に $S = \text{diag}[1, 0, 1, 1], S = \text{diag}[1, 1, 0, 1], S = \text{diag}[1, 1, 1, 0]$ についても、 $|F(T, G, S)|$ が α_{ij}, g_{ij} によらず常に正であることを示すことが出来る。

(v) $S = \text{diag}[0, 0, 1, 1]$ の場合：

Table-1 The sign of $|F(T, G, S)|$ for each S

(s_1, s_2, s_3, s_4)	Sign						
(0, 0, 0, 0)	+	(0, 1, 0, 0)	+	(1, 0, 0, 0)	+	(1, 1, 0, 0)	+
(0, 0, 0, 1)	+	(0, 1, 0, 1)	?	(1, 0, 0, 1)	?	(1, 1, 0, 1)	+
(0, 0, 1, 0)	+	(0, 1, 1, 0)	?	(1, 0, 1, 0)	?	(1, 1, 1, 0)	+
(0, 0, 1, 1)	+	(0, 1, 1, 1)	+	(1, 0, 1, 1)	+	(1, 1, 1, 1)	+

$$\begin{aligned}
 F(0, 0, 1, 1) &= \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_{12} & g_{13} & g_{14} \\ -\alpha_{21} & 1 & g_{23} & g_{24} \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \\
 &= (1 - \alpha_{12}\alpha_{21}) \begin{vmatrix} g_{33} & g_{34} \\ g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \quad (25)
 \end{aligned}$$

となるが、 G の非負値性より、 $g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43} \geq 0$ が成り立ち、 $|F(0, 0, 1, 1)| > 0$ が言える。 $|F(1, 1, 0, 0)| > 0$ も同様に示される。

(vi) $S = \text{diag}[0, 1, 0, 1]$, $S = \text{diag}[0, 1, 1, 0]$, $S = \text{diag}[1, 0, 0, 1]$, $S = \text{diag}[1, 0, 1, 0]$ の場合：

これらの行列式 $|F(T, G, S)|$ の符号は、 α_{ij} , g_{ij} の値によって正にも負にもなり得る。このことは例えば

$$G = \begin{bmatrix} 12 & -11 & -2 & 1 \\ -11 & 11 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 12 & -11 \\ 1 & 0 & -11 & 11 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{43} = 0.99 \quad (27)$$

とする。ここで G はパラマウント行列である。

$$\begin{aligned}
 |F(1, 0, 1, 0)| &= \begin{vmatrix} 1 & -11 & 0 & 1 \\ -0.99 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -0.99 & 11 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -11 & 0 & 1 \\ 0 & 0.11 & 0 & 0.99 \\ 0 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & -0.99 & 0 & 0.11 \end{vmatrix} \\
 &= 0.11^2 - 0.99^2 < 0 \quad (28)
 \end{aligned}$$

となり、負の値を持つことからわかる。

以上をまとめたものが、**Table-1**である。この表のSignの欄において、「+」は行列式が常に正の値をとることを示し、「?」は行列式の符号が α_{ij} , g_{ij} によって変わることを示す。

「?」のついた4つの場合、すなわち、 $S(0, 1, 0, 1)$,

$S(0, 1, 1, 0)$, $S(1, 0, 0, 1)$, $S(1, 0, 1, 0)$ に対しては、 α_{ij} , g_{ij} の値によって、 $|F(T, G, S)|$ の符号が変化し得るが、次のことが成り立つ。

定理 1 行列 T, G が仮定 1, 2 を満たす時、4つの行列式 $|F(T, G, S(0, 1, 0, 1))|$, $|F(T, G, S(0, 1, 1, 0))|$, $|F(T, G, S(1, 0, 0, 1))|$, $|F(T, G, S(1, 0, 1, 0))|$ の中で負となるのは高々1個である。 □

証明は、付録で行なう。

以上より、16個の行列式のうち、負の値を持つものは高々1個であることが示された。

3.2 同時に真の解とならない S の組合せ

式(5)において、定数ベクトル b を適当に与えれば、16個の S の中のどの S も真の解となり得る。しかし、複数の S について考えると、組合せによっては同時に解とならないことを示すことができる。

以下では、同時に解を持たないような S の組合せについて議論し、いくつかの補題を与える。

例えば、式(5)が $S^1 = S(0, 0, 0, 0)$ と $S^2 = S(0, 0, 0, 1)$ を同時に真の解として持つと仮定しよう。 $S = S^1$ に対応する解を $i^{(1)}$, $v^{(1)}$ とする。 $v^{(1)} = \mathbf{0}$ を式(5)へ代入すると

$$T i^{(1)} = b \quad (29)$$

が得られるので、解は次のようになる。

$$\begin{cases} i_1^{(1)} = \frac{1}{|T|} |b \ t_2 t_3 t_4| \\ i_2^{(1)} = \frac{1}{|T|} |t_1 b \ t_3 t_4| \\ i_3^{(1)} = \frac{1}{|T|} |t_1 t_2 b \ t_4| \\ i_4^{(1)} = \frac{1}{|T|} |t_1 t_2 t_3 b| \end{cases} \quad (30)$$

次に、 $S = S^{(2)}$ のときの解を $i^{(2)}$, $v^{(2)}$ とする。式(5)に $v_1 = v_2 = v_3 = 0, i_4 = 0$ を代入すると

$$[t_1 t_2 t_3 g_4] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = b \quad (31)$$

より,

$$\begin{cases} i_1^{(2)} = \frac{1}{|t_1 t_2 t_3 g_4|} |b t_2 t_3 g_4| \\ i_2^{(2)} = \frac{1}{|t_1 t_2 t_3 g_4|} |t_1 b t_3 g_4| \\ i_3^{(2)} = \frac{1}{|t_1 t_2 t_3 g_4|} |t_1 t_2 b g_4| \\ v_4^{(2)} = \frac{1}{|t_1 t_2 t_3 g_4|} |t_1 t_2 t_3 b| \end{cases} \quad (32)$$

が得られる. 式(30)と(32)の第4行目を見ると

$$\frac{i_4^{(1)}}{v_4^{(2)}} = \frac{|t_1 t_2 t_3 g_4|}{|T|} = \frac{|F(0, 0, 0, 1)|}{|F(0, 0, 0, 0)|} \quad (33)$$

という関係がベクトル b によらず成立することが分かる. 一方, **Table-1**より, $|T| > 0$, $|t_1 t_2 t_3 g_4| > 0$ であるから, $i_4^{(1)} > 0$ と $v_4^{(2)} < 0$ は両立しない. これは, $S = S^{(1)}$ と $S = S^{(2)}$ が同時には真の解とならないことを意味する.

一般に次の補題が成り立つ.

補題 1 2つの解に対応する行列 S を $S^{(1)} = \text{diag}[s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}, s_4^{(1)}]$, $S^{(2)} = \text{diag}[s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}, s_4^{(2)}]$ とする. ある一つの $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ があって,

$$\begin{cases} s_i^{(1)} \neq s_i^{(2)} & (i = p) \\ s_i^{(1)} = s_i^{(2)} & (i \neq p) \end{cases} \quad (34)$$

を満たす時, $S^{(1)}$ と $S^{(2)}$ が共に真の解となるためには,

$$|F(T, G, S^{(1)})| \cdot |F(T, G, S^{(2)})| < 0 \quad (35)$$

となることが必要である. \square

2つの解が両立し得るかどうかを判定する際, 2つの解が式(29)と式(31)のように, 互いに異なる要素を1つだけ持つ場合には補題1で判定できる. 次に $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ が互いに異なる要素を2つ持つ場合について考えよう. 例えば, $S^{(1)} = \text{diag}[0, 0, 0, 0]$, $S^{(3)} = \text{diag}[0, 0, 1, 1]$ とすると

$$[t_1 t_2 t_3 t_4] \begin{bmatrix} i_1^{(1)} \\ i_2^{(1)} \\ i_3^{(1)} \\ i_4^{(1)} \end{bmatrix} = b \quad (36)$$

$$[t_1 t_2 g_3 g_4] \begin{bmatrix} i_1^{(3)} \\ i_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \\ v_4^{(3)} \end{bmatrix} = b \quad (37)$$

より

$$\begin{bmatrix} i_1^{(1)} \\ i_2^{(1)} \\ i_3^{(1)} \\ i_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 1 & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{(3)} \\ i_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \\ v_4^{(3)} \end{bmatrix} \quad (38)$$

が成立する. ここで

$$\begin{bmatrix} k_{13} & k_{14} \\ k_{23} & k_{24} \\ k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{|t_1 t_2 t_3 t_4|} \begin{bmatrix} |g_3 t_2 t_3 t_4| & |g_4 t_2 t_3 t_4| \\ |t_1 g_3 t_3 t_4| & |t_1 g_4 t_3 t_4| \\ |t_1 t_2 g_3 t_4| & |t_1 t_2 g_4 t_4| \\ |t_1 t_2 t_3 g_3| & |t_1 t_2 t_3 g_4| \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (40)$$

とおくと, **Table-1**より

$$k_{33} = \frac{|t_1 t_2 g_3 t_4|}{|t_1 t_2 t_3 t_4|} = \frac{|F(0, 0, 1, 0)|}{|F(0, 0, 0, 0)|} > 0 \quad (41)$$

$$k_{44} = \frac{|t_1 t_2 t_3 g_4|}{|t_1 t_2 t_3 t_4|} = \frac{|F(0, 0, 0, 1)|}{|F(0, 0, 0, 0)|} > 0 \quad (42)$$

$$|K| = \det([t_1 t_2 t_3 t_4]^{-1} [t_1 t_2 g_3 g_4]) \quad (43)$$

$$= \frac{|t_1 t_2 g_3 g_4|}{|t_1 t_2 t_3 t_4|} = \frac{|F(0, 0, 1, 1)|}{|F(0, 0, 0, 0)|} > 0 \quad (44)$$

が成立するので, 式(40)の行列 K はP行列である. 式(38)と(40)より

$$\begin{bmatrix} i_3^{(1)} \\ i_4^{(1)} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} v_3^{(3)} \\ v_4^{(3)} \end{bmatrix} \quad (45)$$

が成立する. このとき $K \in P$ であるから, その性質より

$$v_1^{(3)} \cdot i_1^{(1)} > 0 \quad \text{または} \quad v_2^{(3)} \cdot i_2^{(1)} > 0 \quad (46)$$

の少なくともどちらかが成立する. これは, 解 $S^{(1)} = S(0, 0, 0, 0)$ と $S^{(3)} = S(0, 0, 1, 1)$ が共に真の解であることに反する.

一般に次の補題が成立する.

補題 2 ある2つの解を, $S^{(1)} = \text{diag}[s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}, s_4^{(1)}]$, $S^{(2)} = \text{diag}[s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}, s_4^{(2)}]$ とする. 今, ある $q_1, q_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ ($q_1 \neq q_2$) に対し,

$$\begin{cases} s_i^{(1)} = s_i^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} s_i^* & (\text{for } i \in \{q_1, q_2\}) \\ s_i^{(1)} \neq s_i^{(2)} & (\text{for } i \notin \{q_1, q_2\}) \end{cases} \quad (47)$$

が成り立つと仮定する. このとき

$$F(T, G, S) > 0 \quad \forall S \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} s_i = s_i^* & (i \in \{q_1, q_2\}) \\ s_i \in \{0, 1\} & (i \notin \{q_1, q_2\}) \end{cases} \quad (48)$$

が成立するならば, 解 $S^{(1)}$ と $S^{(2)}$ は同時には真の解とならない. \square

補題1,2より, 次の補題が成り立つ.

補題 3 q_1, q_2 を $\{1, 2, 3, 4\}$ の中にある2つの数とする. これを $q_1 = 1, q_2 = 2$ と仮定する. ある $s_1 = s_1^*, s_2 = s_2^*$

に対して,

$$|F(s_1^*, s_2^*, 0, 0)| > 0 \quad (49)$$

$$|F(s_1^*, s_2^*, 0, 1)| > 0 \quad (50)$$

$$|F(s_1^*, s_2^*, 1, 0)| > 0 \quad (51)$$

$$|F(s_1^*, s_2^*, 1, 1)| > 0 \quad (52)$$

が成り立つならば, 4つの解 $S(s_1^*, s_2^*, 0, 0)$, $S(s_1^*, s_2^*, 0, 1)$, $S(s_1^*, s_2^*, 1, 0)$, $S(s_1^*, s_2^*, 1, 1)$ の中には真の解が高々1個存在する.

証明 $S(s_1^*, s_2^*, 0, 0)$ と $S(s_1^*, s_2^*, 0, 1)$ が同時に真の解を持たないことは, 補題1よりわかる. $S(s_1^*, s_2^*, 1, 0)$ と $S(s_1^*, s_2^*, 1, 1)$, $S(s_1^*, s_2^*, 0, 0)$ と $S(s_1^*, s_2^*, 1, 0)$, $S(s_1^*, s_2^*, 0, 1)$ と $S(s_1^*, s_2^*, 1, 1)$, も同様に, 同時に真の解を持たないとわかる.

補題2より, $S(s_1^*, s_2^*, 0, 0)$ と $S(s_1^*, s_2^*, 1, 1)$ は同時に真の解を持たない. $S(s_1^*, s_2^*, 0, 1)$ と $S(s_1^*, s_2^*, 1, 0)$ も同様である. \square

この補題は, 次の2つの場合に容易に拡張できる.

補題 4 q を $\{1, 2, 3, 4\}$ の中のある1つの数とする. これを, $q = 1$ と仮定する. ある $s_1 = s_1^*$ に対して, 8つの不等式

$$\begin{cases} |F(s_1^*, 0, 0, 0)| > 0 \\ |F(s_1^*, 0, 0, 1)| > 0 \\ \vdots \\ |F(s_1^*, 1, 1, 1)| > 0 \end{cases} \quad (53)$$

が成立するならば, 8つの解 $S(s_1^*, 0, 0, 0), \dots, S(s_1^*, 1, 1, 1)$ の中の真の解は高々1個である. $q = 2, 3, 4$ の場合も同様のことと言える. \square

補題 5 16個の全ての $S \in \{\text{diag}[s_1, s_2, s_3, s_4] | s_i \in \{0, 1\}\}$ に対して,

$$F(T, G, S) > 0 \quad (54)$$

が成立するならば, (5)の解の個数は高々1個である. \square

補題4-5の証明は省略するが, 補題3と同様に示すことができる.

4. 主 結 果

16個の S に対する $|F(T, G, S)|$ の中で, 負となるものの個数を n_0 とする. 3.1節で, $n_0 = 0$ または1であることを示した. そこで, この節では, $n_0 = 0$ 及び $n_0 = 1$ の場合に対し, 解の最大個数を考察する.

1) $n_0 = 0$ のとき

補題5より直ちに次の定理が成立する.

定理 2 $n_0 = 0$ の場合には式(5)は高々1個の解を持つ.

2) $n_0 = 1$ のとき

$n_0 = 1$ のとき, $F(T, G, S) < 0$ となる S は, 表1で, 「?」のついた4つのうちで1つだけであるが, 一般性を失うことなく, それは $S = \text{diag}[0, 1, 0, 1]$ であると仮定することができる. このとき次の定理が成り立つ.

定理 3 $n_0 = 1$ の場合には, 式(5)の解の個数は高々5個である. \square

証明 Table-1の右半分に位置する, $s_1 = 1$ である8つの S , すなわち $\text{diag}[1, s_2, s_3, s_4]$ ($s_2, s_3, s_4 \in \{0, 1\}$) に対する $|F(S)|$ は全て正であるから, 補題4より, この8つの S の中には真の解は高々1個しかないと分かる.

また, $s_1 = 0, s_2 = 0$ である4つの S (Table-1の一番左の列), すなわち $\text{diag}[0, 0, s_3, s_4]$ ($s_3, s_4 \in \{0, 1\}$) に対する $|F(S)|$ も全て正であることから, 補題3より, この4つの中にも真の解は高々1つしかない.

さらに, $S = \text{diag}[0, 1, 1, 0], \text{diag}[0, 1, 1, 1]$ の2つについても, $|F(S)| > 0$ であるから, 補題2より, この2つの中にも解は高々1個しかない.

残りの $\text{diag}[0, 1, 0, 0], \text{diag}[0, 1, 0, 1]$ が共に真の解であるとしても, 真の解の個数は, 合計で高々5個である. \square

5. ま と め

本章では, トランジスタ2個と線形抵抗, 直流電源からなる回路についてトランジスタをEbers-Mollモデルで表した時の非線形抵抗の特性を理想ダイオード特性で置き換えたモデルについて考察し, 回路の物理的制約を考慮に入れた下での解の個数は高々5個であることを証明した.

参 考 文 献

- 1) J. J. Ebers and J. L. Moll, "Large scale behavior of junction transistors," Proc. of IRE, pp. 1761-1772, Dec. 1954.
- 2) T. Nishi and Y. Kawane, "On the Number of Solutions of Nonlinear Resistive Circuits," IEICE Trans. on Fundamentals, vol.E 74, no.3, pp.479-487, Mar. 1991.
- 3) T. Nishi, "A transistor circuit can possess infinitely many solutions on the assumption that the first and second derivatives of v - i curves of nonlinear resistors are positive," Proc. ISCAS '96, Atlanta, GA, May 1996, pp. III 20-23.
- 4) Y. Jitsumatsu and T. Nishi, "Maximum Number of Solutions for a Kind of Nonlinear Simultaneous Equations with 2 Variables," IEICE Trans. on Fundamentals, vol.J82-A, no.7, pp.1175-1176, July, 1999.
- 5) Y. Jitsumatsu and T. Nishi, "A Note on the Analysis of Transistor Circuits Where Transistors Are Modeled by Ideal Diodes and CCCSs," Proc. International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Dresden, Sep. 2000, pp.129-132.
- 6) A. G. Hovanskii, "On a class of systems of transcenden-

tal equations," Soviet Math. Doklady, Vol.255, pp.804-807, 1980. [Translation from: Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol.22, No.3, 1980.]

付 録

A 定理 1 の証明

仮定 2 より, 線形6端子 N は Fig.3 のように全ての節点間に抵抗が接続されているとする. 節点 i, j 間の抵抗のコンダクタンスを y_{ij} とする. 直流電源は, 等価な電流源で置き換えれば, Fig.3 のようにできる.

このとき, k 番目の端子の電位を V_k とおく. また一般性を失うことなく, $V_6 = 0$ とおく. 線形6端子 N に対する節点方程式は

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{j \neq 1} y_{1j} V_1 - y_{12} V_2 - y_{13} V_3 - y_{14} V_4 - y_{15} V_5 \\ I_2 &= -y_{21} V_1 + \sum_{j \neq 2} y_{2j} V_2 - y_{23} V_3 - y_{24} V_4 - y_{25} V_5 \\ I_3 &= -y_{31} V_1 - y_{32} V_2 + \sum_{j \neq 3} y_{3j} V_3 - y_{34} V_4 - y_{35} V_5 \quad (\text{A.1}) \\ I_4 &= -y_{41} V_1 - y_{42} V_2 - y_{43} V_3 + \sum_{j \neq 4} y_{4j} V_4 - y_{45} V_5 \\ I_5 &= -y_{51} V_1 - y_{52} V_2 - y_{53} V_3 - y_{54} V_4 + \sum_{j \neq 5} y_{5j} V_5 \end{aligned}$$

となる. ここで $y_{ij} = y_{ji}$ であり

$$\begin{cases} I_1 = \hat{i}_1 + b_1 \\ I_2 = \hat{i}_2 + b_2 \\ I_3 = \hat{i}_3 + b_3 \\ I_4 = \hat{i}_4 + b_4 \\ I_5 = -\hat{i}_1 - \hat{i}_2 - b_1 - b_2 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

である. この式から $I_1 + I_2 + I_5 = 0$ なので

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

一方 Fig.3 の端子間電圧 v_1, \dots, v_4 から

$$\begin{cases} V_1 = v_1 + V_5 \\ V_2 = v_2 + V_5 \\ V_3 = v_3 \\ V_4 = v_4 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

が成立する. 行列で表すと

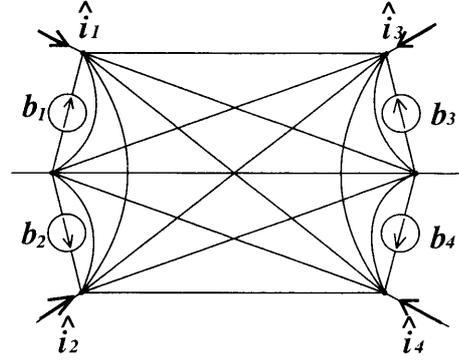


Fig.3 Structure of linear 4-port N

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ V_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

したがって, 式(A.3)(A.5)を(A.1)に代入すると

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{Y} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ V_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

が得られる. ここで

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{j \neq 1} y_{1j} & -y_{12} & -y_{13} & -y_{14} & \tilde{y}_{15} \\ -y_{21} & \sum_{j \neq 2} y_{2j} & -y_{23} & -y_{24} & \tilde{y}_{25} \\ -y_{31} & -y_{32} & \sum_{j \neq 3} y_{3j} & -y_{34} & \tilde{y}_{35} \\ -y_{41} & -y_{42} & -y_{43} & \sum_{j \neq 4} y_{4j} & \tilde{y}_{45} \\ \tilde{y}_{15} & \tilde{y}_{25} & \tilde{y}_{35} & \tilde{y}_{45} & \tilde{y}_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_{15} = y_{13} + y_{14} + y_{16} \\ \tilde{y}_{25} = y_{23} + y_{24} + y_{26} \\ \tilde{y}_{35} = -(y_{31} + y_{32} + y_{35}) \\ \tilde{y}_{45} = -(y_{41} + y_{42} + y_{45}) \\ \tilde{y}_{55} = y_{13} + y_{14} + y_{16} \\ \quad + y_{23} + y_{24} + y_{26} + y_{53} + y_{54} + y_{56} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

とおいた.

式(A.6)から変数 V_5 を消去して, 第 5 行目を省くことに

より,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

が得られる. ここで, 行列 $G = \{g_{ij}\}$ の対角要素は,

$$g_{ii} = \sum_{j \neq i} y_{ij} - \frac{(\tilde{y}_{i5})^2}{\tilde{y}_{55}} \quad (\text{A.10})$$

であり, G は対称, すなわち, 非対角要素は $g_{ij} = g_{ji}$ で,

$$g_{ij} = -y_{ij} - \frac{\tilde{y}_{i5}\tilde{y}_{j5}}{\tilde{y}_{55}} \quad (j \neq i) \quad (\text{A.11})$$

となる.

式(A.2)の第1式から第4式を式(A.9)に代入することにより, 式(5)が導かれる. ゆえに, 式(5)の行列 G は式(A.10), (A.11)で与えられる.

式(A.10), (A.11)を用い, $|F(T, G, S(0, 1, 0, 1))| + |F(T, G, S(0, 1, 1, 0))|$ を Mathematica で記号計算すると以下の式が得られ, これから明らかに上式は T, G によらず正であることが分かる. $|F(T, G, S)|$ が負となる可能性のある4つの S の中でどの2つを持ってきてもその和が正であることが同様に示される. したがって $|F(T, G, S)|$ が負となる可能性のある4つの S の中で負となるのは高々1つである. \square

$$\begin{aligned} & |F(T, G, S(0, 1, 0, 1))| + |F(T, G, S(0, 1, 1, 0))| \\ &= (((1 - \alpha_{34})(1 - \alpha_{21}) + (1 - \alpha_{43}))y_{13}y_{26}y_{45} + \\ & (1 - \alpha_{21})(2 - \alpha_{34} - \alpha_{43}))(\\ & y_{12}y_{13}y_{14} + y_{12}y_{14}y_{23} + y_{13}y_{14}y_{23} + y_{12}y_{13}y_{24} + y_{13}y_{14}y_{24} + \\ & y_{12}y_{23}y_{24} + y_{13}y_{23}y_{24} + y_{14}y_{23}y_{24} + y_{16}y_{23}y_{24} + y_{13}y_{14}y_{25} + \\ & y_{13}y_{14}y_{26} + y_{12}y_{13}y_{34} + y_{12}y_{14}y_{34} + y_{12}y_{16}y_{34} + y_{12}y_{23}y_{34} + \\ & y_{13}y_{23}y_{34} + y_{14}y_{23}y_{34} + y_{16}y_{23}y_{34} + y_{12}y_{24}y_{34} + y_{13}y_{24}y_{34} + \\ & y_{14}y_{24}y_{34} + y_{16}y_{24}y_{34} + y_{12}y_{26}y_{34} + y_{13}y_{26}y_{34} + y_{14}y_{26}y_{34} + \\ & y_{16}y_{26}y_{34} + y_{12}y_{14}y_{35} + y_{12}y_{24}y_{35} + y_{14}y_{24}y_{35} + y_{14}y_{26}y_{35} + \\ & y_{12}y_{34}y_{35} + y_{12}y_{13}y_{45} + y_{12}y_{23}y_{45} + y_{13}y_{23}y_{45} + y_{12}y_{34}y_{45} + \\ & y_{12}y_{35}y_{45} + y_{12}y_{34}y_{56}) + \\ & (1 - \alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{34})y_{16}y_{24}y_{35} + (1 - \alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{43})y_{16}y_{23}y_{45} + \\ & (2 - \alpha_{34} - \alpha_{43})(\\ & y_{26}y_{34}y_{35} + y_{14}y_{23}y_{25} + y_{13}y_{24}y_{25} + y_{23}y_{24}y_{25} + y_{13}y_{25}y_{34} + \\ & y_{14}y_{25}y_{34} + y_{16}y_{25}y_{34} + y_{23}y_{25}y_{34} + y_{24}y_{25}y_{34} + y_{25}y_{26}y_{34} + \\ & y_{14}y_{23}y_{35} + y_{23}y_{24}y_{35} + y_{14}y_{25}y_{35} + y_{24}y_{25}y_{35} + y_{23}y_{34}y_{35} + \\ & y_{24}y_{34}y_{35} + y_{25}y_{34}y_{35} + y_{13}y_{24}y_{45} + y_{23}y_{24}y_{45} + y_{13}y_{25}y_{45} + \\ & y_{23}y_{25}y_{45} + y_{23}y_{34}y_{45} + y_{24}y_{34}y_{45} + y_{25}y_{34}y_{45} + y_{26}y_{34}y_{45} + \\ & y_{23}y_{35}y_{45} + y_{24}y_{35}y_{45} + y_{25}y_{35}y_{45} + y_{26}y_{35}y_{45} + y_{23}y_{34}y_{56} + \\ & y_{24}y_{34}y_{56} + y_{25}y_{34}y_{56} + y_{26}y_{34}y_{56}) + \\ & (1 - \alpha_{21}\alpha_{43})y_{14}y_{23}y_{56} + (1 - \alpha_{21}\alpha_{34})y_{13}y_{24}y_{56} + \\ & (1 - \alpha_{21})(\\ & y_{12}y_{16}y_{35} + y_{12}y_{26}y_{35} + y_{16}y_{26}y_{35} + y_{12}y_{13}y_{16} + y_{12}y_{14}y_{16} + \\ & y_{12}y_{16}y_{23} + y_{13}y_{16}y_{23} + y_{14}y_{16}y_{23} + y_{12}y_{16}y_{24} + y_{13}y_{16}y_{24} + \\ & y_{14}y_{16}y_{24} + y_{12}y_{13}y_{26} + y_{12}y_{14}y_{26} + y_{13}y_{16}y_{26} + y_{14}y_{16}y_{26} + \\ & y_{12}y_{23}y_{26} + y_{13}y_{23}y_{26} + y_{14}y_{23}y_{26} + y_{16}y_{23}y_{26} + y_{12}y_{24}y_{26} + \\ & y_{13}y_{24}y_{26} + y_{14}y_{24}y_{26} + y_{16}y_{24}y_{26} + y_{12}y_{13}y_{36} + y_{12}y_{14}y_{36} + \\ & y_{12}y_{16}y_{36} + y_{12}y_{23}y_{36} + y_{13}y_{23}y_{36} + y_{14}y_{23}y_{36} + y_{16}y_{23}y_{36} + \\ & y_{12}y_{24}y_{36} + y_{13}y_{24}y_{36} + y_{14}y_{24}y_{36} + y_{16}y_{24}y_{36} + y_{12}y_{26}y_{36} + \\ & y_{13}y_{26}y_{36} + y_{14}y_{26}y_{36} + y_{16}y_{26}y_{36} + y_{12}y_{35}y_{36} + y_{12}y_{26}y_{45} + \\ & y_{16}y_{26}y_{45} + y_{12}y_{16}y_{45} + y_{12}y_{36}y_{45} + y_{12}y_{13}y_{46} + y_{12}y_{14}y_{46} + \\ & y_{12}y_{16}y_{46} + y_{12}y_{23}y_{46} + y_{13}y_{23}y_{46} + y_{14}y_{23}y_{46} + y_{16}y_{23}y_{46} + \\ & y_{12}y_{24}y_{46} + y_{13}y_{24}y_{46} + y_{14}y_{24}y_{46} + y_{16}y_{24}y_{46} + y_{12}y_{26}y_{46} + \\ & y_{13}y_{26}y_{46} + y_{14}y_{26}y_{46} + y_{16}y_{26}y_{46} + y_{12}y_{35}y_{46} + y_{12}y_{45}y_{46} + \\ & y_{12}y_{13}y_{56} + y_{12}y_{14}y_{56} + y_{12}y_{23}y_{56} + y_{13}y_{23}y_{56} + y_{12}y_{24}y_{56} + \\ & y_{14}y_{24}y_{56} + y_{12}y_{35}y_{56} + y_{12}y_{36}y_{56} + y_{12}y_{45}y_{56} + y_{12}y_{46}y_{56}) + \\ & y_{13}y_{25}y_{36} + y_{14}y_{25}y_{36} + y_{16}y_{25}y_{36} + y_{23}y_{25}y_{36} + y_{24}y_{25}y_{36} + \\ & y_{25}y_{26}y_{36} + y_{23}y_{35}y_{36} + y_{24}y_{35}y_{36} + y_{25}y_{35}y_{36} + y_{26}y_{35}y_{36} + \\ & y_{16}y_{25}y_{35} + y_{13}y_{16}y_{25} + y_{14}y_{16}y_{25} + y_{16}y_{23}y_{25} + y_{16}y_{24}y_{25} + \\ & y_{13}y_{25}y_{26} + y_{14}y_{25}y_{26} + y_{23}y_{25}y_{26} + y_{24}y_{25}y_{26} + y_{16}y_{23}y_{35} + \\ & y_{23}y_{26}y_{35} + y_{24}y_{26}y_{35} + y_{25}y_{26}y_{35} + y_{16}y_{24}y_{45} + y_{16}y_{25}y_{45} + \\ & y_{23}y_{26}y_{45} + y_{24}y_{26}y_{45} + y_{25}y_{26}y_{45} + y_{23}y_{36}y_{45} + y_{24}y_{36}y_{45} + \\ & y_{25}y_{36}y_{45} + y_{26}y_{36}y_{45} + y_{13}y_{25}y_{46} + y_{14}y_{25}y_{46} + y_{16}y_{25}y_{46} + \\ & y_{23}y_{25}y_{46} + y_{24}y_{25}y_{46} + y_{25}y_{26}y_{46} + y_{23}y_{35}y_{46} + y_{24}y_{35}y_{46} + \\ & y_{25}y_{35}y_{46} + y_{26}y_{35}y_{46} + y_{23}y_{45}y_{46} + y_{24}y_{45}y_{46} + y_{25}y_{45}y_{46} + \\ & y_{26}y_{45}y_{46} + y_{13}y_{25}y_{56} + y_{14}y_{25}y_{56} + y_{23}y_{25}y_{56} + y_{24}y_{25}y_{56} + \\ & y_{13}y_{26}y_{56} + y_{14}y_{26}y_{56} + y_{23}y_{26}y_{56} + y_{24}y_{26}y_{56} + y_{23}y_{35}y_{56} + \\ & y_{24}y_{35}y_{56} + y_{25}y_{35}y_{56} + y_{26}y_{35}y_{56} + y_{23}y_{36}y_{56} + y_{24}y_{36}y_{56} + \\ & y_{25}y_{36}y_{56} + y_{26}y_{36}y_{56} + y_{23}y_{45}y_{56} + y_{24}y_{45}y_{56} + y_{25}y_{45}y_{56} + \\ & y_{26}y_{45}y_{56} + y_{23}y_{46}y_{56} + y_{24}y_{46}y_{56} + y_{25}y_{46}y_{56} + y_{26}y_{46}y_{56}) \\ & / (y_{13} + y_{14} + y_{16} + y_{23} + y_{24} + y_{26} + y_{35} + y_{45} + y_{56}) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$