

## 非線形システムの生成する多変量時系列に対する共分散構造分析に基づく近似表現と粒子フィルタを用いた状態推定の効率的な手法

時永, 祥三  
九州大学 : 名誉教授

池田, 欽一  
北九州市立大学経済学部 : 准教授

<https://doi.org/10.15017/1470131>

---

出版情報 : 経済学研究. 81 (2/3), pp. 43-63, 2014-09-25. 九州大学経済学会  
バージョン :  
権利関係 :

# 非線形システムの生成する多変量時系列に対する 共分散構造分析に基づく近似表現と 粒子フィルタを用いた状態推定の効率的な手法

時 永 祥 三  
池 田 欽 一

## 1 まえがき

近年、内部状態推定のほかに多数の目標を追跡する問題などにおいて、非線形システムにおける状態推定の方法である粒子フィルタ (Particle Filter:PF) が用いられている [1]-[7]. 規模が大きくなる場合には、同時並行的に状態変数を推定する方法が適用されているが、部分システムへの分解と接合などの方法論が中心であり、計算量の削減は議論されていない [8]-[10]. システムが大規模となる場合には、分解原理などが適用されるが、手順は簡単でない. 一方、多変量時系列の研究分野においては、多数の時系列変動 (多変量時系列) をいくつかの独立した時系列の挙動に帰着させることで、計算を簡素化する方法が提案されている [11]-[14]. しかしながら、これらの2つの問題は別々に議論されており、これまで総合して適用する方法は示されていない. 本論文では、非線形システムの生成する多変量時系列に対する共分散構造分析に基づく近似表現と粒子フィルタを用いた状態推定の効率的な手法について述べる [15].

本論文ではまず最初に、多変量解析における変数の集約化の方法論 (共分散構造分析) を拡張し、大規模な非線形システムで生成される多変量時系列 (多数の時系列のセット) を、少数の代表的な時系列で近似的に表現する方法を提案する [11]-[14]. 具体的には、システムの観測変数の相関に注目しながら、共分散構造分析における潜在変数に相当する代表的な時系列 (簡単のため潜在時系列と呼んでおく) を用いることにより、近似的に時系列を表現する方法を提案する. この場合、多変量解析における因子分析に相当する多変量時系列に対する動的因子分析の方法論を用いて、潜在時系列を推定する. すなわち時系列変動の集約を行うための動的因子  $z_i(t)$  およびこの時間遅れ変数 (ラグ付変数) である  $z_i(t-k)$  により観測時系列  $y_i(t)$  を表現する. この場合潜在時系列は観測時系列のなかから1つに特定されることが望ましいので、 $z_i(t)$  を表現する1つの  $y_i(t)$  を特定することを行う. これにより、すべての時系列を、潜在時系列  $z_i(t)$  を用いて近似的に表現する. 次にそれぞれの非線形システムにおける PF を用いた状態推定においては、システム全体における状態推定を回避する目的で、潜在時系列  $z_i(t)$  についてのみ PF による状態推定を行い、これ以外の非線形システムが生成する時系列  $y_i(t)$  を生成するダイナミクスに対する状態推定は、これらの潜在時系列から推定された状態変数の集合により近似する. 応用例として、人工的に生成した大規模な非線形システ

ムから生成される時系列からの状態推定を行い、性能を評価するとともに、現実のデータへの適用可能性を議論する。

以下では2. では、非線形システムが生成する多変量時系列における共分散構造分析について述べる。3. においては、多変量時系列に対するPFによる状態推定について示し、4. では応用例について述べる。

## 2 非線形システムの生成する多変量時系列と共分散構造分析

### 2.1 主成分分析と共分散構造分析

本論文で提案する非線形システムの生成する多変量時系列に対する共分散構造分析について論じる場合に、観測変数とこれを説明する集約化された変数との関係を理解する必要がある。これを説明する都合上、最初に多変量解析における主成分分析と、共分散構造分析の関係について整理しておく。すなわち、時系列データではなくサンプルの集合(クロスセクションデータと呼ばれる)に対する多変量解析における主成分分析について整理する。いま  $n$  個の変数  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$  が存在し、これらの変数のそれぞれに対して得られる観測データを、 $\alpha_i^{(k)}$  としておく。 $i$  は変数の番号であり、 $k$  はサンプルの順番である。この変数  $\alpha_i^{(k)}$  の相関行列  $R$  (大きさは  $n \times n$ ) を用いて、相互に相関のない変数(主成分)  $\beta_i^{(k)}$  へと変換がなされる。行列で表現すると、次のようになる。

$$P = CQ, P = [\beta_i^{(k)}], C = [c_{ij}], Q = [\alpha_i^{(k)}]. \quad (1)$$

ここで行列  $C$  は変換行列である。すなわち主成分  $\beta_i^{(k)}$  は、観測変数  $\alpha_i^{(k)}$  の適当な線形結合で表現されている。

変換行列  $C$  を求める手順は代数的に示されており、観測変数  $\alpha_i^{(k)}$  から得られる相関行列  $R$  に関する固有値問題の解として求められる。固有値問題の性質から、主成分  $\beta_i$  は相互に独立となっている。すなわち、相互に関連性のない独立した説明力のある変数として定義されるので、観測変数を複数の独立した視点から分析することが可能となる。このような、それぞれの観測データに対して再計算される主成分の値のことを、サンプルスコアと呼んでいる。主成分の個数が観測変数と同じであれば、データの集約化はなされないで、近似的にいくつかの主成分を代表的な集約化された変数として選択するかの基準として、それぞれの主成分の持っている情報の比率(寄与率)と、その累積(累積寄与率)が用いられる(寄与率は観測変数の相関行列に関する固有値問題の固有値として得られる)。累積寄与率が70%となる時点まで主成分を採用し、これ以下は無視しても構わないことが、経験的に知られている。

このような主成分分析に対して、最近調査データの整理手法として多用されている共分散構造分析においては、主成分分析における主成分  $\beta_i$  に相当するものを、あらかじめ選択する方法である。話を分かりやすくするために、3つの変数  $y_1, y_2, y_3$  および  $z_1, z_2, z_3$  からなる方程式(構造方程式と呼ばれる)を仮定する。なお変数の名前は、次に述べる時系列に対する共分散構造分析との関連性を持たせるために、類似した名前を用いている。変数  $y_i$  は主成分分析における観測変数に相当し、 $z_i$  は主成分に相当する(潜在変数とよばれる)。サンプル番号  $k$  についての記述を省略して、変数の間の

関係だけを示す, 次の方程式を考える.

$$y_1 = b_{11}z_1 + \varepsilon_1. \quad (2)$$

$$y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \varepsilon_2. \quad (3)$$

$$y_3 = b_{32}z_2 + \varepsilon_3. \quad (4)$$

ここで, 右辺の式の最後の変数  $\varepsilon_i$  は, 以下で述べる方程式の最小 2 乗近似の結果として得られる誤差である. 方程式に含まれる  $b_{21}$  などの係数は, 未知係数である. この方程式の形, すなわち観測変数を記述する方程式の右辺に, どの潜在変数を含ませるか, ある範囲内で任意に選択することができる. したがって, 通常は検証したい関係式をあらかじめ仮定して, それにしたがって形状を用いている.

重要なことは, 導入された潜在変数  $z_i$  の性質は, 簡単な統計量だけで十分であり, 通常は平均がゼロで分散が 1 と仮定されることである. 式の未知係数を定めるために, 観測されたデータにすべてに対して, できるだけ方程式が成立するように, 係数推定が行われる. 具体的には, 最小 2 乗法による近似であり, 方程式 (2)~(4) の左辺から右辺の  $\varepsilon_i$  以外を引いた関係式, すなわちその差異である  $y_1 - b_{11}z_1, y_2 - b_{21}z_1 - b_{22}z_2, y_3 - b_{32}z_2$  の 2 乗が, できるだけ小さくなるように, 未知係数が定められる. この推定においては潜在変数の共分散行列も含まれるので, あらかじめ簡単な形を仮定しておくが仮定であり, 観測結果ではない. その場合の近似の誤差として, 誤差の変数  $\varepsilon_i$  が用いられる. 変数の間の関係として, 潜在変数の相互の間, 誤差変数の間, および潜在変数と誤差変数との間の相関がないとする仮定を用いる. その結果, 未知係数に関する連立方程式が得られるので, これを解くことにより, 未知係数が決定される. 具体的には, 観測変数の間の共分散を求めて, これを式 (2)~(4) の左辺から得られる統計量とする. 変数の個数は 3 つであるので, 自分自身との相関を含めて, 3 行 3 列の共分散行列ができていく. 一方, 右辺の式 (2)~(4) をもとにして, 未知係数が含まれたまま, 変数どうしの共分散を計算することができる. これらの 2 つの共分散行列を, 相互に等しいとすることで, 未知変数の間の連立方程式が得られる.

主成分分析と共分散構造分析の違いについて整理すると, 次のようになる.

#### (1) 分析手法と誤差変数

主成分分析は代数的に完結する方法論で解析が行われるため, 変換行列の係数や, 主成分の値も数値的に計算により定められる. これに対して共分散構造分析では, 変数の間の構造方程式が, できるだけ多数のサンプルに対して成立するように定義する手法, すなわち最小 2 乗法により近似計算が行われる. その結果として, 最小 2 乗近似による近似誤差が, 誤差変数  $\varepsilon_i$  として残ることになる.

#### (2) 潜在変数の数値は計算されない

主成分分析では, それぞれの観測データに対して主成分の値, すなわちサンプルスコアが計算されるのに対して, 共分散構造分析では, 具体的にサンプルごとの潜在変数の数値は計算されない. そのため, 潜在変数にかけられている  $b_{21}$  などの係数の値の大小関係などを用いて, 潜在変数が観測変数に与える影響, すなわち説明力などを解説する方法が用いられる.

#### (3) 説明する変数の選択

主成分分析とここに示す共分散構造分析を比較すると, 共通する点として, 観測変数を共通的に説明する変数として主成分, 潜在変数が定義されていることが分かる. しかしながら異なる点とし

ては、共分散構造分析においては、潜在変数はある範囲内で任意に選択することができる。主成分分析では、主成分は観測変数を関係づける変数として、すべて用いられる。

## 2.2 問題の定式化

次に、これまで述べた多変量解析における共分散構造分析の手法を、時系列解析に拡張する。しかしながら、基本的な手法は同じであるので、相違点や注意するポイントを中心に述べておく。時系列解析においては、多変量解析におけるサンプル番号  $k$  を時系列の順番と見なせばよいので、例えば観測変数については、 $y_1^{(k)} \rightarrow y_1(t)$  の置き換えを、潜在変数については  $z_1^{(k)} \rightarrow z_1(t)$  などの置き換えを行うことになる。この場合の時系列  $z_i(t)$  は、潜在時系列と呼ばれる。いま式 (2)~(4) に示す関係式を、時系列の間の方程式の形式に書き換える。なお、時系列解析の場合には、変数の自己相関関数の性質をより有効に利用する目的で、変数の時間遅れ(タイムラグと呼ばれる)を導入することにより、推定の精度が向上させる。本論文においても、この手法を適用しているが、概要を説明するためには複雑化する問題があるので、簡単な形式だけを議論する。この場合の構造方程式は、次のようになる。

$$y_1(t) = b_{11}z_1(t) + \varepsilon_1(t). \quad (5)$$

$$y_2(t) = b_{21}z_1(t) + b_{22}z_2(t) + \varepsilon_2(t). \quad (6)$$

$$y_3(t) = b_{32}z_2(t) + \varepsilon_3(t). \quad (7)$$

多変量解析における共分散構造分析の場合と同様に、方程式における未知係数を、共分散構造を用いて推定する。なお、このような時系列に対する共分散構造分析においても、潜在時系列の性質としては、基本的には簡単な統計量しか仮定されない。例えば平均と共分散の値であり、一般には定数とする。

この場合、次のようなステップおよびポイントに留意する。すなわち、(1) 最小 2 乗法と推定誤差、(2) 潜在時系列は本来は簡単な統計量のみ持つ、(3) 粒子フィルタによる内部状態推定、(4) 観測変数からの潜在変数の選択方法、である。これらについて順次説明するが、細かな分析の手順は論文の後半で示すので、以下では概要のみを述べるにとどめておく。

### (1) 最小 2 乗法と推定誤差

基本的には、式 (5)~(7) に示すように、時刻  $t$  における変数の間の関係から共分散構造を用いて、未知係数を推定する方程式を導出することが可能である。式の左辺に示す観測変数  $y_i(t)$  の間の共分散行列の大きさは、 $3 \times 3$  の正方行列になる。一方、式の右辺をもとにして、変数の間の共分散を求めると、同様に  $3 \times 3$  の大きさの共分散行列が得られ、これらには、未知変数が含まれる。これらの 2 つの共分散行列の表現を用いて未知係数を推定する。具体的には方程式 (4)~(6) の左辺から右辺の  $\varepsilon_i(t)$  以外を引いた関係式、すなわちその差異である  $y_1(t) - b_{11}z_1(t)$ ,  $y_2(t) - b_{21}z_1(t) - b_{22}z_2(t)$ ,  $y_3(t) - b_{32}z_2(t)$  の 2 乗が、できるだけ小さくなるように、未知係数が定められる。その場合の近似の誤差として、誤差の変数  $\varepsilon_i(t)$  が用いられる。

### (2) 潜在時系列は本来は簡単な統計量のみ持つ

すでに述べたように、潜在時系列の性質としては、簡単な統計量しか仮定されない場合が多い。しかしながら、時系列解析の場合には、このような簡単な過程だけでは、そもそも近似の手順に観測時

系列の性質が反映されないことや、どのような形状の潜在時系列かを分析する必要があるなどの理由から、ある近似的な推定方法が用いられている。代表的な手法として、文献 [14] に示されるような、時系列を平均がゼロでその分散が時間的に変化する (ただし簡単な変動に限定する) ケースを仮定して、そのパラメータを推定する方法が用いられている。また文献 [13] に示された方法では、式 (5)~(7) に示す関係が、線形のダイナミクスにおける入力と出力変数の関係になっていることに注目し、よく知られているカルマンフィルタを用いて、潜在時系列を推定することが行われている。しかしながら、これもあくまで近似的な推定にとどまっている問題がある。

### (3) PF による内部状態推定と潜在変数の選択方法

これまで述べたきた時系列データに関する共分散構造分析を、最小 2 乗法と潜在時系列を用いて推定する方法は、従来の先行研究で実施された事項である。しかし、本論文では、観測変数から、これを生成する内部変数の状態を推定する問題にまで、共分散構造分析を拡張する点に特徴がある。すでに述べたように、共分散構造分析では潜在変数の詳細は記述 (計算) されず、簡単な統計量や変動の性質が仮定されるだけである。しかも、このような仮定を導入した場合においても、適用する推定手法は最小 2 乗近似であり、その分析の精度には限界がある。また、もっとも重要であるのは、観測変数  $y_i(t) = G(x_i(t)) + v_i(t)$  などのダイナミクスにしたがって生成される場合に、状態変数  $x_i(t)$  を推定する問題に従来の共分散構造分析の手法では実施できないことである。したがって本論文で提案する方法は、1 つの方法論として潜在変数をあらかじめ得られている観測変数の中から抽出する方法である。

100 個の観測時系列  $y_i(t)$  と、これを生成するダイナミクス  $y_i(t) = G(x_i(t)) + v_i(t)$  が知られていると仮定する。(内部状態  $x_i(t)$  の値は未知である)。すべての時系列に対して PF の手法を用いることにより、内部状態を推定することは可能である。しかしこのままでは、計算量が膨大となるケースが発生する。これを回避するために、本論文では、例えば 10 個の時系列に対してだけ PF を適用し、これ以外の時系列からの内部状態推定には、選択した 10 個の時系列から内部状態推定の結果を流用とする提案である。したがって、この場合の最初の 10 個の時系列は、共分散構造分析における潜在時系列として使用される。潜在時系列をどのように選択するかの基準は、さまざまに設定することは可能であるが、本論文では、できるだけ多数と時系列との間で相関が存在する時系列として定義している。このような選択により、時系列を時系列 (潜在時系列) で近似する精度が向上することが期待できる。なお、このような関係を適用の順序として整理すると、1) 最初に観測時系列どうしの相関分析を行い潜在時系列を決める、2) 潜在時系列を用いてこれ以外の観測時系列の近似表現を共分散構造分析により行う、3) 潜在時系列だけに対して PF を適用して潜在時系列からの内部状態推定をする、4) 残りの観測時系列の内部状態推定を潜在時系列からの内部状態推定を流用して求める、となる。

### (4) 時系列近似による PF 計算の軽減

本論文の方法を別の視点からみると、時系列を他の時系列で近似表現することであるとみなすことができ、しかもその方法は最小 2 乗近似である。したがって、一般のフーリエ展開などの関数近似において課されるような、近似に用いる基本関数は完備である必要はない。このような時系列による時系列の近似の主要な目的は、PF 計算量の軽減である。

## 2.3 多変量時系列における共分散構造分析

次に、非線形システムの生成する多変量時系列に対する共分散構造分析について述べる。最初に、次のように時刻  $t$  における記号を定義しておく。

$y_i(t)$ : 観測される  $i$  番目の多変量時系列

$x_{ik}(t)$ : 多変量時系列  $y_i(t)$  の  $k$  番目の状態変数

$z_j(t)$ : 多変量時系列  $y_i(t)$  全体に対する  $j$  番目の潜在時系列

なお、潜在時系列はクロスセクションデータ  $\alpha_i^{(k)}$  への主成分分析において、因子  $\beta_i^{(k)}$  として定義されたものを、多変量時系列の集約化と近似において、同様に用いる時系列である。また、あとで説明するが、多変量時系列  $y_i(t)$  に対する潜在時系列である  $z_k(t)$  は、多変量時系列  $y_i(t)$  の1つと等しいものとされる(選択される)。これは、多変量解析における主成分分析の主成分が、観測変数の線形結合である点と異なっている。

いま  $n$  個のダイナミクスがあり、それぞれのダイナミクスの時刻  $t(t = 1, 2, \dots, T)$  における1次元の観測変数(時系列)を  $y_i(t)$ 、この観測変数を与える状態変数のベクトルを  $x_i(t) = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iK}]$  とし、その次元は  $K$  であると仮定しておく。ダイナミクスを記述する方程式を、次のように表現する。

$$x_i(t+1) = F_i(x_i(t), u_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

$$y_i(t) = G_i(x_i(t)) + v_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

また  $u_i(t), v_i(t)$  は  $K$  次元, 1次元のシステムノイズである。 $F_i(\cdot), G_i(\cdot)$  は、それぞれ、変数  $x_i(t), u_i(t)$  および変数  $x_i(t)$  についての関数である。ここで、 $F_i(\cdot), G_i(\cdot)$  は非線形関数であり、一般のPFの適用では、既知の関数であると仮定する。状態変数  $x_i(t)$  は推定されるべきベクトルである。なお以下では、関数  $F_i(\cdot), G_i(\cdot)$  の形状、およびノイズ  $u_i(t), v_i(t)$  の性質(平均と分散)は、既知であると仮定している。

多変量時系列に対して主成分分析を適用する方法が動的因子分析であり、ほぼ同様な枠組みで行われる。ただし、開始する式は式(1)とは異なり、観測時系列を潜在時系列  $z_j(t)$  で表現する式を、直接的に用いている。次のような式により、 $y_i(t)$  を  $z_j(t)$  により表現する。

$$y_i(t) = \sum_{d=0}^D \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(d)} z_j(t-d) + e_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (10)$$

ここで定数  $a_{ij}^{(d)}$  は、潜在時系列により観測時系列を近似するための係数であり、 $N$  は潜在時系列の総数、 $D$  は潜在時系列の時間遅れ(ラグ)の最大値、 $M$  は近似対象である観測時系列の総数である。 $e_i(t)$  は近似の残差である。未知である係数を推定する方法として、観測時系列である  $z_j(t), y_i(t)$  の間における共分散構造が、計算された数値と方程式から得られるものと等しいとする関係式を用いる。なお潜在時系列は、観測時系列から選択される。

文献[13][14]などにおいて式における未知の係数  $a_{ij}^{(d)}$  からなる行列  $A$  を推定する方法が示されており、これをまとめると以下のようなになる。なお、文献[13][14]では、時系列のラグ成分も近似に使用する一般形が示されているので、ここでも同様の定式化を用いている。

式 (10) において、ラグ  $d$  を最大である  $d = D$  の範囲まで仮定した場合の、観測時系列と潜在時系列の間の関係を行列でまとめると、次のようになる。

$$Y = A\xi + E. \quad (11)$$

$$Y = [[y_1(t), \dots, y_M(t)]^T, [y_1(t-1), \dots, y_M(t-1)]^T, \dots, [y_1(t-D), \dots, y_M(t-D)]^T]. \quad (12)$$

$$\xi = [Z(t)^T, Z(t-1)^T, \dots, Z(t-D)^T]. \quad (13)$$

$$Z(t) = (z_1(t), \dots, z_N(t), z_1(t-1), \dots, z_N(t-1), \dots, z_1(t-D), \dots, z_N(t-D)). \quad (14)$$

$$E = [e(t)^T, e(t-1)^T, \dots, e(t-D)^T]. \quad (15)$$

$$e(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_M(t)]. \quad (16)$$

係数行列  $A$  は、以下のように与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} A(0) & A(1) & \dots & A(D) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(0) & \dots & A(D-1) & A(D) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A(0) & \dots & A(D-1) & A(D) & \dots \end{pmatrix}$$

$$A(d) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(d)} & a_{12}^{(d)} & \dots & a_{1N}^{(d)} \\ a_{21}^{(d)} & a_{22}^{(d)} & \dots & a_{2N}^{(d)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1}^{(d)} & a_{M2}^{(d)} & \dots & a_{MN}^{(d)} \end{pmatrix}$$

この関係式によって、観測時系列における共分散関数と潜在時系列の共分散関数とが、未知である係数の行列  $A$  を介して関係づけられることを用いて、係数の推定を行う。

一般的な動的因子分析の手法では、潜在時系列  $z_j(t)$  それ自体が未知であり、推定の対象となる。この場合には、潜在時系列の間の共分散を特定の値に設定することにより、未知である係数  $A(d)$ ,  $d = 0, 1, \dots, D$  を、式 (11) における左辺と右辺とにおいて共分散を求め、これらの間における誤差を最小化する最小 2 乗法などにより決定することができる。このように、未知である係数  $A(d)$  が決定されると、潜在変数  $z_j(t)$  は観測変数  $y_i(t)$  に対しては、線形ダイナミックにおける内部状態変数と同じような変数になる。この関係を用いて、観測時系列  $z_j(t)$  に対してカルマンフィルタ (Kalman Filter: KF) を適用して、潜在変数  $z_j(t)$  の推定がなされる。しかし、本論文で述べるように潜在変数に対して、更に内部状態変数の推定を適用する場合には、潜在変数のダイナミクスが既知であるか同定が可能である必要性がある。したがって、本論文では、潜在変数をダイナミクスが既知である観測時系列のなかから選択する方法を用いている。

## 2.4 共分散構造分析によるパラメータ推定

以下では、これまで述べてきた多変量時系列に対する動的因子分析を拡張して、共分散構造分析による係数パラメータ推定手法を適用する。この手法の適用により、少数の潜在時系列を用いて、すべての時系列を近似的に表現することができる。ここで仮定する事項は、次の 2 つである。



(仮定 1) 潜在時系列は観測時系列のなかから選択する。

(仮定 2) 係数パラメータ推定には最小 2 乗法を用い、残差を式 (11) の右辺の  $E$  とみなす。

まず仮定 1 については、後で述べるように、観測データを用いてこれを生成するダイナミックの内部状態変数の値を推定するが、そのためには、ダイナミクスが既知であることが必要である。すでに述べたように、一般的な動的因子分析により得られる潜在時系列を用いる場合には、ダイナミクスが未知であるので、内部状態の推定をすることはできない。同時に、観測時系列の中においても、この内部状態推定の個数をできるだけ制限したいことがある。

仮定 2 はパラメータ推定の手法そのものに関係することであり、式 (11) における左辺  $Y(t)$  に関する共分散を  $\Sigma(D)$  とした場合に、これは既知である数値であるので、この数値と式の右辺の関係式から求めた共分散の項である  $A\Pi(D)A^T$  が、できるだけ近くなるようにパラメータを変化させる方法を用いる。

$$E[\Sigma(D) - A\Pi(D)A^T]^2 \rightarrow \min. \quad (17)$$

ここで  $\Pi(D)$  は、 $Z(t)$  の分散行列である。このため、式 (11) の左辺と右辺の差の 2 乗誤差  $Q$  を最小にするアルゴリズム (具体的には、係数  $a_{ij}^{(d)}$  に対する微分係数を用いる最急降下法) を用いる。

$i = 5$  の場合の状態変数の推定例

粒子フィルタ (PF) を用いた状態推定の詳細は次の章で述べるが、ここに示す簡単な例題を用いて、その概要を説明しておく。いま、潜在変数を  $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$  (これらは観測変数  $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$  に等しい) としておき、残りの観測時系列を  $y_4(t), y_5(t)$  としておく。潜在時系列  $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$  に対して PF を用いて、これらの内部状態  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  が推定できていると仮定する。具体的には  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  に対応して複数の粒子 ( $j$  番目の粒子) の対として、時刻  $t$  における状態変数の推定値  $x_1^{(j)}(t), x_2^{(j)}(t), x_3^{(j)}(t)$  が得られているとする (粒子の総数を  $N_P$  とする)。このとき、観測変数  $y_4(t), y_5(t)$  に対する状態変数の値  $x_4(t), x_5(t)$  は、次のように逆関数を用いて推定する。まず粒子  $j$  に対応する関数  $z_i(t)$  の値を求めて (これを関数粒子と呼んでおく)、これを  $z_i^{(j)}(t)$  としておく。

$$z_i^{(j)}(t) = G(x_i^{(j)}(t)), \quad j = 1, 2, \dots, N_P. \quad (18)$$

次に、観測時系列の近似式にこの関数粒子の値を代入し、逆関数の関数値を  $r_i$  として求めておく。

$$r_i = \sum_{d=0}^D \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^{N_P} (a_{ik}^{(d)} z_{k,t}^{(j)}(t-d)) / N_P, \quad i = 4, 5. \quad (19)$$

観測時系列  $y_4(t), y_5(t)$  の生成関数に対する逆関数の値として、時系列に対する内部状態を推定する。

$$\hat{x}_i(t) = G_i^{-1}(r_i), \quad i = 4, 5. \quad (20)$$

すなわち、状態変数の粒子  $x_1^{(j)}(t), x_2^{(j)}(t), x_3^{(j)}(t)$  が与えられている場合には、観測変数  $y_i(t), i = 4, 5$  の値を実現するためには、状態変数がどの値となるかが関数  $y_i(t), i = 4, 5$  の逆関数を用いて求められることになる。したがって、状態変数に対する直接的な粒子  $x_4^{(j)}(t), x_5^{(j)}(t)$  を生成して推定に用いる必要はない。

なお、観測時系列  $y_i(t)$  は潜在時系列  $z_i(t)$  によって近似式により表現されていることを用いれば、サンプルパスをたどることによって、1 つの  $y_i(t)$  の値が決定されるので、これを関数の値として、逆

関数から観測時系列の内部状態を推定することも可能である。しかしながらこの場合には、1つのサンプルパスによってだけ内部状態が決定される危険性がある。そのため、確率的な広がりを仮定して、ここに示すように潜在時系列に対応する粒子を用いて、推定する方法によりカバーすることが望ましい。

### 3 非線形システムの生成する多変量時系列と PF 状態推定

#### 3.1 PF による状態推定の基本

以下では PF による状態推定の基本についてまとめておき、本論文で適用する分野に限定して簡潔に述べることにする。非線形状態方程式により生成される時系列モデルを、次のように記述しておく [1]-[7]。すでに式 (8),(9) に示したように  $n$  個のダイナミクスがあり、それぞれのダイナミクスの時刻  $t(t = 1, 2, \dots, T)$  における 1 次元の観測変数  $y_i(t)$  があり、この観測変数を与える状態変数のベクトルを  $x_i(t) = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iK}]$  としておく。式で再度示すと、 $x_i(t+1) = F_i(x_i(t), u_i(t))$ ,  $y_i(t) = G_i(x_i(t)) + v_i(t)$  である。

いま、 $F_i(\cdot)$ ,  $H_i(\cdot)$  が行列を用いた線形表現の形式で与えられ  $x_i(t+1) = A_i x_i(t) + u_i(t)$ ,  $y_i(t) = B_i x_i(t) + v_i(t)$  の形式、行列  $A_i$ ,  $B_i$  は時間  $t$  のみの関数、 $u_i(t)$ ,  $v_i(t)$  が正規乱数に従う場合には、従来からの手法である KF を適用して、状態を推定することができる。しかし、状態方程式が非線形の場合には、KF が適用できないため PF が援用され、有効性が示されている。PF 適用の概要は、以下のようにまとめられる。

いま、観測データとして時系列  $y_i(t)$  が与えられた場合に、式 (8)(9) に示すモデルを仮定して、 $x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{iK}(t))$  を推定する。記号として、 $x_{ik}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  の  $j$  番目の粒子を  $x_{ik}^{(j)}(t)$  としておく。

**ステップ 1 : 粒子の初期値の生成**

時刻 0 における変数  $x_{ik}^{(j)}(t)$  の初期値  $x_i(0)^{(j)} = (x_{i1}^{(j)}(0), x_{i2}^{(j)}(0), \dots, x_{iK}^{(j)}(0))$  について、あらかじめ定めた確率分布に従う乱数により  $N_P$  セットの粒子の集合として生成する ( $j = 1, 2, \dots, N_P$ )。

**ステップ 2 : システムノイズの生成**

それぞれの粒子について、変数  $x_{ik}^{(j)}(t)$  と同様にシステムノイズである  $u_{ik}^{(j)}$  および  $v_i^{(j)}$  を、あらかじめ与えた確率分布に従った乱数によって  $N_P$  セットの粒子として生成する。

**ステップ 3 :  $x_i^{(j)}(t)$  の 1 時刻先予測**

$x_i^{(j)}(t)$  の 1 時刻先予測  $x_i^{(j)}(t+1)$  が、次により得られる。

$$x_i^{(j)}(t+1) = F(x_i^{(j)}(t), u_i^{(j)}(t)), \quad u_i^{(j)}(t) = (u_{i1}^{(j)}(t), u_{i2}^{(j)}(t), \dots, u_{iK}^{(j)}(t)). \quad (21)$$

ただし上の式はベクトル  $x_i^{(j)}(t+1)$  のそれぞれの要素  $x_{ik}^{(j)}(t+1)$  について計算することを意味する。

**ステップ 4 : 重みの計算**

次に、それぞれ粒子  $j$  の重み  $w_i^{(j)}$  を計算する。

$$w_i^{(j)} = R_t(y_i(t+1) | x_i^{(j)}(t+1)). \quad (22)$$

ここで  $R_t(\cdot)$  は  $x_i^{(j)}(t+1)$  が与えられた場合の  $y_i(t+1)$  の条件付分布である。これらの重みを、集計しておく。

$$W_t = \sum_{j=1}^{N_P} w_t^{(j)}. \quad (23)$$

**ステップ 5 : 粒子のリサンプリング**

それぞれの粒子を、重みに従って、リサンプリングする。すなわち粒子の集合  $X_{t+1} = (x_i^{(1)}(t+1), x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(N_P)}(t+1))$  から粒子を  $w_t^{(j)}/W_t$  の確率に従って復元抽出して、生成する。この結果として、変数  $x_i(t)$  の確率分布を推定することができる。時刻  $t$  における状態の推定値は、集合  $X_t$  の平均として与えられる。

**ステップ 6 : 時刻  $t = 2, 3, \dots, T$  について繰り返し**

ステップ 2～ステップ 6 の操作を、時刻  $t = 2, 3, \dots, T$  について繰り返す。この結果として、時刻  $t = 2, 3, \dots, T$  についても状態変数  $x_i(t)$  の確率分布を推定することができる。最終的に得られるモデルの対数尤度は、次により与えられる。

$$L_m = \sum_{t=1}^T l_t - T \log N, \quad l_t = \log W_t. \quad (24)$$

### 3.2 共分散構造分析の結果を用いた状態推定の簡略化

多変量時系列の共分散構造分析の結果を用いた状態推定の簡略化の概要については、すでに述べているが、以下では乱数や尤度の関連も含めて述べておく。潜在時系列のデータを用いてその内部状態変数の値を推定する方法は、通常の PF 手順と同じである。共分散構造分析の結果を用いた状態推定のポイントは、観測時系列に対する内部状態変数の値を推定することであり、そのため潜在時系列に対する内部状態推定の結果を用いる。この場合、潜在時系列に対する粒子を用いて、中間段階としてこの潜在時系列に対応する粒子を擬似的に生成して、結果をまとめておくことが便利である。

この問題に対する処理手順は、次のようになる。

**ステップ (1) 潜在時系列に対する粒子生成**

潜在時系列  $z_i(t)$  を入力データとして、この生成ダイナミクスを用いながら、その生成のもとになる内部状態を推定し、この  $j$  番目の粒子を  $x_i^{(j)}(t), j = 1, 2, \dots, N_P$  としておく。

**ステップ (2) 潜在時系列の関数値 (関数粒子) を中間変数として生成**

潜在時系列を生成する関数  $G(\cdot)$  にこの粒子の値を代入して、中間変数である関数粒子  $z_i^{(j)}(t)$  を生成する。ここで、式  $z_i^{(j)} = G(x_i^{(j)}(t)), j = 1, 2, \dots, N_P$  を用いる。粒子  $x_i^{(j)}(t)$  には尤度に比例する重みが反映されており、より頻繁に出現する粒子ほど、時系列を生成する場合の有力な内部状態となっている。実際には、時刻  $t$  において観測される時系列の値は  $z_i(t)$  であるが、これは多くの時系列のサンプル値の実現値の 1 つにすぎないと考えられる。したがって、粒子の重みを考慮して、関数の対応する粒子を生成することにより、このような不確実性を、部分的ではあるが解決することができる。

**ステップ (3) 観測時系列に対する逆関数から内部状態の推定**

潜在時系列に対応する関数粒子が生成されたので、これを観測時系列の生成関数の実現値であると仮定して、逆関数の方法により、観測時系列の内部状態を推定する。すなわち、次のようになる関数の値  $r_i$  を  $r_i = \sum_{d=0}^D \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{N_P} (a_{ik}^{(d)} z_{i,t}^{(j)}(t-d)) / N_P$  により求めておき、観測時系列の生成関数の逆関数値として状態  $x_i(t) = G^{-1}(r_i)$  を推定する。

なお、ステップ (2) において本論文で提案するような、関数粒子を中間段階で求める方法と、潜在時系列による観測時系列の近似表現から直接的に内部状態を推定する方法と比較した場合の特徴については、応用例の議論の中において示す。

## 4 応用例

### 4.1 共分散構造分析に基づく潜在時系列による近似特性 (人工データ)

人工データに対して本論文の多変量時系列からの状態推定手法を適用する前に、まず共分散構造分析に基づく潜在時系列による時系列近似について性能を評価しておく。多変量時系列に対する共分散構造分析と PF を用いた大規模非線形システムにおける状態推定に関する人工データは、さまざまに構成可能であると思われる。しかしながら、本論文の目的は状態推定の特性を分析することにあるので、あまり複雑な時系列を対象とするのは望ましくない。また相関のある時系列を生成する必要があるので、その基本となる方法は、ある程度限定されており、具体的には、相関のある正規乱数を用いた時系列生成が基本となる。ここで用いる多変量時系列の生成方法を、Case I ~ Case III と呼んでおく。

**Case I** : 相関のあるブラウン運動を単調増加関数で変換した観測時系列

**Case II** : 1 次の自己回帰モデルを需要関数とした受注数量の時系列

**Case III** : 非線形システムの構造変化推定の例題

Case I においては次のような、比較的簡単な多変量時系列を仮定する。この事例は人工的な株価の生成と、その市場での変形に相当する。状態変数  $x_i(t)$  は、ブラウン運動の生成モデルにしたがって生成される。

$$x_i(t+1) = x_i(t) \exp[\sigma u_i(t)], \quad \sigma = 0.001. \quad (25)$$

ここで  $u_i(t)$  は相互に相関のある (相関係数  $R = [r_{ij}]$  が存在する) 平均がゼロで分散が 1 の正規乱数である。また、観測時系列を生成するための変換関数  $G_i(x)$  は、次のような単調増加関数からランダムに選択され、状態変数から観測時系列が生成される。 $0 \leq x \leq 1$  の変数の範囲について

$$(1) G_i(x) = (x/1.2)^{1.2} + v_i$$

$$(2) G_i(x) = x(0 \leq x \leq 0.5), G_i(x) = 1 + x(0.5 \leq x \leq 1)$$

$$(3) G_i(x) = 3 \log(1 + 3x)$$

これらの関数は、株価の収益率が株価が高いほうにあるときや、低いときに、通常の値よりは強調される傾向を反映している。観測された時系列から、このような変形を受ける前のブラウン運動を推定する問題となっている。

Case II においては、時系列  $y_i(t)$  が  $i$  番目の小売業者から製造業者へと伝達される製品製造の数量を表現する場合に、小売業者が用いている需要予測を推定する問題である [7][16]-[18]。小売業者は市場の需要を自己回帰モデルにしたがって予測し、これをもとに製造業者に対して製造数量を伝える。しかしながら小売業者は最適な数量ではなく、自身が修正を加えた数量を、製造業者に伝達する。この詳細をここで述べるのは適切ではないので、付録にまとめておく。変数の意味は、以下のようになる。

$x_i(t)$ :  $i$  番目の小売業者の推定する需要

$y_i(t)$ :  $i$  番目の小売業者が製造業者に出す注文、関数  $G_i(x_i(t))$  で変形される

変数のプロセス  $x_i(t)$  は 1 次の自己回帰モデルにしたがって、次のように生成される。

$$x_i(t+1) = d + \rho x_i(t) + u_i(t) \quad (26)$$

ここで  $u_i(t)$  は Case I における場合と同じである。パラメータ  $d, \rho$  はある範囲で自由に選ぶことはできるがシミュレーションの結果には大きな影響を与えないので、以下では  $d = 2, \rho = 0.5$  としておく。時間遅れの導入のための変数を  $s_i(t) = x_i(t-1)$  としておく。小売業者が注文すべき最適な製品数量は決定されるが、これが小売業者の意思により関数を介して変形され、数量  $y_i(t)$  として製造業者に注文される ( $l$  は小売業者があらかじめ販売を予測する期間であり、リードタイムと呼ばれる)。

$$y_i(t) = G_i[x_i(t) + c_R(x_i(t) - s_i(t))], \quad c_R = \frac{\rho(1 - \rho^{l+1})}{1 - \rho}. \quad (27)$$

最適な製造数量を修正する変換関数  $G_i(x)$  は、次のような単調増加関数からランダムに選択され、状態変数から観測時系列が生成される。 $0 \leq x \leq 1$  の変数の範囲について

$$(1) G_i = (x/1.2)^{1.2}$$

$$(2) G_i = r(x - 0.5), \quad r(y) = v_i(y \leq 0), r(y) = y(y > 0)$$

$$(3) G_i = 3 \log(1 + 3x)$$

Case III では、次のような非線形ダイナミクスにおける状態推定を取り扱う問題である [19][20]。

$$x_i(t+1) = 0.5x_i(t-1) + 25 \frac{x_i(t-1)}{1 + x_i(t-1)^2} + 8 \cos[0.5(t-1)] + u_i(t). \quad (28)$$

$$y_i(t) = 0.5x_i(t)^2 + v_i(t). \quad (29)$$

ここで  $u_i(t)$  は Case I, Case II と同様に定義され、 $v_i(t)$  は平均がゼロで分散が  $\sigma_v^2 = 0.01^2$  である正規乱数とする。

シミュレーション結果

シミュレーションの条件を、以下のようしておく。

- 潜在時系列の個数:  $M$  は  $N = 3 \sim 20$
- 多変量時系列の個数:  $M = 3N$  とする
- 相関係数の範囲:  $r_{ij} = 0.1 \sim 0.5$

表 1: 観測時系列近似の相対 (絶対) 誤差の平均値

cases	$N = 3$	5	10	15	20
Case I( $e_y$ )	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006
Case II( $e_y$ )	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09
Case III( $E_y$ )	6.0	6.0	6.1	7.1	7.2

なお、潜在時系列は観測時系列を近似する時系列であるので、すべての時系列との間に、ある程度の大きさの相関が存在するように設定しておく。一方では、潜在時系列の間の相関はゼロであるように設定しておく。

このような条件のもとで、シミュレーションによって、多変量時系列の共分散構造分析に基づく潜在時系列による時系列近似の特性を分析する。すなわち、多変量時系列の間における共分散構造を仮定した場合に、潜在変数により近似的に記述される観測時系列の近似値  $\hat{y}_i(t)$  と、実際に生成された時系列  $y_i(t)$  との間の差異を求める。この近似誤差が、シミュレーションの条件によってどのように変化するかを検証する。

図 1 には、Case I, Case II, Case III について、生成された観測時系列  $y_i(t)$  と共分散構造分析により潜在時系列で近似した時系列  $\hat{y}_i(t)$  の例を示す。表 1 には、シミュレーションの条件の組み合わせを変化させた場合の、多変量時系列の相対誤差である  $e_y = |\hat{y}_i(t) - y_i(t)|/y_i(t)$  (Case III については絶対誤差  $E_y = |\hat{y}_i(t) - y_i(t)|$ ) の平均値を示している。この結果より分かるように、Case I ~ Case III について、時系列近似の相対誤差 (絶対誤差) はそれぞれ 0.005 ~ 0.006, 0.08 ~ 0.09, 6.0 ~ 7.2 の範囲に収まっている。この近似誤差の大きさを比較分析するために、式 (8) ~ (16) において、時系列を生成する正規乱数がすべて独立である場合の近似誤差を求めてみる。この場合を、ランダム生成時系列の近似と呼んでおく。すなわち、この場合には、時系列生成における発生源である乱数が独立であるので、生成される潜在時系列および観測時系列の間においては、相関が極めて小さくなることが予想され、潜在時系列による観測時系列の近似における共分散構造には特性が失われている可能性がある。これにより、時系列近似の特性は悪化するであろう。このようなランダム時系列近似の場合の近似の相対誤差 (絶対誤差) は、Case I ~ Case III についてそれぞれ 0.04 ~ 0.08, 0.26 ~ 0.31, 34.7 ~ 48.1 となる。したがって、この相対誤差と表 1 の近似誤差を比較することにより、本論文の手法による共分散構造分析に基づく時系列近似の特性が、良好であることが判断できる。

## 4.2 潜在時系列を介した多変量時系列からの状態推定 (人工データ)

次に、人工データを用いたシミュレーションにより、本論文で示す時系列の共分散構造分析と潜在時系列に基づく多変量時系列の状態推定の性能について考察する。用いるデータは、前節において示した時系列 (Case I ~ Case III) であり、これらに対して内部状態を推定した結果について、シミュレーションをもとにしてまとめておく。なおシミュレーションを行うにあたって、観測時系列と潜在時系列は同じ方法で生成されていることに注意しておく。すなわち、観測時系列と潜在時系列との間には相関関係が存在するとして時系列生成を行うので、共分散構造分析に基づいて観測時系列を潜在時系列により近似を行う。一方では、これらの観測時系列 (出力データ) を生成する状態変

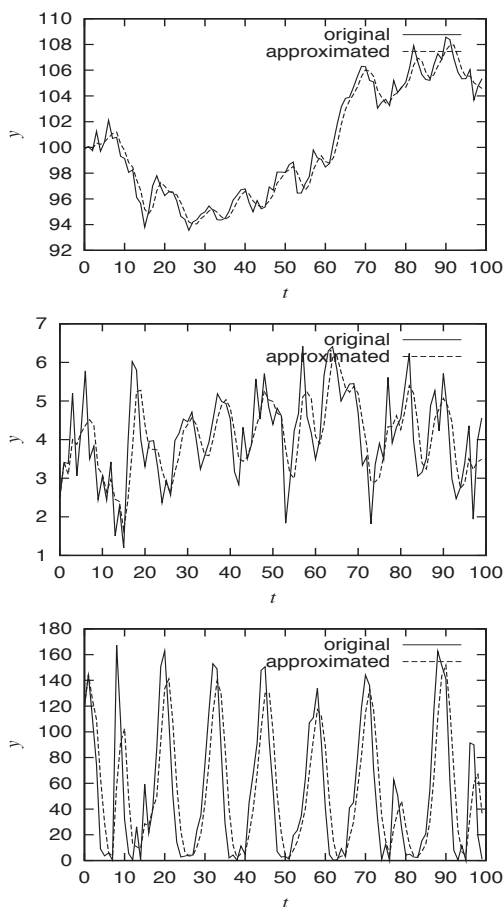


図 1: 生成された観測時系列と時系列近似の例 (上から Case I, Case II, Case III)

数が推定されるが、近似された時系列の間関係式からの状態推定であり、時系列近似の特性から、やや悪化することが予想される。

いま、潜在時系列  $z_i(t)$  に対しては、そのダイナミクスが既知であり、式 (8),(9) に基づいて、内部状態変数と観測時系列である  $y_i(t)$  が生成される。特に潜在変数についてはその生成に基本となる乱数は独立した正規乱数としているので、単独の式にしたがって時系列が生成される。したがって、PF 手法により  $z_i(t)$  から推定された内部状態  $x_i(t)$  の値が、既知である値に近いかどうかを直接的に検証することができる。図 2. には観測時系列から推定された状態変数の例を、Case I, Case II, Case III について示している。表 2 には状態推定の相対誤差  $e_x$  (絶対誤差  $E_x$ ) の平均値を示している。(  $y_i(t)$  の近似の場合と同様に  $e_x = |\hat{x}_i(t) - x_i(t)|/x_i(t)$ , Case III については絶対誤差  $E_x = |\hat{x}_i(t) - x_i(t)|$  として定義する.)

すでに述べたような時系列生成における乱数がすべて独立であるようなランダム時系列の近似の場合の状態推定の相対誤差 (Case III については絶対誤差) は、Case I ~ Case III についてそれぞれ

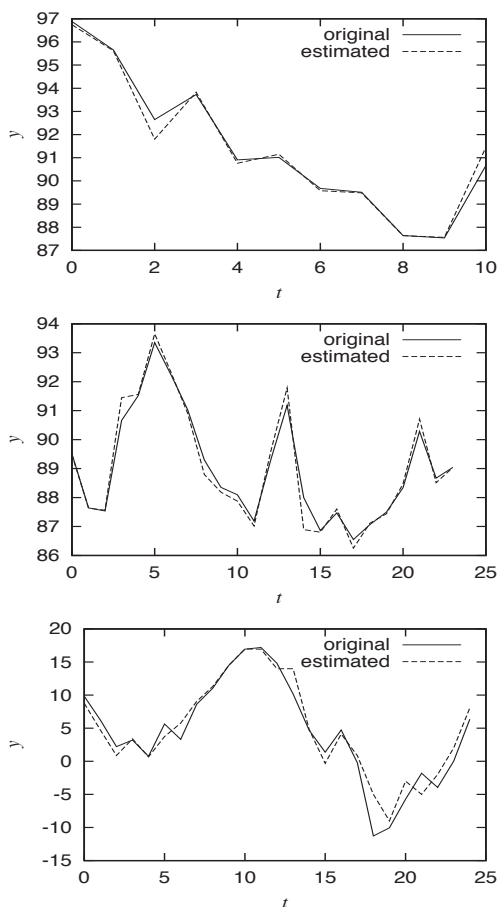


図 2: 推定された状態変数の例 (上から Case I, Case II, Case III)

れ 0.07 ~ 0.12, 0.35 ~ 0.42, 2.56 ~ 3.70 となる. したがって, この相対誤差と表 2 の状態推定の誤差を比較することにより, 本論文の手法による共分散構造分析に基づく状態推定の特徴が, 良好であることが判断できる.

### 4.3 現実データへの適用の考察

以下では, 本論文で提案する多変量時系列の共分散構造分析に基づく時系列の近似表現と PF による状態推定効率化について, 現実のデータへの適用可能性を考察する. ここで取り上げるデータは日本の株式市場の現実データであり, 基本的には人工データのシミュレーション分析における Case I に対応する例題である. なお, シミュレーション分析における Case II に対応する現実データは公表されたものがないこと, Case III についてはあくまで数値例であることを考慮して, 現実データの分析は行っていない. 現実データの概要を以下に示す.



表 2: 状態推定の相対 (絶対) 誤差の平均値

cases	$N = 3$	5	10	15	20
Case I( $e_x$ )	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002
Case II( $e_x$ )	0.19	0.19	0.20	0.21	0.22
Case III( $E_x$ )	1.45	1.46	1.46	1.48	1.49

東京証券取引所に上場された銘柄の中から、110 の代表的な株価を抽出する。時期は 2013 年 2 月 1 日から 60 日間であり取引の終値とする。この場合、特定の業種に偏らないように銘柄の選択をすると同時に、主要な企業の株価は必ず含まれるように調整する。

データ分析においては、次のような点に注目している。

(1) 株価の相関分析と潜在時系列の選択

株式の銘柄ごとの変動は業種を通じて共通するものが多いので、業界における代表的な株価時系列を潜在時系列として選択できる可能性がある。業種が孤立的ではなく複数の中間的である場合には、複数の潜在時系列の影響を受けるであろう。これを確認するために、株価時系列の相関係数を求めて、最も多くの銘柄との間で、相関係数の総和が大きくなる銘柄を抽出する。これは、多変量時系列の近似表現における潜在時系列に相当するものである。このような株価時系列を 10 個選択して、現実データ分析における潜在時系列とする。したがって、 $N = 10, M = 100$  となる。

(2) 個別銘柄の特性 (非線形関数変換)

個別の銘柄は、企業の業績や環境により影響を受けると考えられ、これを時系列の変換関数として考慮する。したがって、この関数変換を受ける前の時系列は、理想的なブラウン運動であると見なすことができるであろう。このようなブラウン運動からの乖離を調べる方法には、多数存在すると思われるが、ここでは市場の平均的な収益率の目安である、対数収益率の分布を求めて、これによりブラウン運動が変換される関数のクラスを推定することにする。時刻  $t, t+1$  における株価を  $p(t), p(t+1)$  とした場合に、対数収益率は式  $R(t) = \log[p(t+1)/p(t)]$  により定義される。この対数収益率は、株価が理想的なブラウン運動にしたがう場合には平均が 0 の正規分布となるが、企業利益などの影響を受けた場合には正規分布から外れる。ここで用いる現実の株価データに対して対数収益率を求めて、 $R(t)$  をヒストグラムとして描いた例を図 3(a), (b), (c) に示す。この図 3 の左から、株価が理想的なブラウン運動をする場合、やや値上がりをする傾向にある場合、値下がりをする傾向にある場合に対応しており、それぞれ分布の中心が 0, 正, 負となっている。図 3(b), (c) については分布の密度が右、および左に集中している。この対数収益率の分布関数を、もとの株価の上昇傾向に変換したものが図に示す  $Q(t)$  である。すなわち、図 3(b) に示す対数収益率をもつ株価は、株価  $x(t)$  が高いときに  $R(t)$  が大きくなる傾向にあるので、より高い株価が実現されると考えられる。図 3(c) に示す対数収益率をもつ株価の場合には、低い株価  $x(t)$  の場合に、より低くなる傾向にある。図 3(a) では、このような変換は必要ない。このように推定された関数を、式 (8), (9), (25) に示す  $x_i(t)$  から観測変数  $y_i(t)$  への変換関数  $G_i(x_i(t))$  として用いる。具体的には、図 3(b) の場合には、 $\log[p(t+1)/p(t)] > 0$  の領域において、ブラウン運動に対応する正規分布の確率より大きくなるので、価格はブラウン運動にしたがう株価より高くなる確率が大きくなる。したがって、株価の変換関数として表示した場合には、図 4(b) に示すような関数となる。図 3(c) に対応する変換関数は、図 4(c) のようになる。な

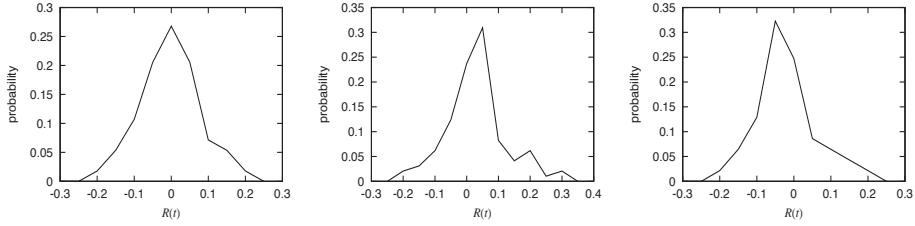


図 3: 株価の対数収益率  $R(t)$  分布の例

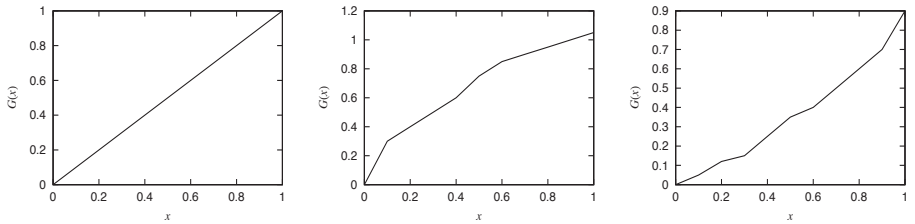


図 4: 株価の価格変換関数の例

お, 式 (8), (9), (25) においてはこのほかに, ランダム変数  $u_i(t), v_i(t)$  の形状を推定する必要があるが, これについては, 式 (8), (9), (25) のブラウン運動の株価挙動と実際に観測された株価の終値のデータのあてはめを最小 2 乗法により行い, 残差から分散を推定する方法を用いている.

人工データにおけるシミュレーション分析とは異なり, 現実データの場合には  $M, N$  は 1 つの組み合わせしかないことと, 状態変数の真の値は不明であることを考慮して, 結果は以下のように簡単にまとめられる. 図 5 には, 観測時系列を潜在時系列で近似した例を示す. 図 5 において  $y_i(t), \hat{y}_i(t)$  はそれぞれ, もとと観測時系列と近似された観測時系列を意味する. このような時系列近似における相対誤差  $|\hat{y}_i(t) - y_i(t)|/y_i(t)$  の平均値は, 0.02 となる. この数値は, 人工データの分析の場合よりは大きい, 極端に過大な数値ではない. このように, 観測時系列の近似特性が良好であることを考慮して, 状態変数の挙動についても, 式 (20) に示すダイナミクスにしたがうと仮定して, PF による状態推定を行う. 具体的には, 株価が関数  $G_i(\cdot)$  により変形を受ける前には理想的なブラウン運動にしたがうと仮定して, 式 (20) に示す定数  $\sigma$  を推定する. また, 図 3, 4 に示すように, それぞれの株価の元の形であるブラウン運動が変形を受ける関数は, 対数収益率の分布から推定されていると仮定する. このように, 人工データの場合と同様な仕組みで, 株価が生成・変形されると仮定して, 本論文で示す推定方法を適用する. その結果を簡単にまとめると, 式 (25) に示す状態変数を  $x_i(t)$  として, 本論文の手法により潜在変数の推定結果を用いて観測時系列を生成する状態変数の値を推定した結果を  $\hat{x}_i(t)$  とした場合の相対誤差  $|\hat{x}_i(t) - x_i(t)|/x_i(t)$  の平均値は 0.028 となる. この結果についても, 人工データにおける分析結果よりは大きい, 過大な数値とはなっておらず, ある程度の精度をたもったものとなっており, 本論文の手法を現実データ分析に適用する場合の, 1 つの検証結果を与えている.

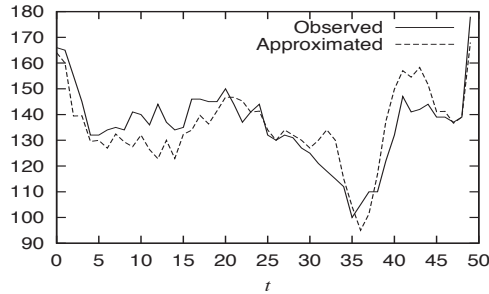


図 5: 観測時系列の潜在時系列による近似の例

## 5 むすび

本論文では、非線形システムが生成する多変量時系列に対する共分散構造分析に基づく近似表現と PF を用いた状態推定の効率化について述べた。多変量時系列に対する共分散構造分析から潜在時系列による近似表現を推定し、潜在時系列についてのみ PF による状態推定を行い、他の観測時系列に対して状態変数の集合により近似する方法を提案した。応用例として、人工的に生成した時系列からの状態推定、現実のデータへの適用可能性を議論した。

今後、より複雑な関数形のシステムへの適用可能性を検討する予定である。

謝辞

本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費基盤研究 (B)23310104 により実施されている。ここに感謝の意を表する。

## 参考文献

- [1] A.Doucet, N.J.Gordon and V.Krishnamurthy, “Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.49,no.3,pp.613-624, 2001.
- [2] A.Doucet, N.de Freitas and N.Gordon, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, New York, Springer Verlag, 2001.
- [3] F.Gustafsson, F.Gunnarsson, N.Bergman, U.Forsell, J.Jansson, R.Karlsson and P.Nordlund, “Particle filters for positioning, navigation, and tracking,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.50,no.2,pp.425-437, 2002.
- [4] J.H.Kotecha and P.M.Djuric, “Gaussian sum particle filtering,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.51,no.10,pp.2602-2612, 2003.

- [5] T.Schon, F.Gustafsson and P.J.Nordlind, “Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state-space models,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.53, no.7, pp.2279-2289, 2005.
- [6] A.Zia, T.Kirubrajan, J.P.Reilly, D.Yee, K.Punithakumar and S.Shirani, “An EM algorithm for nonlinear state estimation with model uncertainty,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.56, no.3, pp.921-936, 2008.
- [7] 時永祥三, 譚康融, “遺伝的プログラミングによる方程式近似に基づく粒子フィルタを用いた時系列からの状態推定とその変動抑制への応用,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J93-A, no.11, pp.739-755, 2010.
- [8] C.Tianshi, T.B.Schon, H.Ohlsson and L.Ljung, “Decentralized particle filter with arbitrary state decomposition,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.59, no.2, pp.465-478, 2011.
- [9] W.Yi, M.R.Morelande, L.Kong and J.Yang, “A computationally efficient particle filter for multitarget tracking using an independent approximation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.61, no.4, pp.843-856, 2013.
- [10] L.Mihayalova, A.Hegyi, A.Gning and R.K.Boel, “Parallelized particle and Gaussian sum particle filters for large-scale freeway traffic systems,” *IEEE Transactions on Intell. Transp. Syst.*, vol.13, no.1, pp.36-48, 2012.
- [11] T.W.Anderson, “The use of factor analysis in the statistical analysis of multiple time series,” *Psychometrika*, vol.28, no.1, pp.1-25, 1963.
- [12] K.G.Joreskog, “Structural analysis of covariance and correlation matrices,” *Psychometrika*, vol.43, no.4, pp.443-477, 1978.
- [13] P.C.M.Molenaar, “A dynamic factor model for the analysis of multivariate time series,” *Psychometrika*, vol.50, no.2, pp.181-202, 1985.
- [14] P.C.M.Molenaar, J.G.de Gooijer and B.Schmitz, “Dynamic factor analysis of nonstationary multivariate time series,” *Psychometrika*, vol.57, no.3, pp.333-349, 1992.
- [15] 時永祥三, 池田欽一, “多変量時系列に対する共分散構造分析と粒子フィルタを用いた大規模非線形システムにおける状態推定,” 電子情報通信学会技術研究報告, NLP, 2013.
- [16] H.L.Lee, V.Padmanabhan and S.Whang, “Information distortion in a supply chain: The bullwhip effect,” *Management Science*, vol.43, no.4, pp.546-558, 1997.
- [17] F.Chen, F.Drezner, J.K.Ryna and D.Simchi-Levi, “Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain: The impact of forecasting, lead times, and information,” *Management Science*, vol.46, no.3, pp.436-443, 2000.

- [18] H.L.Lee, K.C.So and C.S.Tang, “The value of information sharing in a two-level supply chain,” *Management Science*, vol.46, no.5, pp.626-643, 2000.
- [19] N.J.Gordon, D.J.Salmond, A.F.M. Smith, “Novel approach to nonlinear/non-gaussian Bayesian state estimation,” *Proc IEEE*, vol.140, pp.107-113, 1993.
- [20] V.Kadirkamanathan, P.Li, M.H.Jaward and S.G.Farbi, “Particle filtering-based fault detection in nonlinear stochastic systems,” *International Journal of Systems Science*, vol.33, no.4, pp.259-265, 2002.

付録：小売業者と製造業者の間での製造数量の伝達

次のような変数を定義する。一人の小売業者について  $B(t)$  を時刻  $t$  に見込む需要とし以下の式にしたがって生成されると仮定する。

$$B(t+1) = d + \rho B(t) + \epsilon(t). \quad (30)$$

ただし、 $\epsilon(t)$  は、平均がゼロで標準偏差が  $\sigma$  である正規乱数である。小売業者は時刻  $t$  から  $t+l+1$  までの間に発生する需要に相当する数量を製造業者に注文すると仮定すると、その数量  $Y(t) = \sum_{i=1}^{l+1} B(t+i)$  は次のようになる。

$$Y(t) = \frac{1}{1-\rho} \left[ d \sum_{l=1}^{l+1} (1-\rho^l) + \rho(1-\rho^{l+1})B(t) \right] + \epsilon_i(t+l+1) + (1+\rho)\epsilon_i(t+l) + \dots + (1+\rho+\rho^2+\dots+\rho^l)\epsilon_{t+1}. \quad (31)$$

ここで小売業者が保持すべき最適な在庫数量を媒介変数として用いて式 (14) を変形すると、式 (14) は次のような簡潔な形に帰着することができる。

$$Y(t) = B(t) + c_R(B(t) - D(t-1)), \quad c_R = \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}. \quad (32)$$

更に小売業者は、本来の注文数量を自身の都合により変形することが知られている。これを簡潔にまとめると、1) 需要予測の誤差、2) 注文の形式、3) 商品不足への反応、4) 価格への反応があるとされている [17]。1 番目はエージェントが行う需要予測の精度に関するものであり回避できないが、2 番目は注文を数期分をまとめて出すためであり、3 番目は商品の需要が増加する局面で販売数量を確保できなくなることを懸念し、多めに注文を出すことに対応する。また第 4 番目は製品の価格が相対的に安い時期と高い時期が混在する場合には安い (高い) 時期により多く (少なく) 注文することに対応する。これらを関数で表現するために以下のケースとして以下に仮定する。

Case 1:一定量を超えると 1 次以上の関数にしたがって注文を増やす

Case 2:一定数量になるまで注文をしないで、あとでまとめて注文する

Case 3:一定量を超えるまでは 1 次以上の関数にしたがって増やすが、その後は緩やかに増加する

これらのケースでは理想的な注文数量を  $X$  とした場合に、それぞれ Case 1:大きい  $X$  の部分が高めに評価される、Case 2: $X$  についてまとめて注文を行う、Case 3:小さい  $X$  の部分が高めに評価される、に対応する。この 3 つの行動は、式に示す右辺の値を  $X = B(t) + c_R(D(t) - B(t-1))$  とし

た場合に、次の3つの関数により表現できると仮定する.

$$\text{Case 1: } y_i = (X/1.2)^{1.2}$$

$$\text{Case 2: } y_i = r(X - 3.5)$$

$$\text{Case 3: } y_i = 3 \log(1 + 3X)$$

時永 祥三〔九州大学名誉教授〕

池田 欽一〔北九州市立大学経済学部 准教授〕