

正方形ダクト乱流の直接数値シミュレーション

関本, 敦
大阪大学基礎工学研究科機能創成専攻

河原, 源太
大阪大学基礎工学研究科機能創成専攻

Uhlmann, Markus
Turbulent Flow Group, Institute for Hydromechanics, University of Karlsruhe

Pinell, Alfredo
Modelling and Numerical Simulation Unit, CIEMAT

<https://doi.org/10.15017/1470164>

出版情報 : 九州大学情報基盤研究開発センター全国共同利用システム広報. 2 (2), pp.43-49, 2008-11.
九州大学情報統括本部広報委員会
バージョン :
権利関係 :

正方形ダクト乱流の直接数値シミュレーション

関本 敦* 河原 源太*
ウルマン マルクス† ピネリ アルフレド‡

1 緒言

矩形管路 (ダクト) 内乱流にはプラントルの第二種二次流れと呼ばれる管軸に垂直な速度を持つ平均流が存在し, 物質や熱, 運動量の平均的な輸送に影響を及ぼすため, 工学的関心もたれている. これまでのダクト乱流中の二次流れに関する研究^{1,2)}では, 主に二次流れと各レイノルズ応力成分や平均渦度成分などの統計量との関係について調べられているが, 二次流れの生成機構は未だ十分に明らかにされていない. 近年の乱流研究の結果, 壁面乱流の自己生成維持サイクルに重要な役割を果たす縦渦やストリーク³⁾といった秩序構造の存在が明らかになっている. 矩形ダクト中の乱流現象によって生成する二次流れには, これらの秩序構造が大きく関与していると考えられるが, 時々刻々の秩序構造の挙動は複雑で, 二次流れとの直接的な対応付けには大きな困難が伴う.

本稿では, スペクトル法を用いた正方形ダクト乱流の直接数値シミュレーション (DNS) の方法と, 乱流中の秩序構造に立脚した二次流れの生成機構解明の試みを紹介し, 最後に PRIMERGY を用いた正方形ダクト乱流の並列計算について報告する.

2 数値計算方法

無限の長さの真っ直ぐな正方形ダクト内を流れる非圧縮性流体の運動を考え, 直行座標系を図 1 のように定義する. その支配方程式は Navier-Stokes 方程式と連続の式で,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

のように表わされる. ここで, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ で, (u, v, w) は (x, y, z) 方向の流速, p は密度で割った圧力, ν は動粘性係数である. 管軸方向には周期境界条件, ダクト壁面に滑り無しと非貫通の条件を課す. これらの支配方程式を, 標準的な圧力修正法をもとにして, 粘性項にクラ

*大阪大学基礎工学研究科機能創成専攻 sekimoto@me.es.osaka-u.ac.jp

†Turbulent Flow Group, Institute for Hydromechanics, University of Karlsruhe, Germany

‡Modelling and Numerical Simulation Unit, CIEMAT, Madrid, Spain

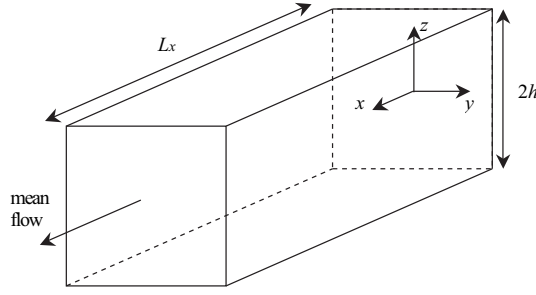


図 1: 計算領域と座標系． h はダクト半幅， L_x 管軸方向周期長さ．

ンク・ニコルソン法を適用して半陰的に離散化し，非線形項には 3 段のルンゲ・クッタ法を用いて陽的に解く．これを離散的に表わすと次のようになる．

$$\frac{u^* - u^{k-1}}{\Delta t} = -2\alpha_k \nabla p^{k-1} - \gamma_k [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]^{k-1} - \zeta_k [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]^{k-2} + \alpha_k \nu \nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^{k-1}) \quad (3)$$

$$\nabla^2 \phi^k = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{2\alpha_k \Delta t} \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^* - 2\alpha_k \Delta t \nabla \phi^k \quad (5)$$

$$p^k = p^{k-1} + \phi^k - \alpha_k \Delta t \nu \nabla^2 \phi^k \quad (6)$$

ここで， $k = 1, 2, 3$ はルンゲ・クッタのステップ数で $k = 3$ は次の時刻の値に相当する．また， \mathbf{u}^* は推定中間流速， ϕ は擬圧力である．ルンゲ・クッタ法のステップ数に関する係数は， $\alpha_k = [\frac{4}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{6}]$ ， $\gamma_k = [\frac{8}{15}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}]$ ， $\zeta_k = [0, -\frac{17}{60}, -\frac{5}{12}]$ であり，流速と圧力に関して二次精度である⁴⁾．流速変数 \mathbf{u} と圧力変数 p は管軸方向 (x) に等間隔に配置し， x 方向に関して離散フーリエ級数展開を行う．また，管軸に垂直方向 (y, z) にはチェビシエフ多項式展開を用い， y, z 方向の選点はチェビシエフ・ガウス・ロバット配置する．支配方程式の離散式に管軸 (x) 方向にガラーキン法を適用すると，式 (3), (4) から各変数のフーリエ係数に関して次のような Helmholtz 方程式が得られる．

$$\nabla_{2D}^2 \hat{\mathbf{u}}^* - \left(k_x^2 + \frac{1}{\alpha_k \nu \Delta t} \right) \hat{\mathbf{u}}^* = \hat{\mathbf{R}}, \quad \hat{\mathbf{u}}^* = 0 \quad \forall x \in \Gamma \quad (7)$$

$$\nabla_{2D}^2 \hat{\phi} - k_x^2 \hat{\phi} = \hat{S}, \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \forall x \in \Gamma \quad (8)$$

ここで， k_x は管軸方向波数， $\hat{(\cdot)}$ は各変数のフーリエ係数を表わす．また， $\nabla_{2D}^2 \equiv \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ ， \mathbf{n} は境界 Γ 上の外向き法線ベクトルである．それぞれの右辺は，

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{\alpha_k \nu} \left(2\alpha_k \nabla \hat{p}^{k-1} + \gamma_k [\widehat{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}]^{k-1} + \zeta_k [\widehat{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}]^{k-2} - \alpha_k \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}^{k-1} - \frac{\hat{\mathbf{u}}^{k-1}}{\Delta t} \right)$$

$$\hat{S} = \frac{\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^*}{2\alpha_k \Delta t}$$

である．また，管軸 (x) 方向に関してのみ 2/3 則を用いてアライアス誤差を完全に取り除き，線形項はスペクトル空間で計算し，非線形項は物理格子点上で計算する（擬スペクトル法）．

式 (7), (8) の解法は, 物理空間で解く高速対角法⁵⁾ (コロケーション法) を採用する. 流量一定の条件下でシミュレーションを行い, 管軸方向格子幅 Δx^+ は 15 以下, 管壁に垂直方向格子幅 Δy^+ , Δz^+ の最大値は 6 より小さくなるように選んだ (ここで, $\langle \cdot \rangle^+$ は平均摩擦速度 u_τ と ν で規格化した無次元長さである). この擬スペクトル法によって得られた平均流速分布や各乱流統計量は, 過去の差分法を用いた直接シミュレーション¹⁾ や実験測定⁶⁾ との良好一致が認められた. 以下ではレイノルズ数 $Re_b \equiv u_b h / \nu \leq 3500$ (u_b は平均流速, h はダクトの半径, ν は動粘性係数) におけるシミュレーション結果を示す.

3 平均流のレイノルズ数依存性

$Re_b = 1100, 1500, 2200, 3500$ での長時間平均流速場を図 2(a) に示す ($L_x/h = 4\pi$, 平均した時間は $O(1000h/u_b)$). 対称性を考慮して, ダクト断面の 4 分の 1 領域のみを示す. 平均二次流れ (図 2(a) のベクトル線) の影響により, 平均管軸方向流速分布 (図 2(a) の等高線) には円管内乱流にはみられない変形が観測できる. 二次流れ渦はレイノルズ数が大きくなるにつれて平均流速分布は図 2(a), 平均管軸方向渦度分布は (b) のように変化し, 二次流れの渦中心および, 管軸方向渦度分布の極大 (小) 点は角へと近づく (ただし, 今回は低レイノルズ数領域のみでの結果であることに注意されたい). 次に, それぞれレイノルズ数において, 平均壁面せん断応力 $\bar{\tau}_w$ で規格化された壁面せん断応力の分布を図 3 に示す. レイノルズ数が 1100, 1500 の場合は壁面中央付近で極小点をもち, 角寄りの位置で極大点をとるが, 2200, 3500 の場合は中央と角寄りの位置でも極大点をもつ. 角付近の極大点の角からの距離は, どのレイノルズ数でも $50\nu/u_\tau$ 程度である. このことから, $\bar{\tau}_w$ のレイノルズ数依存性は壁摩擦長 ν/u_τ でスケールされる壁面近傍の秩序構造 (縦渦) と密接な関係があることがわかる.

4 秩序構造と二次流れ - 縦渦中心位置の PDF -

ここでは, 二次流れと秩序構造の関連性を調べるために秩序構造を定義し定量的に議論を進める. 縦渦の中心軸がある管断面を通る点 (縦渦中心位置) を次の 2 つの条件,

- 速度勾配テンソルの第二不変量が管断面内で極大値をとる点,
- その極大点の周りで管断面上に射影された流線が螺旋形である条件⁷⁾ を満足する点

として定義する. 縦渦中心位置の確率密度分布 (PDF) を描くと図 4(a) ~ (d) のようになる. これらは $Re_b = 1100, 2200$ の場合の長時間サンプリング ($O(1000h/u_b)$) の結果で, (a), (c) は正 (時計回り) の渦度を持つ縦渦, (b), (d) は負 (反時計回り) の渦度を持つ縦渦中心位置の PDF を示しており, 二次流れ渦の中心付近では PDF の値は大きくなっている. したがって, 秩序構造 (縦渦) が側壁の影響を受けることによって, 特定の領域に存在する頻度が大きくなり, 縦渦の重ね合わせとして平均速度場に二次流れが生じていると考えられる⁸⁾. ここで, 補足しておくとして, $Re_b = 1100$ ($Re_\tau \equiv u_\tau h / \nu \approx 78$, ダクト幅 $H^+ = 2h^+ \approx 155$) のように一つの壁面上に縦渦対が 1 つ以上納まるような場合には乱流状態が持続するが, レイノルズ数がより

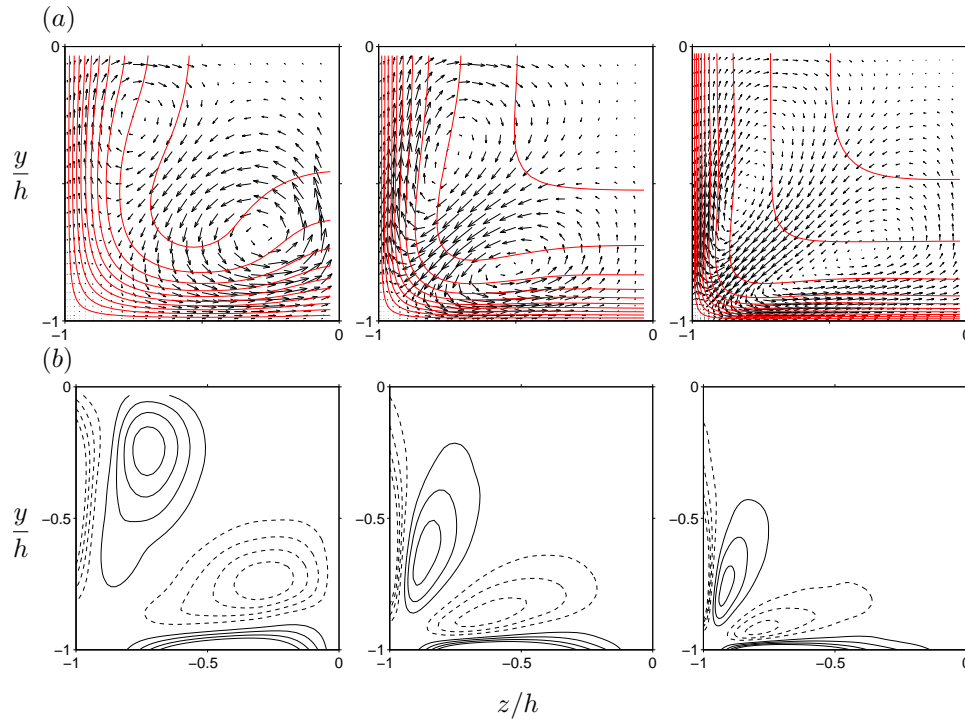


図 2: (a) 時間平均速度場 (4 象限についても平均し対象な正方形の領域のみ表示) . $Re_b = 1500$ (左), $Re_b = 2200$ (中央), $Re_b = 3500$ (右) . 管軸に垂直方向の速度成分を矢印で, 管軸方向速度を等高線によって示す (ダクトの管軸方向周期長さ $L_x/h = 4\pi$, 平均時間は $O(1000h/u_b)$) . (b) 管軸方向温度場 . 正の温度の等高線を実線で, 負の温度の等高線を破線で示す .

低い場合には, 壁面上に縦渦対が納まらずに乱流活動が維持できなくなり層流となる . 実際, $Re_b = 1100$ はほぼ臨界レイノルズ数 (層流になる限界のレイノルズ数) である ⁸⁾ .

レイノルズ数の増加に伴い $50\nu/u_\tau$ 程度の直径を持つ縦渦は, 管路幅に対して小さくなるため, 縦渦は図 4(c), (d) のように壁面に沿う方向に比較的広い範囲に存在するようになる . これは, 縦渦構造が壁面に沿ってある程度自由に移動することができるようになるためである . また, $Re_b = 2200$ ($Re_\tau \approx 220$, ダクト幅 $H^+ \approx 440$) では, 縦渦直径とダクト幅のスケール比を考えると一つの壁面上には 2 組の縦渦対が納まるように存在できる . そのため, 図 4(c), (d) には, 角寄りの位置だけでなく壁面中央付近にも PDF の極大点が存在している .

今回示したような低レイノルズ数領域では, 壁面付近の秩序構造 (縦渦と低速ストリーク) は, 隣接する壁面の影響を受けて特定のспан方向位置に現れる . その位置は, ダクト幅と秩序構造の長さスケールとの比によって異なるため, レイノルズ数によって二次流れの様子や平均壁面せん断応力の分布が異なる . しかしながら, さらに高レイノルズ数領域においては, 壁面付近の縦渦と二次流れ渦とのスケール差が大きくなり, これらを直接関連付けることはできない . この場合は, 二次流れを生成するような大きなスケールを持つ乱流構造に着目する必要があるだろう .

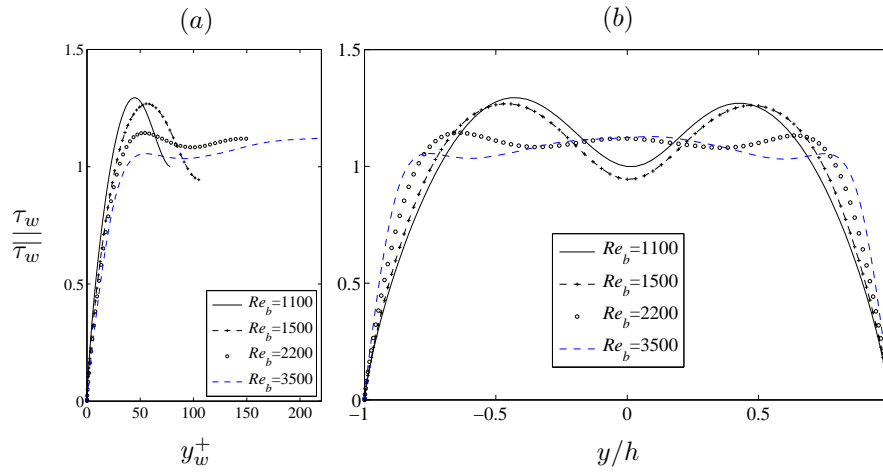


図 3: 管壁面全体の平均壁面剪断応力 τ_w で規格化された平均壁面剪断応力分布 τ_w . 横軸は (a) 角からの距離 y_w を壁面摩擦長 ν/u_τ で規格化, (b) 管壁面中央からの距離 y をダクト幅 h で規格化 .

5 PRIMERGY での並列計算

高レイノルズ数における DNS を実用的な時間内で行うためには, スーパーコンピュータの利用が必要不可欠である. 九州大学情報基盤研究開発センター所有の PRIMERGY を使用して, MPI を用いて並列化したダクトコードの並列性能テストの結果を図 5 に示す. 格子分解能は現在検討している計算の中で最大である $512(x) \times 325(y) \times 325(z)$ の場合で, 4 コアでの計算時間を基準 (この格子分解能ではメモリー使用量が多く, 計算を実行するためにはダクト領域を最低でも 4 分割する必要がある) として, 8, 16, 32, 64 コアの場合の計算速度の向上率を示した. 64 コアを用いた場合は 4 コアの場合と比べて約 15 倍の速度向上 (並列化性能は約 90%) となっている.

最後に, これまでに達成できた比較的高いレイノルズ数 ($Re_b = 8300, Re_\tau \approx 450, L_x/h = 0.2\pi$) の乱流場の縦渦構造の可視化結果を図 6 に示す. この図では流れは紙面手前の方から奥へと向かっており, 縦渦は速度勾配テンソルの第二不変量の等値面によって可視化した. 縦渦は等値面上での管軸方向 (x) 渦度の正負で色付けされており, 正の渦度をもつ (時計回りの) 縦渦を明るい灰色で, 負の渦度を持つ (反時計回りの) 縦渦を暗い灰色で表す. 上述したように, 高レイノルズ数の場合には, 壁面近傍の縦渦構造は微細な構造となり, 統計量に見られる二次流れ渦のスケールとは大きな隔たりがある. 統計量を得るためには長時間の平均操作が必要で, 高レイノルズ数の流れ場の統計量はまだ得られていないが, 高レイノルズ数における平均二次流れもダクト全体に及ぶ流れである. そのため, 壁面近傍の微細な縦渦のみでは平均二次流れの生成機構は説明できないため, より大きな乱流構造に着目する必要がある.

本研究のような乱流構造に着目した研究は他の系でも多くなされており, DNS によって得られた詳細な乱流データは乱流の現象をより深く理解し, 新たな乱流モデルの開発へと応用されていくことが期待される.

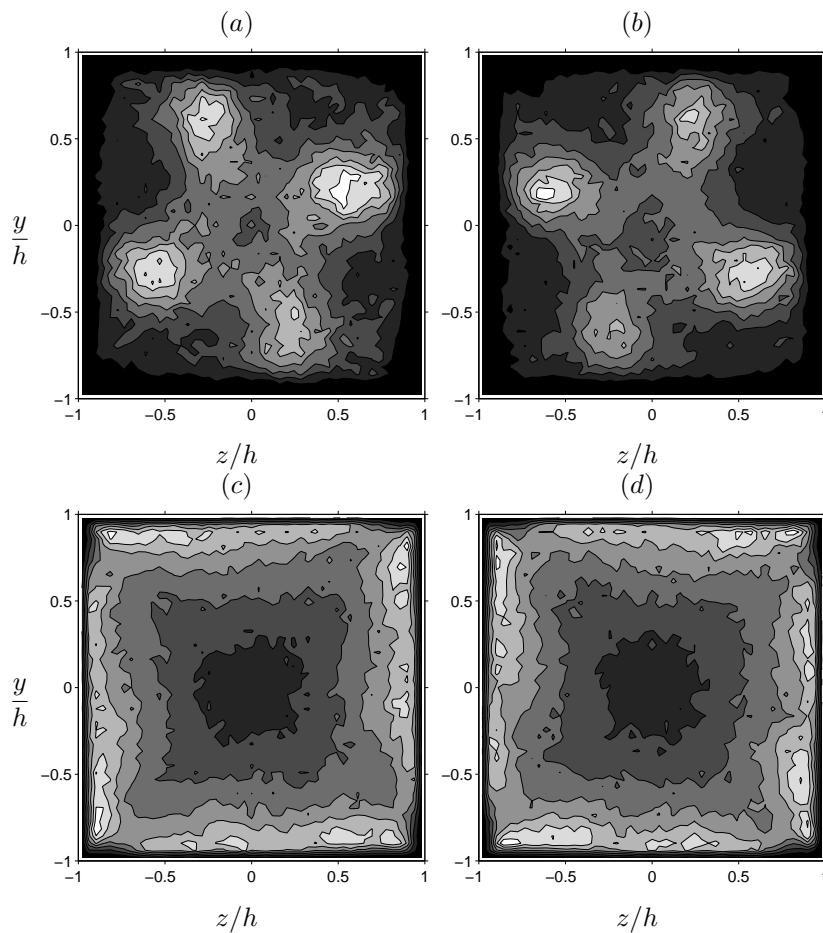


図 4: 縦渦中心位置の確率密度関数 (PDF) , (a), (b) $Re_b = 1100$; (c), (d) $Re_b = 2200$ ($L_x/h = 4\pi$). (a), (c) は正の渦度をもつ (時計回りの) 縦渦の PDF , (b), (d) は負の渦度をもつ (反時計回りの) 縦渦の PDF.

文献

- 1) Gavrilakis, S., *J. Fluid Mech.*, **244** (1992), 101-129
- 2) Gessner, *J. Fluid Mech.*, **58** (1973), 1-25
- 3) Hamilton, J. M., Kim, J. and Waleffe, F., *J. Fluid Mech.*, **287** (1995), 317-348
- 4) Verzicco, R. and Orlandi, P., *J. Comput. Phys.*, **123** (1996), 402-414
- 5) Haldenwang, P., Labrosse, G., Abboudi, S. and Deville, M., *J. Comput. Phys.*, **55** (1984), 115-128
- 6) 河原源太・ほか 4 名, *機論*, **66-641**, B(2000), 95-102
- 7) Kida, S. and Miura, H., *J. Phys. Soc. Japan* (1998), **67**(7), 2166-2169
- 8) Uhlmann, M. Pinelli, A. Kawahara, G and Sekimoto, A., *J. Fluid Mech.*, **588**(2007), 153-162

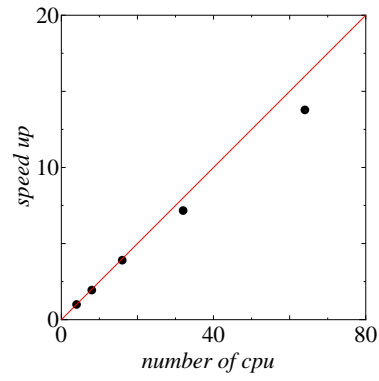


図 5: PRIMERGY での速度向上率. 格子数は $512(x) \times 325(y) \times 325(z)$ で, 4 コアでの計算時間を基準とし, 8,16,32,64 コアの場合について示す.

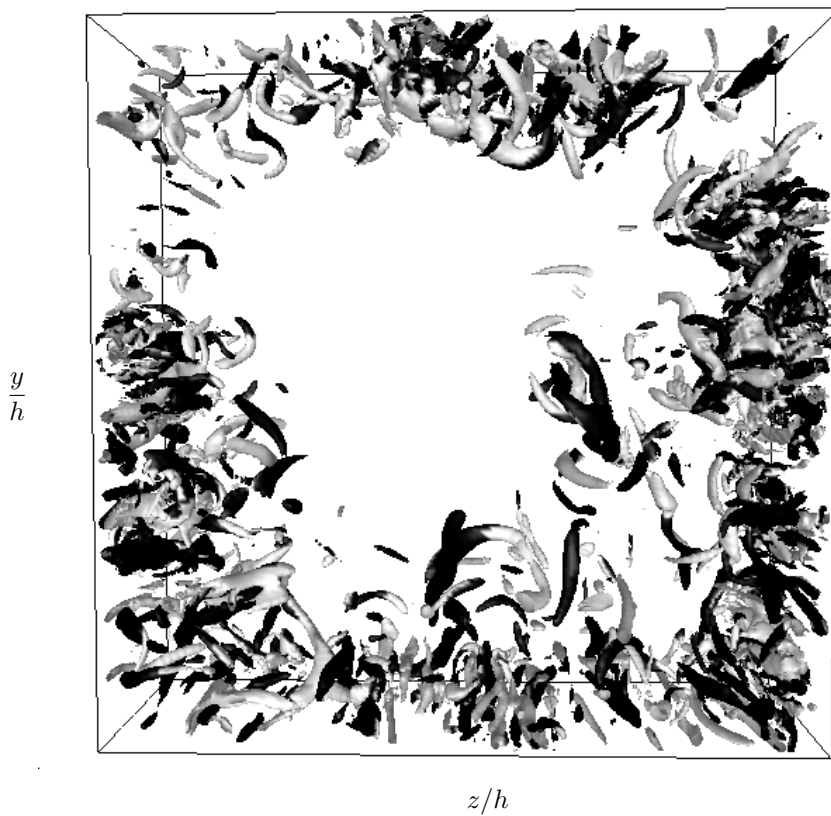


図 6: 高レイノルズ数ダクト流れの瞬間乱流構造 (速度勾配テンソルの第二不変量の正の等値面, $Re_b = 8300, Re_\tau \approx 450, L_x/h = 0.2\pi$). 流れの方向は紙面手前から奥. 正の渦度を持つ (時計回り) 縦渦を明るい灰色で, 負の渦度を持つ (反時計回りの) 縦渦を暗い灰色で示す.