# 符号付き超離散第六パンルヴェ方程式

竹村, 剛一
中央大学理工学部

筒井, 栄光
中央大学理工学部

https://doi.org/10.15017/1448858

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 25AO-S2 (13), pp.79-84, 2014-03. 九州大学応用力学研究所

**応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2**

**「非線形波動研究の拡がり」**（研究代表者　増田　哲）

**Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2**

***The breadth and depth of nonlinear wave science***

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

**Article No. 13** (pp. 79 - 84)

# 符号付き超離散第六パンルヴェ方程式

**竹村　剛一（TAKEMURA Kouichi），筒井　栄光（TSUTSUI Terumitsu）**

（Received 16 January 2014; accepted 28 February 2014）

**Research Institute for Applied Mechanics**
**Kyushu University**
**March, 2014**

# 符号付き超離散第六パンルヴェ方程式

中央大学理工学部数学科　竹村剛一　(TAKEMURA Kouichi)
筒井栄光　(TSUTSUI Terumitsu)

**概　要**　$q$-差分パンルヴェ第六方程式 ($q$-PVI) の符号付き超離散化を導出した。また、$q$-PVI にはリッカチ解という特殊解があるが、これの超離散版も符号付き超離散 PVI の解となっていることがわかった。パラメーターを固定したときの解の具体形についても論ずる。

## 1　$q$-パンルヴェ第六方程式

$q$-パンルヴェ方程式はパンルヴェ方程式の $q$-差分版である。$q$-差分パンルヴェ第六方程式 ($q$-PVI) は条件 $b_1b_2a_3a_4 = qa_1a_2b_3b_4$ のもとで

$$\frac{z(t)z(qt)}{b_3b_4} = \frac{(y(t)-ta_1)(y(t)-ta_2)}{(y(t)-a_3)(y(t)-a_4)}, \frac{y(t)y(qt)}{a_3a_4} = \frac{(z(qt)-tb_1)(z(qt)-tb_2)}{(z(qt)-b_3)(z(qt)-b_4)},$$

と書かれるものであり、神保と坂井により 1990 年代中頃に発見された [2]。$q \to 1$ の極限で通常のパンルヴェVI を復元することが知られている。本稿では、$q$-PVI を符号付きで超離散化を行う。$q$-PII においては儀島・薩摩らにより符号付きで超離散化されており [1]、それと同様の手法をとる。

## 2　超離散化

$q$-差分方程式では、時間変数は離散的 $(\dots, t_0, qt_0, q^2t_0, \dots)$ であり空間変数は一般に実数値をとる。超離散化においては時間変数も空間変数も離散的（とくに整数値）にするのであるが、実現法としては正の変数 $x$ に対し $x = \exp(X/\varepsilon)$ とおき $\varepsilon \to +0$ とする方法がある。超離散化により、もとの演算での足し算 $x+y=z$ は max 演算 $\max(X,Y) = Z$ に対応し (なぜなら $\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log(\exp(X/\varepsilon)+\exp(Y/\varepsilon)) = \max(X,Y)$)、もとの演算での掛け算 $(xy=z)$・割り算は足し算 $(X+Y=Z)$・引き算に対応する。困難な点として負値もとり得る変数 $x$ の超離散化が挙げられるが、これは薩摩らによる符号付き超離散化により回避することができる。また、もとの演算での引き算 $x-y=z$ は、移項で対応 $(\max(X,Z)=Y)$ することができるが、その際には $Z$ の非存在が問題となりうる。

## 3　符号付き超離散化

符号付き超離散化では、以下の符号関数を導入し、通常の変数 $Y_m, Z_m \in \mathbb{R}$ と符号変数 $\mathfrak{y}_m, \mathfrak{z}_m \in \{\pm 1\}$ を用意して極限 $\varepsilon \to +0$ を考える。

$$s(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta = +1, \\ 0, & \zeta = -1, \end{cases} \quad S(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta = +1, \\ -\infty, & \zeta = -1. \end{cases}$$

$q$-差分方程式の従属変数 $y(q^m)$ を $y(q^m) = (s(\mathfrak{y}_m) - s(-\mathfrak{y}_m))e^{Y_m/\varepsilon}$ という形におくが、これは $y(q^m) > 0$ のときには符号変数を $\mathfrak{y}_m = +1$ とおいて $Y_m$ を $y(q^m) = e^{Y_m/\varepsilon}$ で定め、$y(q^m) < 0$ のときには $\mathfrak{y}_m =$

$-1$ とおいて $Y_m$ を $y(q^m) = -e^{Y_m/\varepsilon}$ で定めることに対応する。ここで、$q$-リッカチ方程式 (の一部) $z(qt) = b_4 \dfrac{y(t)-ta_2}{y(t)-a_4}$ を符号付きで超離散化する。$q$-差分方程式の分母を払って

$$t = q^m,\ \ q = e^{Q/\varepsilon},\ \ a_i = e^{A_i/\varepsilon},\ b_i = e^{B_i/\varepsilon},\ (i = 1,2,3,4),$$
$$y(q^m) = (s(\mathfrak{y}_m) - s(-\mathfrak{y}_m))e^{Y_m/\varepsilon},\ \ z(q^m) = (s(\mathfrak{z}_m) - s(-\mathfrak{z}_m))e^{Z_m/\varepsilon}$$

を代入し、移項を行なうと次を得る。

$$\begin{aligned} & s(\mathfrak{z}_{m+1})e^{Z_{m+1}/\varepsilon}s(\mathfrak{y}_m)e^{Y_m/\varepsilon} + s(-\mathfrak{z}_{m+1})e^{Z_{m+1}/\varepsilon}\{s(-\mathfrak{y}_m)e^{Y_m/\varepsilon} + e^{A_4/\varepsilon}\} + e^{B_4/\varepsilon}\{s(-\mathfrak{y}_m)e^{Y_m/\varepsilon} + e^{(mQ+A_2)/\varepsilon}\} \\ & = e^{B_4/\varepsilon}s(\mathfrak{y}_m)e^{Y_m/\varepsilon} + s(\mathfrak{z}_{m+1})e^{Z_{m+1}/\varepsilon}\{s(-\mathfrak{y}_m)e^{Y_m/\varepsilon} + e^{A_4/\varepsilon}\} + s(-\mathfrak{z}_{m+1})e^{Z_{m+1}/\varepsilon}s(\mathfrak{y}_m)e^{Y_m/\varepsilon}. \end{aligned}$$

ここで、$s(\mathfrak{y})s(\mathfrak{z}) + s(-\mathfrak{y})s(-\mathfrak{z}) = s(\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ という等式を用い、 極限 $\varepsilon \to +0$ をとることで符号付き超離散リッカチ方程式 (の一部) を得る。

$$\begin{aligned} & \max[mQ + A_2 + B_4, Z_{m+1} + A_4 + S(-\mathfrak{z}_{m+1}), Y_m + B_4 + S(-\mathfrak{y}_m), Y_m + Z_{m+1} + S(\mathfrak{y}_m\mathfrak{z}_{m+1})] \\ & = \max[Z_{m+1} + A_4 + S(\mathfrak{z}_{m+1}), Y_m + B_4 + S(\mathfrak{y}_m), Y_m + Z_{m+1} + S(-\mathfrak{y}_m\mathfrak{z}_{m+1})]. \end{aligned}$$

## 4 符号付き超離散パンルヴェ第六方程式

符号付き超離散化により、$q$-PVI から次の式が導出される [7, 6]。

$$\begin{aligned} & \max[\max(A_1,A_2) + mQ + Y_m + B_3 + B_4 + S(\mathfrak{y}_m), \max(2Y_m, A_3 + A_4) + Z_m + Z_{m+1} + S(\mathfrak{z}_m\mathfrak{z}_{m+1}), \\ & \quad \max(A_3,A_4) + Y_m + Z_m + Z_{m+1} + S(-\mathfrak{z}_m\mathfrak{z}_{m+1}\mathfrak{y}_m)] \\ & = \max[\max(2mQ + A_1 + A_2, 2Y_m) + B_3 + B_4, \max(A_1,A_2) + mQ + Y_m + B_3 + B_4 + S(-\mathfrak{y}_m), \\ & \quad \max(2Y_m, A_3 + A_4) + Z_m + Z_{m+1} + S(-\mathfrak{z}_m\mathfrak{z}_{m+1}), \max(A_3,A_4) + Y_m + Z_m + Z_{m+1} + S(\mathfrak{z}_m\mathfrak{z}_{m+1}\mathfrak{y}_m)], \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & \max[\max(B_1,B_2) + mQ + Z_{m+1} + A_3 + A_4 + S(\mathfrak{z}_{m+1}), \max(2Z_{m+1}, B_3 + B_4) + Y_m + Y_{m+1} + S(\mathfrak{y}_m\mathfrak{y}_{m+1}), \\ & \quad \max(B_3,B_4) + Y_m + Y_{m+1} + Z_{m+1} + S(-\mathfrak{z}_{m+1}\mathfrak{y}_m\mathfrak{y}_{m+1})] \\ & = \max[\max(2mQ + B_1 + B_2, 2Z_{m+1}) + A_3 + A_4, \max(B_1,B_2) + mQ + Z_{m+1} + A_3 + A_4 + S(-\mathfrak{z}_{m+1}), \\ & \quad \max(2Z_{m+1}, B_3 + B_4) + Y_m + Y_{m+1} + S(-\mathfrak{y}_m\mathfrak{y}_{m+1}), \\ & \quad \max(B_3,B_4) + Y_m + Y_{m+1} + Z_{m+1} + S(\mathfrak{z}_{m+1}\mathfrak{y}_m\mathfrak{y}_{m+1})]. \end{aligned} \tag{2}$$

条件 $B_1 + B_2 + A_3 + A_4 = Q + A_1 + A_2 + B_3 + B_4$ のもとでの式 (1), (2) を**符号付き超離散パンルヴェ第六方程式**と呼ぶ。符号変数なしの超離散パンルヴェ第六方程式 (Ormerod [5] による) は、$\mathfrak{y}_m = \mathfrak{z}_m = -1$ と符号を固定した場合に対応する。

## 5 解の存在と非一意性

超離散パンルヴェ第六方程式において、初期値問題の解は必ず存在することが知られている。

**Proposition 1** *([6])* $n_o \in \mathbb{Z}$ を初期時刻とし、 時刻 $n_o$ における初期条件を $\tilde{\mathfrak{y}}_o, \tilde{\mathfrak{z}}_o \in \{\pm 1\}$, $y_o, z_o \in \mathbb{R}$ で与える。このとき、初期条件をみたす符号付き超離散パンルヴェ第六方程式の解 $(\mathfrak{y}_n, Y_n)$, $(\mathfrak{z}_n, Z_n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ が存在する。

解の一意性は成り立たない場合がある（不定と呼ぶ)。とくに、ある時刻 $m$ に対して $\mathfrak{y}_m = 1$ かつ $Y_m = A_3, A_4, A_1 + mQ, A_2 + mQ$ となる場合は一意性が不成立である。他方、符号変数なしの超離散パンルヴェ第六方程式 ($\mathfrak{y}_m = \mathfrak{z}_m = -1$ と符号を固定した場合）では一意性が成り立つ。

## 6 $q$-PVI のリッカチ解と符号付き超離散リッカチ型方程式

$b_1a_3 = qa_1b_3, b_2a_4 = a_2b_4$ という条件のもと、$q$-リッカチ型方程式

$$z(qt) = b_4\frac{y(t)-ta_2}{y(t)-a_4}, \quad y(qt) = a_3\frac{z(qt)-tb_1}{z(qt)-b_3}, \tag{3}$$

の解 (リッカチ解) は必ず $q$-PVI の解となることが知られている [2]。

また、符号付き超離散化により式 (3) から以下の符号付き超離散リッカチ型方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\max[mQ+A_2+B_4, Z_{m+1}+A_4+S(-\mathfrak{z}_{m+1}), Y_m+B_4+S(-\mathfrak{y}_m), Y_m+Z_{m+1}+S(\mathfrak{y}_m\mathfrak{z}_{m+1})]\\
=&\max[Z_{m+1}+A_4+S(\mathfrak{z}_{m+1}), Y_m+B_4+S(\mathfrak{y}_m), Y_m+Z_{m+1}+S(-\mathfrak{y}_m\mathfrak{z}_{m+1})],\\
&\max[mQ+A_3+B_1, Y_{m+1}+B_3+S(-\mathfrak{y}_{m+1}), Z_{m+1}+A_3+S(-\mathfrak{z}_{m+1}), Y_{m+1}+Z_{m+1}+S(\mathfrak{y}_{m+1}\mathfrak{z}_{m+1})]\\
=&\max[Z_{m+1}+A_3+S(\mathfrak{z}_{m+1}), Y_{m+1}+B_3+S(\mathfrak{y}_{m+1}), Y_{m+1}+Z_{m+1}+S(-\mathfrak{y}_{m+1}\mathfrak{z}_{m+1})].
\end{aligned}$$

**Theorem 2** *([7, 6])* 条件 $B_1+A_3 = Q+A_1+B_3$, $B_2+A_4 = A_2+B_4$ のもと、符号付き超離散リッカチ型方程式の解は、符号付き超離散パンルヴェ第六方程式の解となる。

この定理を示すために、$e^{X_1}-e^{X_3} = e^{X_4}-e^{X_2}$, $e^{W_1}-e^{W_3} = e^{W_4}-e^{W_2} \Longrightarrow e^{X_1+W_1}+e^{X_3+W_3}+e^{X_2+W_4}+e^{X_4+W_2} = e^{X_2+W_2}+e^{X_4+W_4}+e^{X_2+W_3}+e^{X_3+W_1}$ の超離散化にあたる次の補題を用いる。

**Lemma 3** *([7])* $\max(X_1,X_2) = \max(X_3,X_4)$ かつ $\max(W_1,W_2) = \max(W_3,W_4)$ ならば、次が成立する。

$$\max(X_1+W_1, X_3+W_3, X_2+W_4, X_4+W_2) = \max(X_2+W_2, X_4+W_4, X_1+W_3, X_3+W_1).$$

なお、$\mathfrak{y}_m = \mathfrak{z}_m = -1$ の場合には超離散リッカチ型方程式は解をもたない。すなわち、超離散パンルヴェ第六方程式でのリッカチ解は符号変数なしでは見えず、符号変数を導入することで現れる。

## 7 符号付き超離散リッカチ型方程式の解

符号付き超離散リッカチ型方程式の解の具体形について、パラメーター $A_1,\dots,B_4,Q$ が一般のときには場合分けが煩雑で収集がつかない。ここではパラメーターを固定して考える。

$A_1 = 25, A_2 = 46, A_3 = 67, A_4 = 23, B_1 = 59, B_2 = 65, B_3 = 1, B_4 = 42, Q = 100$ とすると、符号付き超離散リッカチ型方程式の条件 $B_1+A_3 = A_1+B_3+Q$, $A_4+B_2 = A_2+B_4$ をみたす。このときの方程式の解を求める。

$c$ が条件 $31 \le c \le 46$ をみたすとき、次の解がある。

$$(\mathfrak{y}_m, Y_m) = \begin{cases} (-1, 85m+c), & m \le 0, \\ (-1, 38m+c), & m \ge 1, \end{cases} \quad (\mathfrak{z}_m, Z_m) = \begin{cases} (+1, 85m+c-66), & m \le 0, \\ (+1, 62m-c+26), & m \ge 1. \end{cases}$$

ここで、$85 = A_3-A_4-B_3+B_4 < Q$, $38 = A_3+B_1-A_2-B_4 < Q$, $62 = Q-38$ が成り立っていることを注意しておく。

他の解も存在するが、その一部を列挙する。

$m_0 < 0$ かつ $-85m_0+23 \le c' \le -85m_0+67$ での解

$$(\mathfrak{y}_m, Y_m) = \begin{cases} (-1, 85m+c'), & m \le m_0, \\ (+1, 67), & m_0 < m \le 0, \\ (-1, 38m+46), & m \ge 1, \end{cases} \quad (\mathfrak{z}_m, Z_m) = \begin{cases} (+1, 85m-66+c'), & m \le m_0, \\ (+1, 42), & m_0 < m \le 1, \\ (+1, 62m-20), & m \ge 2. \end{cases}$$

$m_0 < 0$ かつ $15m_0 + 31 \le c' \le 15m_0 + 46$ での解

$$(\mathfrak{y}_m, Y_m) = \begin{cases} (-1, 85m + c'), & m \le m_0, \\ (-1, 100m + 31), & m_0 < m \le 0, \\ (-1, 38m + 31), & m \ge 1, \end{cases} \quad (\mathfrak{z}_m, Z_m) = \begin{cases} (+1, 85m - 66 + c'), & m \le m_0, \\ (+1, 100m - 35), & m_0 < m \le 0, \\ (+1, 62m - 5), & m \ge 1. \end{cases}$$

$m_0 > 0$ かつ $21 + 38m_0 \le c \le 59 + 38m_0$ での解

$$(\mathfrak{y}_m, Y_m) = \begin{cases} (+1, 85m + 31), & m \le -1, \\ (-1, 29), & 0 \le m < m_0, \\ (+1, 38m + 88 - c), & m \ge m_0, \end{cases} \quad (\mathfrak{z}_m, Z_m) = \begin{cases} (-1, 85m - 35), & m \le -1, \\ (+1, 37), & m = 0, \\ (+1, 100m - 41), & 1 \le m \le m_0, \\ (-1, 62(m-1) + c), & m > m_0. \end{cases}$$

## 8　符号無し超離散パンルヴェ第六方程式の解

符号変数を $\mathfrak{y}_m = \mathfrak{z}_m = -1$ と固定した符号無し超離散パンルヴェ第六方程式は以下のように書ける。

$$Z_m + Z_{m+1} + \max(A_3, Y_m) + \max(A_4, Y_m) = B_3 + B_4 + \max(mQ + A_1, Y_m) + \max(mQ + A_2, Y_m),$$
$$Y_m + Y_{m+1} + \max(B_3, Z_{m+1}) + \max(B_4, Z_{m+1}) = A_3 + A_4 + \max(mQ + B_1, Z_{m+1}) + \max(mQ + B_2, Z_{m+1}).$$

$m$ が十分大きいときの解として、$Y_m = (Q - \alpha)m + \beta$, $Z_m = \alpha m + \gamma$ は以下の条件をみたすときに符号無し超離散パンルヴェ第六方程式の解となる。

$$0 \le \alpha \le Q,\ \alpha + 2(\beta + \gamma) = B_3 + B_4 + A_1 + A_2,\ \alpha(m+1) + \gamma \ge \max(B_3, B_4),$$
$$\alpha m + \min(A_1, A_2) \ge \beta,\ (Q - \alpha)m + \beta \ge \max(A_3, A_4),\ (Q - \alpha)m + \min(B_1, B_2) \ge \alpha + \gamma,$$

ここで条件 $B_3 + B_4 + A_1 + A_2 = Q + A_3 + A_4 + B_1 + B_2$ は使われている。

同様に、$-m$ が十分大きいときの解として、$Y_m = \alpha' m + \beta'$, $Z_m = \alpha' m + \gamma'$ は以下の条件をみたすとき、符号無し超離散パンルヴェ第六方程式の解となる。

$$0 \le \alpha' \le Q,\ \alpha' + 2(\gamma' - \beta') = B_3 + B_4 - A_3 - A_4,\ \alpha'(m+1) + \gamma' \le \min(B_3, B_4),$$
$$\alpha' m + \beta' \le \min(A_3, A_4),\ (Q - \alpha')m + \max(B_1, B_2) \le \alpha' + \gamma',\ (Q - \alpha')m + \max(A_1, A_2) \le \beta',$$

**Conjecture 1** *([6])* 符号無し超離散パンルヴェ第六方程式の解 $Y_m$, $Z_m$ $(m \in \mathbb{Z})$ において、ある定数 $m_0$, $m_0'$ が存在し、以下が成立する。

$$Y_m = \alpha' m + \beta',\ Z_m = \alpha' m + \gamma', \qquad m \le m_0',$$
$$Y_m = (Q - \alpha)m + \beta,\ Z_m = \alpha m + \gamma, \qquad m \ge m_0.$$

ただし、$\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ は $0 \le \alpha \le Q$, $0 \le \alpha' \le Q$, $\alpha + 2(\beta + \gamma) = B_3 + B_4 + A_1 + A_2$, $\alpha' + 2(\gamma' - \beta') = B_3 + B_4 - A_3 - A_4$ をみたす数である。

$A_1 = 32, A_2 = 33, A_3 = 37, A_4 = 22, B_1 = 53, B_2 = 65, B_3 = 8, B_4 = 4$, $Q = 100$ の場合の符号無し超離散パンルヴェ第六方程式を考える。

初期値を $Y_0 = 43, Z_0 = 40$ としたときの解は

$$Y_m = \begin{cases} 95m + 111, & m \le -1, \\ 43, & m = 0, \\ 11m + 111, & m \ge 1, \end{cases} \quad Z_m = \begin{cases} 95m + 40, & m \le 0, \\ 89m - 117, & m \ge 1. \end{cases}$$

初期値を $Y_0=-48, Z_0=40$ としたときの解は

| $m$ | $Y_m$ | $Z_m$ |
|---|---|---|
| $m\le -21$ | $23m+470$ | $23m+435$ |
| $-20,\dots,-16$ | $10,33,26,3,-20$ | $-25,-2,10,-9,-32$ |
| $-15,\dots,-11$ | $-43,-66,-89,-112,-135$ | $-55,-78,-101,-124,-147$ |
| $-10,\dots,-6$ | $-158,-181,-204,-227,-250$ | $-170,-193,-216,-239,-262$ |
| $-5,\dots,-1$ | $-273,-296,-319,-116,107$ | $-285,-308,-331,-251,-28$ |
| $0,\dots,4$ | $-48,213,96,-21,80$ | $40,-22,34,251,367$ |
| $5,\dots,9$ | $197,314,431,548,665$ | $350,333,316,299,282$ |
| $10,\dots,14$ | $782,899,1016,1133,1250$ | $265,248,231,214,197$ |
| $15,\dots,19$ | $1367,1484,1601,1718,1835$ | $180,163,146,129,112$ |
| $20,\dots,24$ | $1952,2069,2186,2303,2420$ | $95,78,61,44,27$ |
| $25,\dots,29$ | $2537,2628,2711,2794,2877$ | $10,2,19,36,53$ |
| $m\ge 30$ | $83m+470$ | $17m-440$ |

また、初期値を $Y_0=43, Z_0=50$ としたときの解は [6] にて求められており、$m\le -8$ のときは $Y_m=85m-81$, $Z_m=85m-147$ であって $m\ge 13$ のときは $Y_m=9m-72$, $Z_m=91m+65$ である。

いずれの場合も予想は正しい。

## 9 超離散パンルヴェ第二方程式

ここで、本研究のもとになった超離散パンルヴェ第二方程式について触れておく。

超離散パンルヴェ第二方程式は、符号付きの方程式は礒島・薩摩らにより得られており [1]、本稿での符号付き超離散化はこれをもとにしている。符号なしの場合の超離散パンルヴェ第二方程式は以下の方程式である。

$$F_n+F_{n-1}=\max(0,G_{n-1}),\ G_n+G_{n-1}=A+2nQ-\max(0,nQ-F_n).$$

２パラメーター解は村田 [4] により得られている。次の命題はその一部を書き換えたものである。

**Proposition 4** *(c.f.[4])* 以下の関数は超離散パンルヴェ第二方程式の解となる。
*(i)* $d_1,d_2$ をパラメーターとし、$nQ\le -\max(|d_2|+A+Q/2,|d_1|)$ のとき

$$F_n=d_1(-1)^n,\quad G_n=\frac{(2n+1)Q+A}{2}+d_2(-1)^n.$$

*(ii)* $h_1,h_2$ をパラメーターとし、$nQ\ge \max(A/2,Q/2-A)+3\max(h_1,h_2,-h_1-h_2)/2$ のとき

$$F_n=\frac{nQ+A}{3}+c_n,\quad G_n=\frac{(2n+1)Q+2A}{3}-c_{n-1}.$$

ただし $c_k=h_1,h_2,-h_1-h_2$ $(k\equiv 0,1,2\ mod\ 3)$.

この命題をもとに次のことを予想している。

**Conjecture 2** 符号無し超離散パンルヴェ第二方程式の解 $F_n$, $G_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ において、ある定数 $n_0$, $n_0'$, $d_1$, $d_2$, $h_1$, $h_2$ が存在し、以下が成立する。

$$F_n=d_1(-1)^n,\quad G_n=\frac{(2n+1)Q+A}{2}+d_2(-1)^n,\qquad n\le n_0',$$
$$F_n=\frac{nQ+A}{3}+c_n,\quad G_n=\frac{(2n+1)Q+2A}{3}-c_{n-1},\qquad n\ge n_0.$$

ただし $c_k = h_1, h_2, -h_1 - h_2$ $(k \equiv 0, 1, 2 \ mod\ 3)$.

なお、[4] にて得られた 2 パラメーター解はすべてこの予想を満たしている。
ここで、$A = 3$, $Q = 10$ の場合の符号無し超離散パンルヴェ第二方程式を考える。
初期値を $F_0 = 0, G_0 = 0$ としたときの解は

| $n$ | $F_n$ | $G_n$ |
|---|---|---|
| $2k, 2k+1$ $(k \le -1)$ | $-3$, 3 | $20k$, $20k+23$ |
| $3k, 3k+1, 3k+2$ $(k \ge 0)$ | $10k, 10k, 10k+13$ | $20k, 20k+13, 20k+23$ |

よって、$n'_0 = -1$, $d_1 = -3$, $d_2 = -13/2$, $n_0 = 0$, $h_1 = -1$, $h_2 = -13/3$ とおくことで予想を満たす。
初期値を $F_0 = 65, G_0 = 8$ としたときの解は

| $n$ | $F_n$ | $G_n$ |
|---|---|---|
| $2k, 2k+1$ $(k \le -4)$ | 20, $-20$ | $20k-52$, $20k+75$ |
| $-6, \dots, -1$ | $20, -20, 35, -35, 65, -65$ | $-112, 15, -92, 30, -67, -5$ |
| $0, \dots, 5$ | $65, -57, 57, 38, -38, 75$ | $8, -52, 95, -32, 37, 66$ |
| $6, \dots, 11$ | $-9, 9, 85, -16, 24, 95$ | $-12, 94, 69, 8, 119, 89$ |
| $3k, 3k+1, 3k+2$ $(k \ge 4)$ | $10k-40, 10k-6, 10k+65$ | $20k-52, 20k+59, 20k+29$ |

よって、$n'_0 = -5$, $d_1 = 20$, $d_2 = -117/2$, $n_0 = 8$, $h_1 = -47$, $h_2 = -31/3$ とおくことで予想を満たす。

## 参考文献


[1] Isojima S., Satsuma J., A Class of Special Solution for the Ultradiscrete Painleve II Equation, *SIGMA* **7** (2011), 074, 9 pages, arXiv:1107.4416.

[2] Jimbo M., Sakai H., A $q$-Analog of the Painleve Equation. *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154.

[3] Mimura N., Isojima S., Murata M., Satsuma J., Singularity confinement test for ultradiscrete equations with parity variables, *J. Phys. A* **42** (2009), 315206, 7 pages.

[4] Murata M., Exact Solutions with Two Parameters for an Ultradiscrete Painlevé Equation of Type $A_6^{(1)}$, *SIGMA* **7** (2011), 059, 15 pages, arXiv:1106.3384.

[5] Ormerod C. M., Reductions of lattice mKDV to q-$P_{VI}$, *Phys. Lett. A* **376** (2012), 2855-2859.

[6] Takemura K., Tsutsui T., Ultradiscrete Painlevé VI with parity variables, *SIGMA* **9** (2013), 070, 12 pages, arXiv:1306.4959.

[7] 筒井 栄光, $q$-パンルヴェ第 6 方程式の符号付き超離散化, 修士論文, 中央大学, 2012 年度.