九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

負の正則断面曲率をもつあるケーラー空間の位相について

塚本, 陽太郎
九州大学教養部数学教室

https://doi.org/10.15017/1448890

出版情報：九州大学教養部数学雑誌. 1 (1), pp.3-6, 1964-01. 九州大学教養部数学教室
バージョン：
権利関係：

負の正則断面曲率をもつある ケーラー空間の位相について

塚　本　陽　太　郎

E. Cartan により負曲率リーマン空間についての次ぎの定理が知られております．

定理A．　完備，単連結のリーマン空間でその各点におけるすべての2次元接平面方向の断面曲率が負又は0であるとき，空間はそれと同じ次元のユークリッド空間に同相である．

更にケーラー空間では次ぎの定理が知られております．

定理B．　ケーラー空間で各点におけるすべての2次元正則接平面方向の断面曲率即ち正則断面曲率 hol K が一定数 $L\ (<0)$ であるとき，空間の一般の断面曲率 K は不等式

$$L \leqq K \leqq \frac{1}{4} L$$

をみたす．

定理AとBより次ぎのことがわかります．

定理C　　完備，単連結のケーラー空間で正則断面曲率が一定の負数であるとき空間は同じ次元のユークリッド空間に同相である．

いま，定理Cにおいて「正則断面曲率が一定の負数である」という条件を「正則断面曲率がある負の数の範囲にある」という弱い条件でおきかえることにより同じ結論が得られるのではないかという問題が生じてきます．ここではこの問題に関するささやかな結果をのべます．

正則断面曲率 hol K が下に有界なときには適当にケーラー計量をかえてやることにより $-1 \leqq$ hol K と仮定して差支えありません．

（４）

定理１

完備単連結なケーラー空間で各点におけるすべての正則断面曲率 hol K が不等式 $-1 \leqq \mathrm{hol}\,K \leqq -\frac{5}{7}$ をみたすとき，空間は同じ次元のユークリッド空間に同相である．

証明　M をケーラー空間，I は M の複素構造を定義する type (1, 1) のテンソルとします．いま，２つの接ベクトル X, Y に関する断面曲率を $\rho(X, Y)$ で表わすことにします．そのとき次ぎの補題を証明します．

補題　M はケーラー空間で，すべての接ベクトルに対して不等式

$$-1 \leqq \rho(X, IX) \leqq -\lambda$$

をみたすとする．そのとき任意の接ベクトル X, Y で張られた２次元平面方向の断面曲率 $\rho(X, Y)$ は次ぎの不等式をみたす．

$$\frac{5\lambda-13}{8} \leqq \rho(X, Y) \leqq \frac{5-7\lambda}{8}$$

証明　いま，X, Y は M の一点の接空間における互いに垂直な単位ベクトルとし，JX と Y の内積 $\langle JX, Y\rangle = \sin\theta$ とおきます．そのとき任意の実数 a, b に対して

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2)^2\rho(aX+bY,\ I(aX+bY))\\&= a^4\rho(X, IX)+b^4\rho(Y, IY)+2a^2b^2(\rho(X,Y)+3\rho(IX,Y)\cos^2\theta)\\&\quad + u a^3 b + v a b^3\end{aligned}$$

を得られます．いま，b を $-b$ におきかえ，同様の等式を得られます．このようにして得られた２つの等式の辺々を相加えることにより次ぎの式が得られます．

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2)^2[\rho(aX+bY,\ I(aX+bY))+\rho(aX-bY,\ I(aX-bY)]\\&=2a^4\rho(X, IX)+2b^4\rho(Y, IY)+4a^2b^2(\rho(X,Y)+3\rho\cos^2\theta)\end{aligned}$$

補題の仮定により次ぎの不等式が得られます．

$$-(a^2+b^2)^2 \leqq a^4\rho(X,IX)+b^4(Y,IY)+2a^2b^2(\rho(X,Y)+3\rho(IX,Y)\cos^2\theta) \leqq -\lambda(a^2+b^2)^2$$

上式において $a=b=1$ とおくと

$$-4-\rho(X,IX)-\rho(Y,IY) \leqq 2(\rho(X,Y)+3\rho(IX,Y)\cos^2\theta) \leqq -4\lambda-\rho(X,IX)-\rho(Y,IY)$$

これより次ぎの不等式が得られます.

$$-2+\lambda \leqq \rho(X,Y)+3\rho(IX,Y)\cos^2\theta \leqq -2\lambda+1 \qquad (1)$$

上と全く同じ方法で次ぎの等式が得られます.

$$(a^2+2ab\sin\theta+b^2)\,\rho(aX+bIY,\ I(aX+bIY))$$
$$=a^4\rho(X,IX)+b^4\rho(Y,IY)+2a^2b^2(3\rho(X,Y)+\rho(IX,Y)\cos^2\theta)$$
$$+u'a^3b+v'ab^3$$

この不等式に b を $-b$ におきかえて得られる等式の辺々相加えて次ぎの不等式が得られます.

$$-[(a^2+b^2)^2+4a^2b^2\sin^2\theta]$$
$$\leqq a^4\rho(X,IX)+b^4\rho(Y,IY)+2a^2b^2(3\rho(X,Y)+\rho(IX,Y)\sin^2\theta)$$
$$\leqq -\lambda[(a^2+b^2)^2+4a^2b^2\sin^2\theta]$$

$a=b=1$ とおくと次式が得られます.

$$-2+\lambda-2\sin^2\theta \leqq 3\rho(X,Y)+\rho(IX,Y)\cos^2\theta \leqq 1-2\lambda-2\lambda\sin\theta \qquad (2)$$

(1) と (2) より次ぎの不等式が得られます.

$$\frac{-7+5\lambda-6\sin^2\theta}{8} \leqq \rho(X,Y) \leqq \frac{5-7\lambda-6\lambda\sin^2\theta}{8}$$

これより求める不等式が得られます.

補題の証明終

この補題と定理Aより定理1が得られます．

証明終

小林[1]は最近次ぎのような定理を証明しました．

定理D　負または0の曲率をもち，且つ負定値のRicciテンソルをもつ斉次リーマン空間は単連結である．

上に証明しました補題と定理A及び定理Dより次ぎの定理が得られます．

定理2．斉次ケーラー空間において各点におけるすべての正則断面曲率 hol K が不等式 $-1 \leqq \mathrm{hol}\, K \leqq \frac{5}{7}$ をみたすとき空間は同じ次元のユークリッド空間に同相である．

この定理は小林[1]における問題(b)「負の正則断面曲率をもつ斉次ケーラー空間は単連結であるか」に部分的に肯定的解答を与えております．

参　考　文　献

[1] S. Kobayashi, *Homogeneous Riemannian manifolds of negative curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 338-339.