局所熱非平衡状態を考慮した充填層伝熱モデル

田中, 雄一郎
九州大学総合理工学府先端エネルギー理工学専攻

横峯, 健彦
九州大学総合理工学研究院エネルギー理工学部門

江原, 真司
九州大学総合理工学研究院エネルギー理工学部門

清水, 昭比古
九州大学総合理工学研究院エネルギー理工学部門

https://doi.org/10.15017/14556

出版情報：九州大学大学院総合理工学報告. 28 (1), pp.17-22, 2006-06. 九州大学大学院総合理工学府
バージョン：

九州大学大学院総合理工学報告
第28巻 第1号 17-22頁 平成18年6月

Engineering Sciences Report, Kyushu University
Vol.28, No.1 pp.17–22, JUN. 2006

局所熱非平衡状態を考慮した充填層伝熱モデル

田中 雄一郎*1,†・横峯 健彦*2・江原 真司*2・清水 昭比古*2

（平成18年4月28日 受理）

Model for Heat Transfer in Packed Bed under Local Thermal Non-equilibrium Conditions

Yuichiro TANAKA, Takehiko YOKOMINE, Shinji EBARA, Akihiko SHIMIZU

†E-mail of corresponding author: *tanaka@aees.kyushu-u.ac.jp*

The focus of this work is the forced convective heat transfer in a packed bed under local thermal non-equilibrium conditions. It is considered that local thermal non-equilibrium conditions, which are made by the temperature difference between pebbles and their surrounding continuum media, cause the anisotropic effective thermal conductivity of packed bed by means of thermal dispersion. In this study, new model for the thermal dispersion is established with the same procedure to construct turbulence heat flux model. This model represents that the temperature difference between the phases directly influences thermal dispersion under local thermal non-equilibrium conditions.

Key words: *Packed bed, Convective heat transfer, Thermal dispersion, Local volume averaging method, Local thermal non-equilibrium condition*

1. 緒　　言

近年､多孔質の応用範囲は広がりを見せており､様々な分野で研究が行われている。しかし、多孔質内で起こる種々の現象の解析は何れも容易ではなく、特に、充填層内の熱流動現象はその複雑性からまだ未知な部分が多く、新たな研究課題として注目されている。

充填層内の熱流動解析は、その流れ場の解析に基づいて行われる。充填層内の流体は、粒子の存在による影響を受け複雑な流路を持ち、その流路断面積は流れ方向に変化し、また流路間には流れの干渉も考えられる。機器設計等を考えた場合、このような個々の流路について複雑現象を逐一追うことは現実的とは言えない。よって、充填層内の流れ場の理論解析には、ある種の平均操作が有効となる。その主流と言えるのが、物理量を充填層内の検査体積内で空間平均する局所体積平均法である。ここ数十年間での理論解析の多くが目的としたのは、この局所体積平均操作により見落としてしまう空隙スケールの現象が、巨視的な系に及ぼす影響を評価することにあったと言える。特に、微視的座標系における流体のエネルギー方程式を局所体積平均した際に現れる熱分散項の評価に関する研究は、充填層内の熱流動の解明に大きく寄与してきた。

熱分散とは、微視的な速度場の変動に起因した熱混合を表し、従来の研究から、充填層内の有効熱伝導率は分子熱拡散と熱分散の相乗効果として表されること、流れが速くなると充填層内の伝熱は熱分散に支配されること、また、熱分散が有効熱伝導率の非等方性に影響を及ぼしていることなどが分かっている[1]。しかし、これらの研究は流体と固体粒子の温度を平衡とみなす局所熱平衡状態におけるものが主であり、現在、充填層の応用が検討されている触媒、熱交換器、燃焼器などの開発においては、従来の局所熱平衡状態でのモデルに替わる新しいモデルが必要となるであろう。何故なら、局所熱非平衡状態における熱分散は流体と粒子間の熱伝達による影響を受け、局所熱平衡状態でのそれとは異なる挙動を示すと考えられるからである。本研究では、局所熱非平衡状態における充填層伝熱モデルの構築の為に必要となる、熱分散流束のモデリングを行った。

2. 理 論 背 景

2.1 局所体積平均

局所体積平均とは、固体粒子と空隙部を流れる流体により占められている充填層内の検査体積V（Fig.1）において、微視的座標空間（ξ空間）の物理量を巨視的座標空間（x空間）の物理量に変換するもので、この操

*1 先端エネルギー理工学専攻 修士課程
*2 エネルギー理工学部門

作により多孔質内の複雑な輸送現象の記述を簡易化し、その解析を効率よく行うことができる。検査体積Vが以下の関係式を満たす時、局所体積平均は有効となる[2)]。

$$d \ll l \ll L \tag{1}$$

dは粒子径、lは検査体積Vの、Lは充填層の代表寸法を表す。この条件を満たす検査体積Vにおいて、流体に関するある物理量ψの局所体積平均値は次式で定義される。

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V}\int_{V_f} \psi \mathrm{d}V \tag{2}$$

V_f は流体が占める体積である。また、その局所相平均値は

$$\langle \psi \rangle^f = \frac{1}{V_f}\int_{V_f} \psi \mathrm{d}V \tag{3}$$

で定義され、充填層内の空隙率を$\varepsilon = V_f/V$とおくと、(2)、(3)式で定義される平均値の間には次の関係式が成り立つ。

$$\langle \psi \rangle = \varepsilon \langle \psi \rangle^f \tag{4}$$

更に、ψをその局所相平均値とその平均値からの偏差の和として表す。

$$\psi = \langle \psi \rangle^f + \hat{\psi} \tag{5}$$

$$\langle \hat{\psi} \rangle^f = 0 \tag{6}$$

微視的支配方程式から巨視的支配方程式を導くには、$\boldsymbol{\xi}$座標におけるψの勾配や時間微分を局所体積平均し、$\boldsymbol{x}$座標の関数で表す必要がある。この議論はSlattery[3)]

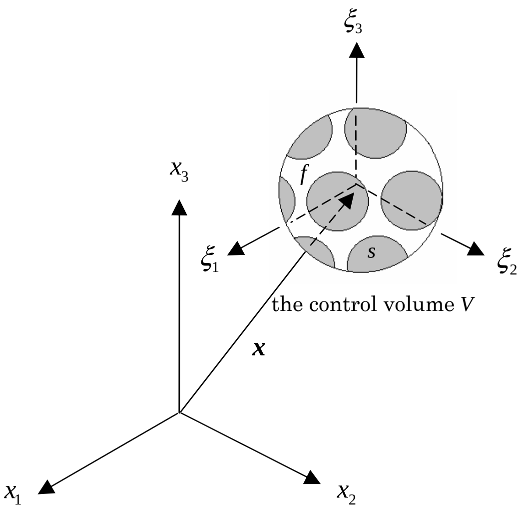

Fig.1 Microscopic and Macroscopic coordinates

やWhitaker[4)]等により行われ、次の関係が示されている。

$$\langle \nabla \psi \rangle = \nabla \langle \psi \rangle + \frac{1}{V}\int_{A_{fs}} \psi \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{7}$$

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V}\int_{A_{fs}} \psi \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{8}$$

A_{fs}は粒子と流体の界面における表面積で、d$\boldsymbol{A}$は流体側から見て外向き方向の面積要素ベクトルである。$\boldsymbol{w}$は流体と固体粒子の界面の速度を表す。

2.2 巨視的支配方程式

微視的座標系における支配方程式（連続の式、Navier-Stokes方程式、各相のエネルギー方程式）は、

$$\frac{\partial u_j}{\partial \xi_j} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(u_j u_i\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi_i} + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\right)\right\} \tag{10}$$

$$\left(\rho c_p\right)_f \left\{\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(u_j T_f\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(k_f \frac{\partial T_f}{\partial \xi_j}\right) \tag{11}$$

$$\left(\rho c_p\right)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(k_s \frac{\partial T_s}{\partial \xi_j}\right) \tag{12}$$

ρは密度、νは動粘性係数、c_pは定圧比熱、kは熱伝導率を、添え字fとsはそれぞれ流体と固体粒子に関する物理量を表す。簡単の為に、全ての物性値は定数とみなし、空隙率εは一定、更に充填層構造が変形しない（$\boldsymbol{w}$ = 0）と仮定する。これらの仮定の下、(9)から(12)式を検査体積Vに関して局所体積平均し、(5)から(8)式を用いて整理すると、以下の巨視的支配方程式を導くことができる。

$$\frac{\partial \langle u_j \rangle^f}{\partial x_j} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{D\langle u_i \rangle^f}{Dt} = -\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial \langle p_f \rangle^f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\nu_f\left(\frac{\partial \langle u_i \rangle^f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle^f}{\partial x_i}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}\left\{-\frac{p_f}{\rho_f}\delta_{ij} + \nu_f\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\right)\right\} n_j \mathrm{d}A - \frac{\partial}{\partial x_j}\langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle^f \tag{14}$$

$$\frac{D\langle T_f \rangle^f}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\alpha_f \frac{\partial \langle T_f \rangle^f}{\partial x_j}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}} \alpha_f T_f n_j \mathrm{d}A\right\}$$
$$+ \frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}} \alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial \xi_j} n_j \mathrm{d}A - \frac{\partial}{\partial x_j}\langle \hat{u}_j \hat{T}_f \rangle^f \tag{15}$$

$$\frac{\partial\langle T_s\rangle^s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\alpha_s\frac{\partial\langle T_s\rangle^s}{\partial x_j}\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{1}{V_s}\int_{A_{fs}}\alpha_s T_s n_j \mathrm{d}A\right\}+\frac{1}{V_s}\int_{A_{fs}}\alpha_s\frac{\partial T_s}{\partial \xi_j}n_j\mathrm{d}A \quad (16)$$

n_jは流体から粒子を指す方向の単位法線ベクトル、αは温度伝導率を表す。上式において

$$\frac{D\psi}{Dt}=\frac{\partial\psi}{\partial t}+\langle u_j\rangle^f\frac{\partial\psi}{\partial x_j} \quad (17)$$

を用いている。

界面における境界条件は、以下の通りである。

$$u_i=0 \quad (18)$$

$$T_f=T_s \quad (19)$$

$$k_f n_j\frac{\partial T_f}{\partial \xi_j}=k_s n_j\frac{\partial T_s}{\partial \xi_j} \quad (20)$$

(13)から(16)式の巨視的支配方程式を解く為には、それぞれの面積分項をモデル化し、この方程式群を閉じる必要がある。

(14)式の右辺の面積分は(5)、(6)式より

$$\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}\left\{-\frac{p_f}{\rho_f}\delta_{ij}+\nu_f\left(\frac{\partial u_i}{\partial\xi_j}+\frac{\partial u_j}{\partial\xi_i}\right)\right\}n_j\mathrm{d}A$$

$$=\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}\left\{-\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij}+\nu_f\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial\xi_j}+\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial\xi_i}\right)\right\}n_j\mathrm{d}A \quad (21)$$

と表すことができ、この項が固体粒子の存在による流体抵抗の寄与を表わしていることが分かる。この項は一般にDarcy-Forchheimerの法則を用いて次式でモデル化される[5)]。

$$\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}\left\{-\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij}+\nu_f\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial\xi_j}+\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial\xi_i}\right)\right\}n_j\mathrm{d}A$$

$$=-\left(\frac{\nu_f\varepsilon}{K}+F\varepsilon^2\sqrt{\langle u_j\rangle^f\langle u_j\rangle^f}\right)\langle u_i\rangle^f \quad (22)$$

Kは透過率、FはForchheimer係数である。

局所熱平衡状態における研究[1)]から、流れが速くなるにつれ、(15)、(16)式における右辺第二項の面積分の寄与は他の項の寄与と比べて充分に小さくなると類推される。そこで本研究では、この項の寄与を無視できると仮定する。(15)、(16)式の右辺第三項の面積分は、検査体積Vにおける平均熱伝達率hを用いると境界条件(20)式より、

$$\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}\alpha_f\frac{\partial T_f}{\partial\xi_j}n_j\mathrm{d}A=\frac{1}{V_f(\rho c_p)_f}hA_{fs}(\langle T_s\rangle^s-\langle T_f\rangle^f) \quad (23)$$

$$\frac{1}{V_s}\int_{A_{fs}}\alpha_s\frac{\partial T_s}{\partial\xi_j}n_j\mathrm{d}A=\frac{1}{V_s(\rho c_p)_s}hA_{fs}(\langle T_f\rangle^f-\langle T_s\rangle^s) \quad (24)$$

(13)から(16)式の巨視的方程式を閉じる為には、(14)式と(15)式の右辺第四項、$-\partial\langle\hat{u}_i\hat{u}_j\rangle^f/\partial x_j$ と熱分散の寄与を表す $-\partial\langle\hat{u}_j\hat{T}_f\rangle^f/\partial x_j$ をモデル化すれば良い。本研究では、次節から、乱流熱流束のモデリングと同様の手順で熱分散流束 $\langle\hat{u}_i\hat{T}_f\rangle^f$ に関する輸送方程式を導出し、熱分散流束のモデルを構築していく。

3. 熱分散流束のモデリング

3.1 熱分散輸送方程式

熱分散流束 $\langle\hat{u}_i\hat{T}_f\rangle^f$ に関する輸送方程式を導く為に、流体の速度偏差 $\hat{u}_i$ と温度偏差 $\hat{T}_f$ に関する輸送方程式を導く。(5)式を(9)、(10)、(11)式に代入し、それぞれ(13)、(14)、(15)式との差を取ると、

$$\frac{\partial\hat{u}_j}{\partial\xi_j}=0 \quad (25)$$

$$\frac{D\hat{u}_i}{Dt}+\hat{u}_j\frac{\partial\langle u_i\rangle^f}{\partial x_j}+\hat{u}_j\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial\xi_j}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left\{-\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij}+\nu_f\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial\xi_j}+\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial\xi_i}\right)\right\}+\mathbf{R}_1 \quad (26)$$

$$\frac{D\hat{T}_f}{Dt}+\hat{u}_j\frac{\partial\langle T_f\rangle^f}{\partial x_j}+\hat{u}_j\frac{\partial\hat{T}_f}{\partial\xi_j}=\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\alpha_f\frac{\partial\hat{T}_f}{\partial\xi_j}\right)+\mathbf{R}_2 \quad (27)$$

(26)、(27)式において、

$$\mathbf{R}_1=\left(\frac{\nu_f\varepsilon}{K}+F\varepsilon^2\sqrt{\langle u_j\rangle^f\langle u_j\rangle^f}\right)\langle u_i\rangle^f+\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\hat{u}_j\hat{u}_i\rangle^f \quad (28)$$

$$\mathbf{R}_2=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}\alpha_f T_f n_j dS\right)$$

$$-\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}\alpha_f\frac{\partial T_f}{\partial x_j}n_j\mathrm{d}A+\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\hat{u}_j\hat{T}_f\rangle^f \quad (29)$$

ここで、

$$\frac{D}{Dt}\left(\hat{u}_i\hat{T}_f\right)=\hat{u}_i\frac{D\hat{T}_f}{Dt}+\hat{T}_f\frac{D\hat{u}_i}{Dt} \quad (30)$$

より、(26)式の両辺に $\hat{T}_f$ を、(27)の両辺に $\hat{u}_i$ を掛けて足し合わせると、次式を導くことができる。

$$\frac{D}{Dt}(\hat{u}_i\hat{T}_f)+\hat{T}_f\hat{u}_j\frac{\partial\langle u_i\rangle^f}{\partial x_j}$$

$$+\hat{u}_i\hat{u}_j\frac{\partial\langle T_f\rangle^f}{\partial x_j}+\hat{T}_f\hat{u}_j\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial\xi_j}+\hat{u}_i\hat{u}_j\frac{\partial\hat{T}_f}{\partial\xi_j}$$

$$=\hat{T}_f\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left\{-\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij}+\nu_f\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial\xi_j}+\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial\xi_i}\right)\right\}$$

$$+\hat{u}_i\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\alpha_f\frac{\partial\hat{T}_f}{\partial\xi_j}\right)+\hat{T}_f\mathbf{R}_1+\hat{u}_i\mathbf{R}_2 \quad (31)$$

(31)式の局所体積平均を取ると、熱分散流束 $\left\langle \hat{u}_i \hat{T}_f \right\rangle^f$ に関する輸送方程式を導出できる。(7)、(8)式と境界条件(18)式より、

$$\frac{D}{Dt}\left\langle \hat{u}_i \hat{T}_f \right\rangle^f + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle \hat{u}_i \hat{u}_j \hat{T}_f \right\rangle^f + \left\langle \hat{T}_f \hat{u}_j \right\rangle^f \frac{\partial \langle u_i \rangle^f}{\partial x_j} + \left\langle \hat{u}_i \hat{u}_j \right\rangle^f \frac{\partial \left\langle T_f \right\rangle^f}{\partial x_j}$$

$$= \left\langle \hat{T}_f \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{ -\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij} + \nu_f \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \xi_i} \right) \right\} \right\rangle^f + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle \alpha_f \hat{u}_i \frac{\partial \hat{T}_f}{\partial \xi_j} \right\rangle^f + \frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}} \hat{u}_i \left(\alpha_f \frac{\partial \hat{T}_f}{\partial \xi_j} \right) n_j \mathrm{d}A - \left\langle \alpha_f \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial \hat{T}_f}{\partial \xi_j} \right\rangle^f + \left\langle \hat{T}_f \mathbf{R}_1 \right\rangle^f + \left\langle \hat{u}_i \mathbf{R}_2 \right\rangle^f \quad (32)$$

(28)、(29)式より $\mathbf{R}_1$ と $\mathbf{R}_2$ は $\boldsymbol{\xi}$ に依存しないので、

$$\left\langle \hat{T}_f \mathbf{R}_1 \right\rangle^f = \left\langle \hat{T}_f \right\rangle^f \mathbf{R}_1 = 0 \quad (33)$$

$$\left\langle \hat{u}_i \mathbf{R}_2 \right\rangle^f = \left\langle \hat{u}_i \right\rangle^f \mathbf{R}_2 = 0 \quad (34)$$

以上より、

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}\left\langle \hat{u}_i \hat{T}_f \right\rangle^f}_{\text{慣性項}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ \left\langle \hat{u}_i \hat{u}_j \hat{T}_f \right\rangle^f + \left\langle \alpha_f \hat{u}_i \frac{\partial \hat{T}_f}{\partial \xi_j} \right\rangle^f \right\}}_{\text{拡散項}}$$

$$= \underbrace{-\left\langle \hat{T}_f \hat{u}_j \right\rangle^f \frac{\partial \langle u_i \rangle^f}{\partial x_j} - \left\langle \hat{u}_i \hat{u}_j \right\rangle^f \frac{\partial \left\langle T_f \right\rangle^f}{\partial x_j}}_{\text{生成項}} \underbrace{+ \left\langle \hat{T}_f \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{ -\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij} + \nu_f \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \xi_i} \right) \right\} \right\rangle^f}_{\text{(A)項}}$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}} \hat{u}_i \left(\alpha_f \frac{\partial \hat{T}_f}{\partial \xi_j} \right) n_j \mathrm{d}A}_{\text{(B)項}} \underbrace{- \left\langle \alpha_f \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial \hat{T}_f}{\partial \xi_j} \right\rangle^f}_{\text{散逸項}} \quad (35)$$

各項の物理的意味は乱流熱流束モデルから類推した[6)]。

3.2 モデリング

本研究では、拡散項と散逸項を無視して(A)と(B)項のモデル化について考える。まず、(A)項のモデル化について示す。グリーンの定理より

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{ -\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij} + \nu_f \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \xi_i} \right) \right\} \right\rangle^f = \frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}} \left\{ -\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij} + \nu_f \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} n_j \mathrm{d}A \quad (36)$$

(22)式より(36)式は次式のように変換できる。

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{ -\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij} + \nu_f \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \xi_i} \right) \right\} \right\rangle^f = -\left(\frac{\nu_f \varepsilon}{K} + F\varepsilon^2 \sqrt{\left\langle u_j \right\rangle^f \left\langle u_j \right\rangle^f} \right) \langle u_i \rangle^f \quad (37)$$

よって、

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{ -\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij} + \nu_f \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \xi_i} \right) \right\} = -\left(\frac{\nu_f \varepsilon}{K} + F\varepsilon^2 \sqrt{\left\langle u_j \right\rangle^f \left\langle u_j \right\rangle^f} \right) u_i + \phi_i \quad (38)$$

ϕ は積分定数であり次式を満たす。

$$\langle \phi_i \rangle^f = 0 \quad (39)$$

(38)式の両辺に $\hat{T}_f$ を掛け、その局所体積平均を取ると

$$\left\langle \hat{T}_f \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{ -\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij} + \nu_f \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \xi_i} \right) \right\} \right\rangle^f = -\left(\frac{\nu_f \varepsilon}{K} + F\varepsilon^2 \sqrt{\left\langle u_j \right\rangle^f \left\langle u_j \right\rangle^f} \right) \left\langle u_i \hat{T}_f \right\rangle^f + \left\langle \phi_i \hat{T}_f \right\rangle^f \quad (40)$$

(5)と(6)式より $\left\langle u_i \hat{T}_f \right\rangle^f = \left\langle \hat{u}_i \hat{T}_f \right\rangle^f$ が成立するので、(A)項を次式で近似し、そのモデルとする。

$$\left\langle \hat{T}_f \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{ -\frac{\hat{p}_f}{\rho_f}\delta_{ij} + \nu_f \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \xi_i} \right) \right\} \right\rangle^f \approx -c_o \left(\frac{\nu_f \varepsilon}{K} + F\varepsilon^2 \sqrt{\left\langle u_j \right\rangle^f \left\langle u_j \right\rangle^f} \right) \left\langle \hat{u}_i \hat{T}_f \right\rangle^f \quad (41)$$

c_o はモデル定数である。

一方、(B)項は境界条件(18)式より

$$\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}} \hat{u}_i \left(\alpha_f \frac{\partial \hat{T}_f}{\partial \xi_j} \right) n_j \mathrm{d}A = -\langle u_i \rangle^f \frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}} \alpha_f \frac{\partial \hat{T}_f}{\partial \xi_j} n_j \mathrm{d}A \quad (42)$$

(23)式の関係より、(B)項は次式で表すことができる。

$$\frac{1}{V_f}\int_{A_{fs}}\hat{u}_i\left(\alpha_f\frac{\partial\hat{T}_f}{\partial\xi_j}\right)n_j\mathrm{d}A$$
$$=-\frac{\left\langle u_i\right\rangle^f}{V_f\left(\rho c_p\right)_f}hA_{fs}\left(\left\langle T_s\right\rangle^s-\left\langle T_f\right\rangle^f\right) \quad (43)$$

上式より、局所熱平衡状態では(B)項は無視できるが、局所熱非平衡状態では無視できないことが分かる。よって、(B)項が局所熱平衡状態と局所熱非平衡状態の違いを陽的に表していると言える。

以上の議論より、(35)式は

$$\frac{D}{Dt}\left\langle\hat{u}_i\hat{T}_f\right\rangle^f=-\left\langle\hat{T}_f\hat{u}_j\right\rangle^f\frac{\partial\left\langle u_i\right\rangle^f}{\partial x_j}-\left\langle\hat{u}_i\hat{u}_j\right\rangle^f\frac{\partial\left\langle T_f\right\rangle^f}{\partial x_j}$$
$$-c_o\left(\frac{\nu_f\varepsilon}{K}+F\varepsilon^2\sqrt{\left\langle u_j\right\rangle^f\left\langle u_j\right\rangle^f}\right)\left\langle\hat{u}_i\hat{T}_f\right\rangle^f$$
$$+\frac{\left\langle u_i\right\rangle^f}{V_f\left(\rho c_p\right)_f}hA_{fs}\left(\left\langle T_s\right\rangle^s-\left\langle T_f\right\rangle^f\right) \quad (44)$$

4. 検　　証

本モデルの検証を、定常状態で巨視的一軸方向流れ $\left\langle u_i\right\rangle={}^t\left(u_D,0,0\right)$ の系について行う。この時、$\partial\left\langle u_i\right\rangle^f/\partial x_j$ の寄与は無視できる程に小さいとみなすことができる。更に慣性項を無視すると

$$-\left\langle\hat{u}_i\hat{T}_f\right\rangle^f=\left\{c_0\left(\frac{\nu_f}{K}\varepsilon+F\varepsilon^2\sqrt{\left\langle u_j\right\rangle^f\left\langle u_j\right\rangle^f}\right)\right\}^{-1}$$
$$\times\left\{\left\langle\hat{u}_i\hat{u}_j\right\rangle^f\frac{\partial\left\langle T_f\right\rangle^f}{\partial x_j}-\frac{h\left\langle u_i\right\rangle^f}{\left(\rho c_p\right)_f}\frac{A_{fs}}{V_f}\left(\left\langle T_s\right\rangle^s-\left\langle T_f\right\rangle^f\right)\right\} \quad (45)$$

上式を巨視的熱物性テンソル α_{ij} とベクトル λ_i を用いて整理すると、

$$-\left(\rho c_p\right)_f\left\langle\hat{u}_i\hat{T}_f\right\rangle=\alpha_{ij}\frac{\partial\left\langle T_f\right\rangle^f}{\partial x_j}-\lambda_i\left(\left\langle T_s\right\rangle^s-\left\langle T_f\right\rangle^f\right) \quad (46a)$$

$$\alpha_{ij}=\frac{\left(\rho c_p\right)_f}{c_0\left(\frac{\nu_f}{K}+Fu_D\right)}\left\langle\hat{u}_i\hat{u}_j\right\rangle^f \quad (46b)$$

$$\lambda_i=\frac{h\left\langle u_i\right\rangle^f}{c_0\left(\frac{\nu_f}{K}+Fu_D\right)}\frac{A_{fs}}{V_f} \quad (46c)$$

(46a)式はQuintard[7]らが提案したtwo-equationモデルと類似した形となっていることが分かる。これは局所熱非平衡状態における熱分散流束が、流体と固体粒子の温度差に影響を受ける可能性を示唆している。また、局所熱平衡状態を仮定すると、上式は中山ら[8]が提案した代数熱分散モデルと一致する。以下、中山らが行った検証手順を追うことにより、局所熱平衡状態における本モデルの妥当性を示す。(46b)式において、局所熱平衡状態を仮定し流れと平行な成分に注目すると、

$$\alpha_{xx}=\frac{\left(\rho c_p\right)_f}{c_0\left(\frac{\nu_f}{K}+Fu_D\right)}\left\langle\hat{u}_x{}^2\right\rangle^f \quad (47)$$

Ergunの経験則[9]より、粒子径 d を持つ充填層の透過率 K とForchheimer係数 F は次式で表される。

$$K=\frac{\varepsilon^3d^2}{150\left(1-\varepsilon\right)^2} \quad (48a)$$

$$F=1.75\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3d} \quad (48b)$$

また、中山らが行った数値実験[8]より

$$\sqrt{\left\langle\hat{u}_x{}^2\right\rangle^f}\propto\frac{\left(1-\varepsilon\right)^{3/4}}{\varepsilon}u_D \quad (49)$$

この結果を引用すると、局所熱平衡状態では

$$\frac{\alpha_{xx}}{k_f}\approx\frac{c_{xx}\varepsilon\left(1-\varepsilon\right)^{1/2}\mathrm{Pe}_d{}^2}{150\left(1-\varepsilon\right)\mathrm{Pr}+1.75\mathrm{Pe}_d} \quad (50)$$

c_{xx} はモデル定数を、Pe_d は粒子径 d に基づいたペクレ数 $\mathrm{Pe}_d=u_D d/\alpha_f$ を表す。上式より、低ペクレ数において α_{xx}/k_f が Pe_d の二乗に、高ペクレ数において Pe_d に比例する事がわかる。これは局所熱平衡状態における、巨視的一軸方向流れ系における従来の知見と一致する。

5. 結　　論

本研究では、局所熱非平衡状態における熱分散モデルの構築を試みた。得られたモデルは、局所熱非平衡状態における熱分散流束が、流体と粒子の温度差により影響を受ける可能性を示唆しており、Quintard [7]らが提案した two-equation モデルにおける示唆と一致する。また、本モデルから求めた局所熱平衡状態での巨視的一軸方向流れ系における熱分散係数は、従来の知見と一致することが分かった。

参 考 文 献

1) Kaviany, M., 1995, “Principles of heat transfer in porous media, 2nd ed.,” Springer Verlag, New York.
2) Whitaker, S., 1969, “Advances in theory of fluid motion in porous media,” Ind. Engng Chem., 61, 14-28.
3) Slattery, J. C., 1967, “Flow of viscoelastic fluids through porous media,” AIChEJ., 13, 1066-1071.
4) Whitaker, S., 1967, “Diffusion and dispersion in porous media,” AIChEJ., 13, 420-427.

5) Hsu, C. T. and Cheng, P., 1990, “Thermal dispersion in a porous medium,” Int. J. Heat Mass Transfer, 29, 2002-2006.
6) 数値流体力学編集委員会　編, “ 数値流体力学シリーズ 第三巻　乱流解析, ” 東京大学出版会, 1995, 259-269
7) Quintard, M., Kaviany, M. and Whitaker, S., 1997, “Two-medium treatment of heat transfer in porous media：Numerical resultes for effective properties,” Adv. Water. Resour., 20, 77-94.
8) Nakayama, A. and Kuwahara, F., 2005, “Algebraic model for thermal dispersion heat flux within porous media,” Wiley Inter Science, DOI 10.1002/aic.10503
9) Ergun, S., 1952, “Fluid flow through packed column,” Chem. Eng. Prog., 48, 89-94.