

## 線形波動方程式の超離散極限と幾何音響学の高周波近似に関する考察

儀保, 伸吾  
九州大学大学院芸術工学府

<https://doi.org/10.15017/1448859>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 25A0-S2 (14), pp.85-90, 2014-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2  
「非線形波動研究の拡がり」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

*The breadth and depth of nonlinear wave science*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 14 (pp. 85 - 90)

# 線形波動方程式の超離散極限と 幾何音響学の高周波近似に関する考察

儀保 伸吾 (GIBO Shingo)

(Received 15 January 2014; accepted 25 February 2014)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2014

# 線形波動方程式の超離散極限と幾何音響学の高周波近似に関する考察

九州大学大学院芸術工学府 儀保伸吾 (GIBO Shingo)

**概要** 幾何音響学では音波を高周波近似で扱うため、音波を粒子のように扱う(音線). 一方、音波の伝播を記述する線形波動方程式を超離散化すると、超離散戸田格子方程式になり、その解は粒子的に振る舞う. 本研究では、高周波近似と超離散極限との類似性から両者の対応を考察する.

## 1 はじめに

本研究では、音波を記述する線形波動方程式の超離散化と音の粒子モデルである幾何音響学とを比較、考察する.

方程式を超離散化すると、波動性と粒子性を再現する解析モデルになる可能性がある. よく知られている例として、交通流を記述する Burgers 方程式の超離散化がある. Burgers 方程式  $\frac{\partial v}{\partial t} = 2v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  は渋滞の波動的振る舞いを衝撃波として記述するが、その超離散化は車 1 台 1 台の動き(粒子性)と渋滞(波動性)を同時に解析できることが知られている [1]. したがって、音波を記述する線形波動方程式を超離散化すると、音の波動性と粒子性を再現できる解析モデルになることが期待できる.

一方、音の粒子モデルとして幾何音響学という方法が知られている. 幾何音響学は高周波近似 ( $e^{i\frac{x}{\lambda}} : \lambda \rightarrow +0$ ) によって成り立つ. この近似は超離散化の超離散極限 ( $e^{\frac{ix}{\varepsilon}} : \varepsilon \rightarrow +0$ ) と似た近似の取り方であり、両者とも粒子性が現れるモデルであることが類似している. 超離散化と幾何音響学との類似性に注目し、比較、考察することで、新しい音場解析モデルを構築する手掛かりになる可能性がある.

## 2 幾何音響学

音の粒子モデルとしてよく知られている幾何音響学について説明する [2].

### 2.1 アイコナル方程式・輸送方程式の導出

音波の振る舞いは線形波動方程式

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

で記述できる. ここで、 $U$  は音圧、 $c$  は音の伝搬速度である.

式 (2.1) の解を正弦波  $U(x, t) = u(x)e^{i\omega t}$  とすると、Helmholtz 方程式

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{\lambda_0^2} u = 0 \quad (2.2)$$

を得る. ここで、 $\omega$  は角周波数を表し、 $\lambda_0 = c/\omega$  とした.

式 (2.2) の解を振幅関数  $A(x)$ 、アイコナル関数(位相関数) $S(x)$  を用いて

$$u(x) = A(x)e^{i\frac{S(x)}{\lambda}} \quad (2.3)$$

とすると, 式 (2.2) は

$$-u \left[ \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right] + 2i\lambda u \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2S}{dx^2} + \frac{d \log A}{dx} \frac{dS}{dx} \right] + \lambda^2 u \left[ \left( \frac{d \log A}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 \log A}{dx^2} \right] = 0 \quad (2.4)$$

となる. 式 (2.4) を  $\lambda$  のオーダーでまとめると,

$$O(1): \quad \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 = n^2, \quad n = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (2.5)$$

$$O(\lambda): \quad \frac{d \log A}{dx} \frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d^2S}{dx^2} \quad (2.6)$$

となる. ここで,  $n$  は屈折率に相当するパラメータである. 式 (2.5) はアイコナール方程式, 式 (2.6) は輸送方程式と呼ばれている. これらが幾何音響学の基礎方程式である.

## 2.2 アイコナール方程式

アイコナール方程式 (2.5) は解析力学の Hamilton-Jacobi 方程式と等価であり, 音の軌道 (音線) を粒子的に記述する. したがって, アイコナール方程式 (2.5) を解くことによって, 音を粒子的に扱うことができる.

また, 平面波  $u(x) = Ae^{i\frac{x}{\lambda}}$  を仮定すると, アイコナール方程式 (2.5) は分散関係式  $\omega^2 = \frac{c^2}{\lambda^2}$  になることが知られている.

## 2.3 輸送方程式

輸送方程式 (2.6) は振幅の空間依存性を記述する. 振幅の空間依存性は, 粒子には現れない, 波動的な特徴である. よって, 輸送方程式 (2.6) は波動性を表す方程式と考えることができる.

波長  $\lambda$  が十分小さい (高周波近似,  $\lambda \rightarrow +0$ ) のとき, 輸送方程式 (2.6) は無視でき, アイコナール方程式 (2.5) のみが有意に効くので, 音を粒子とみなして解析できる. しかし, 近似の条件をゆるめて  $O(\lambda)$  の項までとると, 輸送方程式 (2.6) の影響もでてくるので, 音の波動性が現れる.

## 3 線形波動方程式の超離散化

音波の振る舞いを記述する線形波動方程式

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

の超離散化について説明する.

線形波動方程式 (3.1) に変数変換

$$U(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f(x, t) \quad (3.2)$$

を施すと, 双線形化され,

$$D_x^2 f \cdot f - \frac{1}{c^2} D_t^2 f \cdot f = 0 \quad (3.3)$$

となる. ここで,  $D_x^2, D_t^2$  は双線形微分演算子と呼ばれ,

$$D_t^2 a \cdot b = \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} b - 2 \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial t} + a \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

で定義される. 式 (3.1) は変数変換  $U(x, t) = \log f(x, t)$  や  $U(x, t) = \frac{f(x, t)}{g(x, t)}$  としても双線形化することができる. ここでは, 後に述べる戸田格子方程式との対応を考えて双線形化のための変数変換を式 (3.2) とした.

式 (3.3) を空間差分間隔を  $\Delta x$ , 時間差分間隔を  $\Delta t$  として差分化すると,

$$f_n^{t+1} f_n^{t-1} = (1 - \delta^2)(f_n^t)^2 + \delta^2 f_{n+1}^t f_{n-1}^t \quad (3.5)$$

となる. ここで,  $\delta$  は音の伝搬速度  $c$  と数値的な速度  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  との比  $\delta = \frac{c}{(\Delta x/\Delta t)}$  で定義されるパラメータである.

式 (3.5) について, 式 (3.2) の差分化に対応する以下の変数変換を施す.

$$U_n^t = \log f_{n+1}^t - 2 \log f_n^t + \log f_{n-1}^t \quad (3.6)$$

すると, 式 (3.5) は以下ようになる.

$$U_n^{t+1} - 2U_n^t + U_n^{t-1} = \log \left[ 1 + \delta^2 \left( e^{U_{n+1}^t} - 1 \right) \right] - 2 \log \left[ 1 + \delta^2 \left( e^{U_n^t} - 1 \right) \right] + \log \left[ 1 + \delta^2 \left( e^{U_{n-1}^t} - 1 \right) \right] \quad (3.7)$$

式 (3.7) は先行研究 [3] で「差分戸田格子方程式」としてよく知られている方程式と同一である.  $\delta = 1$  のとき, すなわち音の伝搬速度  $c$  と数値的な速度  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  が等しいとき, 式 (3.7) の右辺は線形になる. したがって, 差分戸田格子方程式 (3.7) は, 特別な場合 ( $\delta = 1$ ) に線形波動方程式 (3.1) の差分化として妥当である.

式 (3.7) の超離散化を考える. 式 (3.7) に超離散化のための変数変換  $U_n^t = u_n^t/\varepsilon$ ,  $\delta^2 = e^{-L/\varepsilon}$  を施すと,

$$u_n^{t+1} - 2u_n^t + u_n^{t-1} = \varepsilon \log \left[ 1 + e^{-L/\varepsilon} \left( e^{u_{n+1}^t/\varepsilon} - 1 \right) \right] - 2\varepsilon \log \left[ 1 + e^{-L/\varepsilon} \left( e^{u_n^t/\varepsilon} - 1 \right) \right] + \varepsilon \log \left[ 1 + e^{-L/\varepsilon} \left( e^{u_{n-1}^t/\varepsilon} - 1 \right) \right] \quad (3.8)$$

となる. 式 (3.8) で超離散極限 ( $\varepsilon \rightarrow +0$ ) をとると,

$$u_n^{t+1} - 2u_n^t + u_n^{t-1} = \max[0, u_{n+1}^t - L] - 2 \max[0, u_n^t - L] + \max[0, u_{n-1}^t - L] \quad (3.9)$$

となる. 式 (3.9) は先行研究 [4] で「超離散戸田格子方程式」としてよく知られている方程式と同一である.  $L = 0$  のとき, 式 (3.9) の右辺は線形になる. したがって, 超離散戸田格子方程式 (3.9) は, 特別な場合 ( $L = 0$ ) に線形波動方程式 (3.1) の超離散化として妥当である.

## 4 幾何音響学の高周波近似による超離散の考察

線形波動方程式 (3.1) の差分化である差分戸田格子方程式

$$U_n^{t+1} - 2U_n^t + U_n^{t-1} = \log \left[ 1 + \delta^2 \left( e^{U_{n+1}^t} - 1 \right) \right] - 2 \log \left[ 1 + \delta^2 \left( e^{U_n^t} - 1 \right) \right] + \log \left[ 1 + \delta^2 \left( e^{U_{n-1}^t} - 1 \right) \right] \quad (4.1)$$

について幾何音響学のアイコンナル方程式, 輸送方程式の対応物を求め, 波動性と粒子性について考察する.

## 4.1 広田の方法

広田の方法によって, 差分戸田格子方程式 (4.1) を扱いやすい形に変形する.

差分戸田格子方程式 (4.1) に変数変換  $U_n^t = \log f_{n+1}^t - 2\log f_n^t + \log f_{n-1}^t$  を施すと, 差分双線形戸田格子方程式

$$f_n^{t+1} f_n^{t-1} = (1 - \delta^2)(f_n^t)^2 + \delta^2 f_{n+1}^t f_{n-1}^t \quad (4.2)$$

となる.  $f_n^t$  を以下のようにパラメータ  $\alpha$  で摂動展開する.

$$f_n^t = 1 + \alpha f_n^{(1)t} + \alpha^2 f_n^{(2)t} + \alpha^3 f_n^{(3)t} + \dots \quad (4.3)$$

式 (4.3) を式 (4.2) に代入して,  $\alpha$  のオーダーでまとめると,

$$O(\alpha): f_{n+1}^{(1)t} - 2f_n^{(1)t} + f_{n-1}^{(1)t} - \frac{1}{\delta^2}(f_n^{(1)t+1} - 2f_n^{(1)t} + f_n^{(1)t-1}) = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} O(\alpha^2): f_{n+1}^{(2)t} - 2f_n^{(2)t} + f_{n-1}^{(2)t} - \frac{1}{\delta^2}(f_n^{(2)t+1} - 2f_n^{(2)t} + f_n^{(2)t-1}) \\ = f_{n+1}^{(1)t} f_{n-1}^{(1)t} - (f_n^{(1)t})^2 - \frac{1}{\delta^2}(f_n^{(1)t+1} f_n^{(1)t-1} - (f_n^{(1)t})^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

となる.

$O(\alpha)$  のオーダーの式は位相を記述し,  $O(\alpha^2)$  以上のオーダーの式はソリトンの衝突による非線形相互作用を記述することが知られている. 幾何音響学では, 位相の振る舞いに興味があるので,  $O(\alpha)$  の式 (4.4) からアイコナル方程式, 輸送方程式の対応物を求める.

## 4.2 アイコナル方程式と輸送方程式の対応物の導出

式 (4.4) はソリトン解を持つことを考慮し, 時間依存を指数関数  $f_n^{(1)t} = u_n e^{-\omega t}$  で仮定すると,

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - \frac{4}{\delta^2} \sinh^2 \frac{\omega}{2} \cdot u_n = 0 \quad (4.6)$$

となる. 式 (4.6) は2章の Helmholtz 方程式 (2.2) に対応する.

式 (4.6) の解を平面波  $u_n = e^{\frac{n}{\lambda} + \theta_n}$  として, 式 (4.6) に代入すると,

$$e^{\theta_{n+1} - \theta_n} e^{\frac{1}{\lambda}} - 2 + e^{\theta_{n-1} - \theta_n} e^{-\frac{1}{\lambda}} - \frac{4}{\delta^2} \sinh^2 \frac{\omega}{2} = 0 \quad (4.7)$$

となる.  $\theta_n$  の変化がゆっくり ( $\theta_{n+1} - \theta_n \ll 1$ ) と仮定すると, Taylor 展開  $e^{\theta_{n+1} - \theta_n} \approx 1 + (\theta_{n+1} - \theta_n)$  より,

$$4 \left[ \sinh^2 \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{\delta^2} \sinh^2 \frac{\omega}{2} \right] + \left[ (\theta_{n+1} - \theta_n) e^{\frac{1}{\lambda}} - (\theta_n - \theta_{n-1}) e^{-\frac{1}{\lambda}} \right] = 0 \quad (4.8)$$

となる.

したがって, 以下の2式を満たせば, 式 (4.8) は満たされる.

$$\sinh^2 \frac{\omega}{2} = \delta^2 \sinh^2 \frac{1}{2\lambda} \quad (4.9)$$

$$\theta_{n+1} - \theta_n = e^{-\frac{2}{\lambda}} (\theta_n - \theta_{n-1}) \quad (4.10)$$

式 (4.9), (4.10) がそれぞれアイコナル方程式 (2.5), 輸送方程式 (2.6) の対応物であることが考えられる. その理由を以下に説明する.

### 4.3 式 (4.9) について

式 (4.9) は分散関係式である。分散関係式は平面波のアイコナル方程式 (2.5) と対応する、すなわち粒子性を記述する方程式であることが考えられる。

### 4.4 式 (4.10) について

式 (4.10) は  $\theta_n$  の空間依存性を記述する関係式である。 $\theta_n$  は初期位相の関数であるが、以下のようになると、振幅を表す関数でもあることが分かる。

$$u_n = e^{\frac{n}{\lambda} + \theta_n} = e^{\theta_n} e^{\frac{n}{\lambda}} = A_n e^{\frac{n}{\lambda}} \quad (4.11)$$

したがって、式 (4.10) は振幅の空間依存性を記述することが分かる。一方、幾何音響学で振幅の空間依存性を記述する方程式は輸送方程式 (2.6) である。よって、式 (4.10) は幾何音響学の輸送方程式 (2.6) に対応する、すなわち波動性を記述する方程式であることが考えられる。

超離散極限や高周波近似に対応する極限  $\lambda \rightarrow +0$  をとると、式 (4.10) の右辺は 0 になるので、 $\theta_n$  は定数になる。しかし、極限  $\lambda \rightarrow +0$  をとらず、 $\lambda$  が有限な場合を考えると、 $\theta_n$  は以下の通り、空間  $n$  に依存した解を持つ。

$$\theta_n = \theta_0 + \frac{1 - e^{-\frac{2n}{\lambda}}}{1 - e^{-\frac{2}{\lambda}}} (\theta_1 - \theta_0) \quad (4.12)$$

$\lambda$  を有限にすることによる振幅の空間依存性が、超離散化による波動性と粒子性に影響していることが考えられる。

### 4.5 解の概形による波動性と粒子性の考察

超離散化による波動性と粒子性について、解の概形から考察する。

差分戸田格子方程式 (4.1) に超離散化のための変数変換  $u_n^t = U_n^t / \varepsilon$ ,  $\delta^2 = e^{-L/\varepsilon}$  を施すと、

$$\begin{aligned} u_n^{t+1} - 2u_n^t + u_n^{t-1} &= \varepsilon \log \left[ 1 + e^{-L/\varepsilon} \left( e^{u_{n+1}^t/\varepsilon} - 1 \right) \right] \\ &\quad - 2\varepsilon \log \left[ 1 + e^{-L/\varepsilon} \left( e^{u_n^t/\varepsilon} - 1 \right) \right] + \varepsilon \log \left[ 1 + e^{-L/\varepsilon} \left( e^{u_{n-1}^t/\varepsilon} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

となる。式 (4.13) の 1 ソリトン解と分散関係式は、

$$u_n^t = \varepsilon \log \left[ 1 + \sinh^2 \frac{K}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2\varepsilon} (Kn - \Omega t + \Theta) \right] \quad (4.14)$$

$$\sinh^2 \frac{\Omega}{2\varepsilon} = e^{-L/\varepsilon} \sinh^2 \frac{K}{2\varepsilon} \quad (4.15)$$

と書ける。ここで、超離散極限  $\varepsilon \rightarrow +0$  をとると、式 (4.13) は超離散化され、解 (4.14) は粒子的な振る舞いをするが、 $\varepsilon$  を有限にした場合の解の概形を調べる。結果を図 1, 2 に示す。

図 1 より、 $\varepsilon = 0.01$  のとき、 $\varepsilon$  は十分小さいので、超離散化した場合と解の概形はほぼ同じで、粒子的な振る舞いをする。図 2 より、 $\varepsilon$  を大きくとり、 $\varepsilon = 1$  とすると、解の概形はなめらかになり、従属変数は整数値からはずれた値をとり、波動性が強くなったように見える。

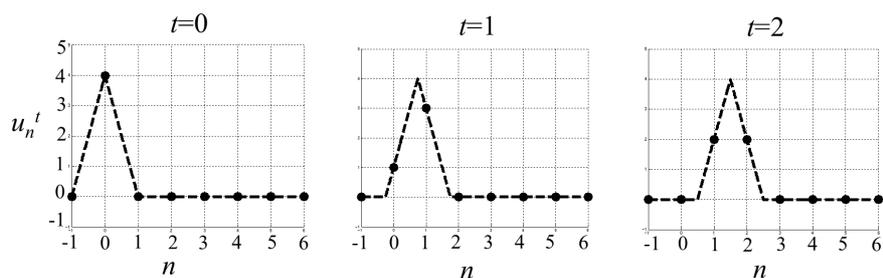


図 1:  $\varepsilon = 0.01$  としたときの式 (4.14), (4.15) による解の概形. 黒丸は差分空間上を実際にとる値, 破線はその間を式 (4.14) より補間した値である.

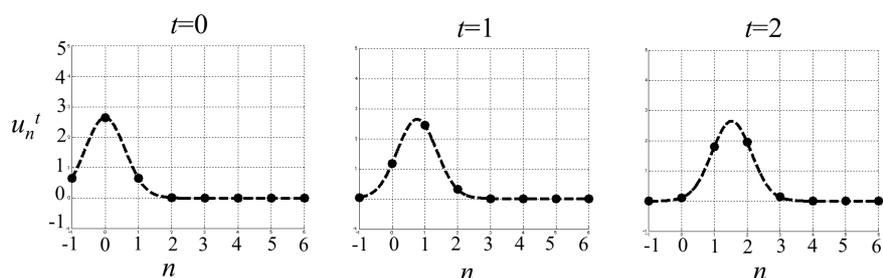


図 2:  $\varepsilon = 1$  としたときの式 (4.14), (4.15) による解の概形. 黒丸は差分空間上を実際にとる値, 破線はその間を式 (4.14) より補間した値である.

## 5 まとめ

本研究では, 線形波動方程式の超離散化による波動性と粒子性について, 音の粒子モデルである幾何音響学から考察した. その結果, 超離散化による粒子性は輸送方程式が影響している可能性があることが示唆された.

今後の課題として, 周期解 (テータ関数解) から考察することを考えている. 本研究では, 差分戸田格子方程式 (4.1) のソリトン解を用いて幾何音響学との対応を考察したが, 幾何音響学の高周波近似を考える場合は周期解を用いる方がより見通しが良くなる可能性がある. 差分戸田格子方程式は, テータ関数で書ける周期解を持ち, その超離散化も知られている [5]. 先行研究 [5] の方法を参考に超離散と幾何音響学の高周波近似との関係を考察し, 音の波動性と粒子性を再現する解析モデルの構築の手掛かりとしたいと考えている.

## 参考文献

- [1] K. Nishinari and D. Takahashi, "Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **31** (1998), 5439-5450.
- [2] ゾンマーフェルト著, 瀬谷正男, 波岡武共訳, 理論物理学講座 4 光学, 講談社, 1969.
- [3] R. Hirota, "Nonlinear Partial Difference Equations. II. Discrete-Time Toda Equation", *Journal of the Physical Society of Japan*, **43** (1977), 2074-2078.
- [4] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii, "Toda-type cellular automaton and its  $N$ -soliton solution", *Physics Letters A*, **225** (1997), 287-295.
- [5] A. Nobe, "Periodic multiwave solutions to the Toda-type cellular automaton", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **38** (2005), L715-L723.