1変数の非線型方程式の数値解法について

篠崎, 喜賢

https://doi.org/10.15017/1448943

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 8 (1), pp.11-19, 1971-10. 九州大学教養部数学教室
バージョン：
権利関係：

Math. Rep.
VIII-1, 1971.

1変数の非線型方程式の数値解法について

篠　崎　喜　賢

〔1971. 8. 1 受付〕

0. はじめに

5次以上の代数方程式の解は良く知られているように数値解法 (numerical solution) で近似的に求める以外に方法はない. これについては末尾の文献〔1〕,〔2〕,〔3〕で述べた.

ここでは代数方程式に限らず，一般の方程式を〔1〕,〔2〕,〔3〕の方法で解く. つまり

問題 F を1変数の関数 (非線型) とするとき，方程式

$$F(x)=0$$

の根を逐次近似法で解くこと

である.

一般に数値解法には大別して2種類ある. その一つは出発値を必要とせず根の比較的良い近似値をみつけようとするもので,代表的な方法として Bernoulli 法, Graeffe 法などがある. 他に出発値を適当にとり所要の根の精度を逐次改良し精度を高めていく方法があり，例えば Newton-Raphson 法, Regula-Falsi 法などがある.

ここでは後者に属する一つの方法を与え，また得られた反復式と既知の反復式との関係についても考察する. つまり

1) 反復式を作る. ($F(x)=0$ の所要の根 α を含む)
2) 収束条件をしらべる. ($F(x)=0$ の所要の根 α を含む)
3) 上の反復式と収束条件から $F(x)=0$ の所要の根 α を取り除いた形で反復式と収束条件を求める.
4) 反復の位数と収束の速さについてしらべる.

1. 反復式と収束条件 (所要の根を含む)

初期値 x_0 を与え，第 i 近似値 x_i と所要の根 α とを M: N の比に内分 (外分) する点として第 $i+1$ 近似値 x_{i+1} をとれば次のような反復式

$$x_{i+1}=\frac{M(x_i)\alpha+N(x_i)x_i}{M(x_i)+N(x_i)}\qquad (i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)\qquad\cdots\cdots(1.\ 1)$$

を得る．この反復式を変形すれば，つぎのようになる．

$$x_{i+1}-\alpha=\frac{N(x_i)}{M(x_i)+N(x_i)}(x_i-\alpha)\qquad (i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots).\qquad\cdots\cdots(1.\ 2)$$

上の方法で得られた近似値の系列

$\{x_i\}$： x_0, x_1, x_2, $\cdots\cdots$

が所要の根に収束するための条件は，任意の $i>i_0$ で，

$$\left|\frac{N(x_i)}{M(x_i)+N(x_i)}\right|<1\qquad\cdots\cdots(1.\ 3)$$

となるような i_0 が存在することである．

2. 反復式と収束条件（所要の根を含まぬ）

非線型方程式 $F(x)=0$ の近似したい根（所要の根）を α とする．

$P(x)$, $Q(x)$ を α に無関係な関数（$F(\alpha)$ とは関係する）とし，次のように $M(x)$, $N(x)$ をきめる．

$$\begin{cases} M(x)=\dfrac{P(x)}{(x-\alpha)^n} \\ N(x)=-\dfrac{P(x)}{(x-\alpha)^n}+\dfrac{Q(x)}{(x-\alpha)^{n-1}} \end{cases}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)\qquad\cdots\cdots(2.\ 1)$$

このとき反復式（1. 1）を変形して次の結果が得られる．

結果 1. 反復式は次のようになる：

$$\begin{aligned} x_{i+1}&=\frac{-P(x_i)+x_i\cdot Q(x_i)}{Q(x_i)} \\ &=x_i-\frac{P(x_i)}{Q(x_i)}\qquad (i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots).\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(2.\ 2)$$

次に収束条件について考えよう．（1. 3）より収束条件は次のように変形される．任意の $i>i_0$ で，

$$\left|1-\frac{P(x_i)}{(x_i-\alpha)Q(x_i)}\right|<1$$

すなわち

$$0<\frac{P(x_i)}{(x_i-\alpha)Q(x_i)}<2\qquad\cdots\cdots(2.\ 3)$$

となるような i_0 が存在することである.

したがって,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{P(x_i)}{(x_i-\alpha)Q(x_i)} \qquad \cdots\cdots(2.\ 4)$$

が有限確定の極限値 K をもちかつ $0<K<2$ となることが条件となる.

収束条件から次の結果が得られる:

(i) 収束するための必要条件

$P(x)$, $Q(x)$ が区間 I $(\alpha\in I)$ で 2回連続微分可能で, かつ

$$\begin{cases} P(\alpha)=0 \\ 0<\dfrac{P'(\alpha)}{Q(\alpha)}<2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2.\ 5)$$

をみたす.

(ii) 収束するための十分条件

条件 (2. 5) が成立しかつ α の r 近傍 $U(\alpha,\ r)$ において,

$$x_i\in U(\alpha,\ r) \qquad \cdots\cdots(2.\ 6)$$

となる x_i が存在する.

〔(i), (ii) の証明〕

(i)

$$K=\lim_{i\to\infty}\frac{P(x_i)}{(x_i-\alpha)Q(x_i)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{P(x)}{(x-\alpha)Q(x)}.$$

よって,

$$P(\alpha)=0$$

$$\therefore\quad K=\lim_{x\to\alpha}\frac{P'(x)}{Q(x)}=\frac{P'(\alpha)}{Q(\alpha)}.$$

(ii)

$P(x)$を$x=\alpha$ でテーラー展開して,

$$P(x)=P(\alpha)+P'(\xi)(x-\alpha).$$

$P(\alpha)=0$ より,

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)Q(x)}=\frac{P'(\xi)}{Q(x)}.$$

一方，

$$0<\frac{P'(\alpha)}{Q(\alpha)}<2$$

から

$$0<\frac{P'(x)}{Q(x)}<2 \qquad (x \in U(\alpha,\ r))$$

となる r が存在する．

よって，

$$x \in U(\alpha,\ r) \longrightarrow 0<\frac{P(x)}{(x-\alpha)Q(x)}<2. \qquad \text{(証了)}$$

したがって，$x_i \in U(\alpha,\ r)$ となる i が存在すれば，$\{x_i\} \longrightarrow \alpha$ となる．

上述のことから次の結果が得られる．

結果 2. x_0 を α の十分近くにとることによって反復式 (2.2) は α に必ず収束することが保証される．

3. 反 復 の 位 数

$\lim\limits_{i\to\infty} x_i=\alpha$ のとき $\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{(x_{i+1}-\alpha)}{(x_i-\alpha)^k}=c\ (\neq 0)$ のような c が存在すれば収束の速さは k 位（次）または反復の位数は k 位（次）であるという．

結果 3. 次の条件 (3. 1) が成立するとき反復の位数は k となる：

$$\left\{\begin{array}{l} P^{(j)}(\alpha)=jQ^{(j-1)}(\alpha) \\ P^{(k)}(\alpha)\neq kQ^{(k-1)}(\alpha) \end{array}\right. \qquad (j=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,\ k-1), \qquad \cdots\cdots(3.\ 1)$$

ただし $P^{(j)}$, $Q^{(j)}$ はそれぞれ P, Q の j 次導関数である．

〔証明〕

$$f_1(x)=-P(x)+(x-\alpha)Q(x)$$
$$f_2(x)=(x-\alpha)^kQ(x)$$

とおくと，

$$f_1^{(i)}(x)=-P^{(i)}(x)+iQ^{(i-1)}(x)+(x-\alpha)Q^{(i)}(x)$$

$$\therefore\ f_1^{(i)}(\alpha)=-P^{(i)}(\alpha)+iQ^{(i-1)}(\alpha)$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} 0 & (i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,\ k-1) \\ -P^{(k)}(\alpha)+kQ^{(k-1)}(\alpha)\neq 0 & (i=k). \end{array}\right.$$

$$f_2^{(i)}(x)=\sum_{r=0}^{i}{}_iC_r\frac{k!}{(k-i+r)!}(x-\alpha)^{k-i+r}Q^{(r)}(x)$$

$$\therefore\quad f_2^{(i)}(\alpha)=\begin{cases}0 & (i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,\ k-1)\\ k!Q(\alpha) & (i=k).\end{cases}$$

よって，

$$\begin{aligned}L_1=\lim_{i\to\infty}\frac{x_{i+1}-\alpha}{(x_i-\alpha)^k}&=\lim_{i\to\infty}\frac{N(x_i)}{M(x_i)+N(x_i)}\cdot\frac{1}{(x_i-\alpha)^{k-1}}\\&=\lim_{x\to\alpha}\frac{-P(x)+(x-\alpha)Q(x)}{(x-\alpha)^kQ(x)}\\&=\lim_{x\to\alpha}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\\&=\frac{-P^{(k)}(\alpha)+kQ^{(k-1)}(\alpha)}{k!Q(\alpha)}\neq 0.\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(3.\ 2)$$

（証了）

〔注意〕（2. 1）で $n=0$ としても反復式（2. 2），収束条件（2. 4）などはそのままで成立する．

そこで $n=0$ とすれば次の事柄が成立する．

結果 4. 位数 k のときには，$x\to\alpha$ のとき $N(x)$ は $M(x)$ に対して k 位の無限小になる．すなわち，

$$(x\to\alpha)\longrightarrow\{M(x)\}^k\sim N(x)\qquad(P'(\alpha)\neq 0).$$

〔証明〕

位数 k だから $x=\alpha$ は，$f_1(x)(=-P(x)+(x-\alpha)Q(x))$ の重複度 k の重根となる．

すなわち，

$$f_1(x)=(x-\alpha)^kg_1(x)\qquad(g_1(\alpha)\neq 0).$$

一方，$P(\alpha)=0$ から

$$\{P(x)\}^k=(x-\alpha)^kg_2(x)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad L_2&=\lim_{x\to\alpha}\frac{N(x)}{\{M(x)\}^k}\\&=\lim_{x\to\alpha}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}.\end{aligned}$$

よって，

$$P'(\alpha) \neq 0 \longrightarrow g_2(\alpha) \neq 0$$

より，

$$L_2 = \frac{g_1(\alpha)}{g_2(\alpha)}.$$

ところで，

$$g_1(\alpha) = \frac{-P^{(k)}(\alpha) + kQ^{(k-1)}(\alpha)}{k!}$$

$$g_2(\alpha) = \{P'(\alpha)\}^k$$

$$\therefore \quad L_2 = \frac{-P^{(k)}(\alpha) + kQ^{(k-1)}(\alpha)}{k!\{P'(\alpha)\}^k} \qquad (\text{有限確定} \neq 0). \qquad \cdots\cdots(3.\ 3)$$

（証了）

結果 5.

$$(\mathrm{i}) \quad n = 0 \longrightarrow \begin{cases} L_1 = \dfrac{N^{(k)}(\alpha)}{k!\{M'(\alpha)+N'(\alpha)\}} & \cdots\cdots(3.\ 4) \\[2ex] L_2 = \dfrac{N^{(k)}(\alpha)}{k!\{M'(\alpha)\}^k}. & \cdots\cdots(3.\ 5) \end{cases}$$

$$(\mathrm{ii}) \quad n = 1 \longrightarrow L_1 = \frac{N^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!\{M(\alpha)+N(\alpha)\}}. \qquad \cdots\cdots(3.\ 6)$$

〔注意〕 (2. 1) より $n \geqq 2$ の場合は考える必要はないだろう.

〔証明〕

(i) (2. 1) から

$$\begin{cases} M(x) = P(x) \\ N(x) = -P(x) + (x-\alpha)Q(x) \end{cases}$$

$$\therefore \quad P^{(k)}(\alpha) = M^{(k)}(\alpha).$$

一方，

$$M(x) + N(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

$$\therefore \quad Q(\alpha) = M'(\alpha) + N'(\alpha)$$

$$kQ^{(k-1)}(\alpha) = M^{(k)}(\alpha) + N^{(k)}(\alpha).$$

したがって，(3. 2) より

$$L_1 = \frac{N^{(k)}(\alpha)}{k!\{M'(\alpha)+N'(\alpha)\}}.$$

さらに (3. 3) を用いれば

$$L_2=\frac{N^{(k)}(\alpha)}{k!\{M'(\alpha)\}^k}.$$

(ii)　(2. 1) から

$$\begin{cases} M(x) = \dfrac{P(x)}{(x-\alpha)} \\ N(x) = -\dfrac{P(x)}{(x-\alpha)}+Q(x) \end{cases}$$

$$\therefore \quad P^{(k)}(\alpha) = kM^{(k-1)}(\alpha).$$

一方,

$$M(x)+N(x) = Q(x)$$

$$kQ^{(k-1)}(\alpha) = k\{M^{(k-1)}(\alpha)+N^{(k-1)}(\alpha)\}.$$

したがって, (3. 2) より

$$L_1=\frac{N^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!\{M(\alpha)+N(\alpha)\}}.$$

（証了）

結果 6.

(i)　$P'(\alpha)\neq 0 \longrightarrow A(x-\alpha)^{k-1}M(x)\sim N(x).$　……(3. 7)

(ii)　$P'(\alpha) = 0,\ P''(\alpha)\neq 0 \longrightarrow A(x-\alpha)^{k-2}M(x)\sim N(x).$　……(3. 8)

〔証明〕

$$L_3=\lim_{x\to\alpha}\frac{N(x)}{R(x)\cdot M(x)}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{-P(x)+(x-\alpha)Q(x)}{R(x)\cdot P(x)},$$

位数 k だから,

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)^{k-1}g_1(x)}{R(x)\cdot g_2(x)}.$$

(i)

$$L_3=\frac{g_1(\alpha)}{g_2(\alpha)}\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)^{k-1}}{R(x)}.$$

よって, $R(x)=A(x-\alpha)^{k-1}$ とすれば,

$$L_3=\frac{g_1(\alpha)}{Ag_2(\alpha)}$$

$$= \frac{-P^{(k)}(\alpha)+kQ^{(k-1)}(\alpha)}{Ak!\,P'(\alpha)} \qquad (\text{有限確定} \neq 0).$$

(ii)

$$L_3 = \frac{g_1(\alpha)}{g_3(\alpha)} \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)^{k-2}}{R(x)} \quad .$$

よって，$R(x)=A(x-\alpha)^{k-2}$ とすれば，

$$L_3 = \frac{g_1(\alpha)}{Ag_3(\alpha)}. \qquad \text{(証了)}$$

4. 同位の位数のときの収束の速さ.

反復の位数を k とすると，$|L_1|$ の値が小さいほど収束は速くなる.

(3. 2)，(3. 4)，(3. 6) より

$$|L_1| = \left| \frac{-P^{(k)}(\alpha)+kQ^{(k-1)}(\alpha)}{k!Q(\alpha)} \right|. \qquad \cdots\cdots(4.\ 1)$$

特に，$n=0$ のとき

$$|L_1| = \left| \frac{N^{(k)}(\alpha)}{k!\{M'(\alpha)+N'(\alpha)\}} \right|, \qquad \cdots\cdots(4.\ 2)$$

$n=1$ のとき

$$|L_1| = \frac{N^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!\{M(\alpha)+N(\alpha)\}} \qquad \cdots\cdots(4.\ 3)$$

となる. したがって (3. 2) より次の結果がえられる.

結果 7. 反復の位数が同位のときは，$|L_1|$ が小さい程 $\{x_i\}\to\alpha$ の収束は速くなる.

5. 具体的な反復式と既知の反復式との関係

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) \neq Q(\alpha) \end{cases}$$

とすると1位の反復式となるが具体的には方程式を $F(x)=0$，所要の根を α として

$$\begin{cases} P(x) = F(x)\cdot G(x) + H(x) \qquad (H(\alpha)=0) \\ P'(\alpha) = F'(\alpha)\cdot G(\alpha) + H'(\alpha) \neq Q(\alpha) \end{cases}$$

とすればよい. このとき反復式は

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)\cdot G(x_i) + H(x_i)}{Q(x_i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる.

例えば,

$$\begin{cases} Q(x) = F(x) - F(b) \\ G(x) = b \\ H(x) = (x-2b)F(x) \end{cases}$$

とすれば, Regula-Falsi 法となる.

また,

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) = Q(\alpha) \neq 0 \\ P''(\alpha) \neq 2Q'(\alpha) \end{cases}$$

とすると2位の反復式となるが, 具体的には方程式を $F(x)=0$, 所要の根を α として,

$$\begin{cases} P(x) = F(x)\cdot G(x) + H(x) & (H(\alpha)=0) \\ Q(x) = F'(x)\cdot G(x) + H'(x) + I(x) & (I(\alpha)=0) \\ F''(\alpha)\cdot G(\alpha) + H''(\alpha) + 2I'(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

とすればよい.

このとき反復式は

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)\cdot G(x_i) + H(x_i)}{F'(x_i)\cdot G(x_i) + H'(x_i) + I(x_i)} \qquad (i=0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

となる.

例えば $G(x) = 1$, $H(x) = I(x) = 0$ とすれば, Newton-Raphson 法になる.

文　献

〔1〕 篠崎喜賢, 代数方程式の数値解法について, 下関商経論集, **13** (1970), 109—127.
〔2〕 篠崎喜賢, 代数方程式の数値解法について (つづき), 下関商経論集, **14** (1970), 161—167.
〔3〕 篠崎喜賢, 代数方程式の逐次代入近似について, 下関商経論集, **14** (1971), 77—94.