九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

有限体上における箱玉系と類似したソリトン方程式について

由良，文孝
公立はこだて未来大学

https://doi.org/10.15017/1448857

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 25AO-S2 (12), pp.71-78, 2014-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2
「非線形波動研究の拡がり」（研究代表者　増田　哲）

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

The breadth and depth of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 12 (pp. 71 - 78)

有限体上における箱玉系と類似したソリトン方程式について

由良　文孝（YURA Fumitaka）

(Received 3 February 2014; accepted 17 February 2014)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2014

有限体上における箱玉系と類似した ソリトン方程式について

公立はこだて未来大学　由良文孝 (Fumitaka YURA) *

概 要

「デジタル化」された可積分系として，箱玉系は活発に研究されてきた．箱玉系の超離散形式を通して得られた知見をもとに，その類似として有限体上に新規な系を得た．有理関数で記述される既知の系の多くには 0 での除算が発生するという問題があるが，ここで得られた系の時間発展は多項式を用いて記述されるものである．さらにこの系の 1-ソリトン解を示し，複数のソリトンが衝突の前後で形を保つことを数値実験により紹介する．

1　はじめに

力学系の「デジタル化」として，超離散化の手法が知られている [2]．超離散化された系においてはしばしば，パラメータや初期値を整数に制限することにより整数上で閉じた系を得ることができる．しかしこの制限は必ずしも必要ではなく，本質的には実数（あるいは有理数）上の力学系と見なすべき系 [15] である，とも考えられる．本論文では従属変数を,「真にデジタル」ともいえる有限体上にとる力学系を考察する．多くの場合，超離散系の可積分性は超離散化する前の離散系の性質と密接に関連しており，離散系の可積分性に担保されている，と見ることもできる．これはもちろん超離散化の重要な特長のひとつではある．逆に，そのようなシステムを背後に持たない有限体上での系が，例えば可積分性のような著しい性質を持つ場合を理解することは，新しい知見をもたらすと期待できる．

以下に，これまで知られている有限体上における可積分系の例をいくつか挙げる．可算無限個の保存量を持つ Schrödinger 離散スペクトル問題 [8, 2 節] から得られる（いわゆるフィルター型も含む）セルオートマトン [11] や，離散 sine-Gordon 方程式の従う Möbius 変換を有限体上で考えることにより巡回群上での可積分系を得た例がある [9]．これら 2 例における可積分性はいずれも Lax 形式により示されている．他の可積分 CA の例としては，既存の双線形形式から出発して代数幾何学的に解を構成したもの [12, 13] があり，τ 関数のレベルで有限体上の N ソリトン解が得られている．ただ，上記 3 例はいずれも可積分系ではあるが，孤立波としての解は持たないようである．また，既存の可積分方程式を用い p 進数体上での解に対し付値を取ることにより CA を得た例 [14] は，箱玉系が超離散化で得られることの類似とみなせる．また，可積分系の有限体上の応用例としては，戸田格子による復号アルゴリズムなどが挙げられる [10].

本論文では，上記のアプローチとは違い，箱玉系 [1] が超離散双線形形式を持つ系であることに着目し，その数式上の類似を有限体上に構築する．そうして得られた有限体上の力学系が孤立波解を持つことと衝突の前後でパターンが保存することを数値実験により示し，またその 1-ソリトン解について報告する．

*E-mail : yura@fun.ac.jp

2　箱玉系 [1, 2]

本論文は，箱玉系と類似した系を提案しその特徴を調べるものである．そこで，礎となる箱玉系の方程式に関連する事項を以下にまとめる [4]．箱の容量を L とした場合の箱玉系は次式で表される．

$$u_n^{t+1} := \min\left\{L - u_n^t, \sum_{i=-\infty}^{n-1}\left(u_i^t - u_i^{t+1}\right)\right\} \tag{1}$$

ここで u_n^t は時刻 t，場所 n における箱の中の玉の数と解釈される従属変数である．従属変数変換

$$u_n^t = s_n^t - s_{n-1}^t - \frac{1}{2}\max(0, -L), \quad s_n^t = g_n^{t-1} - g_n^t \tag{2}$$

を行うことにより，

$$\begin{aligned} s_{n+1}^{t+1} - s_n^t - \max(0, -L) &= \min\left(0, L - s_{n+1}^t + s_n^{t+1}\right) && (3)\\ g_{n+1}^{t+1} + g_n^{t-1} + \max(0, -L) &= \max\left(g_{n+1}^t + g_n^t, g_{n+1}^{t-1} + g_n^{t+1} - L\right) && (4) \end{aligned}$$

と，超離散双線形形式を得る．通常は箱玉系として意味のある解を得るために $L > 0$ を仮定し $\max(0, -L)$ の項を消去するが，ここでは次節との対応のために敢えて残してある．

さらに，従属変数変換 $c_n^t := s_{n-1}^t - s_{n-1}^{t+1} + \frac{1}{2}\max(0, -L)$ を導入すると，式 (3) より

$$\begin{aligned} u_n^{t+1} &= \min\left(L - u_n^t, c_n^t\right) \\ &= c_n^t - \max\left(u_n^t + c_n^t - L, 0\right) && (5)\\ c_{n+1}^t &= u_n^t + c_n^t - u_n^{t+1} \\ &= u_n^t + \max\left(u_n^t + c_n^t - L, 0\right) && (6) \end{aligned}$$

を得る．この従属変数 $\{c_n^t\}$ はしばしば運搬車 [7, 16] と呼ばれる．ここで示したのは運搬車容量に制限のない (容量 ∞) の場合である．

3　提案するモデル

3.1　箱玉系に類似した系

箱玉系はこれまでによく調べられてきた系であり，その解や保存量といった重要な性質に関してはよくわかっている．そこで箱玉系の形式を考慮しつつ，有限体上での類似を考える．しかし例えば，式 (1) などをそのまま有限体上の式と見なす試みは明らかにうまくいかない．有限体は全順序集合ではなく大小関係の定義がないため，最小値関数 min を適用できないからである．

そこで箱玉系 (1) から超離散双線形形式 (4) までの式変形に必要な代数的操作を考える．体が満たす四則演算を除くと，2 項演算である最大値関数 max に関して，その分配則 (7) を用いていることがわかる．[1][2]

$$\max(a, b) + c = \max(a + c, b + c) \tag{7}$$

つまりここで max について必要とされている操作は，max と + が満たす分配則だけであり，max が最大値を返す関数である事実などは必要ではないことがわかる．

[1] max-plus 代数では加法が max，乗法が + であることに注意

[2] 式 (1) には min が用いられているが，min は $\min(a, b) := -\max(-a, -b)$ と定義されているとする

しかし結局，式 (1) から (4) の変形を有限体上で考えると，問題となるのはやはり最大値関数 max である．そこで 2 項演算である関数 max の代わりとして，以下の性質 (8), (9), (10) を持つ関数 $M : \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ に置き換えることを考える ($q = p^m$).

$$M(0,0) = 0 \tag{8}$$

$$M(a,b) = M(b,a) \tag{9}$$

$$M(a,b) + c = M(a+c, b+c) \tag{10}$$

このとき $M(a,b) - M(-a,-b) = a + b$ が成立するが，これは max が満たす公式

$$\max(a,b) - \max(-a,-b) = \max(a,b) + \min(a,b) = a + b$$

の類似と見なせ，式 (1) の min についても関数 M を用いて置き換えられることに注意する．

命題 1
$p = 2$ のときは，式 (8), (9), (10) を満たす M は存在しない．

証明
$M(0,1) = M(-1,0) + 1 = M(1,0) + 1 = M(0,1) + 1$ □

命題 2
式 (8), (9), (10) に加え，結合則

$$M(a, M(b,c)) = M(M(a,b), c) \tag{11}$$

を要請すると，これら 4 つの式を満たす 2 項演算 M は ${\mathbb{F}_q}^2$ 上に存在しない．[3]

証明
(略証) 結合則 (11) を含めると矛盾することを導く．以降 $f(x) := M(0,x)$ とする．このとき $\forall x \in \mathbb{F}_q, f(f(x)) = f(x)$．写像 f の像 $\mathcal{I} := \{f(x) \,|x \in \mathbb{F}_q\}$ に対して，$\forall x \in \mathcal{I}, f(x) = x, f(-x) = 0$. (特に $0 \in \mathcal{I}$ に注意する)．さらに，$\forall x, y \in \mathcal{I}, f(x+y) = x + y$ つまり $x + y \in \mathcal{I}$，および $\exists x_0 (\neq 0) \in \mathcal{I}$ を示すことができて，$\mathcal{I}$ は 1 次元以上の線形空間となる．このとき $(-x_0) = (p-1)x_0 \in \mathcal{I}$ だから $f(-x_0) = -x_0$ かつ $f(-x_0) = 0$ となり矛盾． □

命題 1 より p は奇素数だから，整数 $l := (p-1)/2$ とおく．さらに簡単のため，素体 ($m = 1$) に話を限る．式 (8), (9), (10) を満たす M は $M(0,j)$ ($j = 1, 2, \ldots, l$) の値により一意に定まるため，l 個の α_j ($= M(0,j)$) を用いて次のように表される．[4]

$$M(0,x) \equiv M^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)}(0,x) = \sum_{j=1}^{l} (\delta_{x,j}\alpha_j + \delta_{x,-j}(\alpha_j - j))$$

ここで δ は Kronecker delta であり任意の $y \in \mathbb{F}_p$ に対して

$$\delta_{x+y,y} := -(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

[3] 箱玉系の一般解が式 (1) を満たすことの証明には結合則が必要．箱玉系の一般解は式 (12) の解の構成には使えない
[4] $j = l+1, l+2, \ldots, 2l = p-1$ のときは $M(0,j) = M(0,-j) + j$ から決まる ($-j = 1, 2, \ldots, l$ に注意する)

である．[5] つまり，$M(0,x) =: f(x)$ は多項式であることに注意する．

この多項式関数 M を用い，以下の「双線形形式」を出発点とする．

$$G_{n+1}^{t+1} + G_n^{t-1} + M(0,-L) = M\left(G_{n+1}^t + G_n^t, G_{n+1}^{t-1} + G_n^{t+1} - L\right) \tag{12}$$

ここで従属変数 G_n^t, S_n^t, U_n^t や L はすべて $\mathbb{F}_p$ の元とし，独立変数 n, t は $\mathbb{Z}$ のままであることに注意する．このとき，従属変数変換

$$U_n^t = S_n^t - S_{n-1}^t - 2^{-1}M(0,-L), \quad S_n^t = G_n^{t-1} - G_n^t$$

を行うことにより，式 (1)–(4) と同様に

$$U_n^{t+1} = -M\left(-L + U_n^t, -\sum_{i=-\infty}^{n-1}\left(U_i^t - U_i^{t+1}\right)\right) \tag{13}$$

$$S_{n+1}^{t+1} - S_n^t = -M\left(0, -L + S_{n+1}^t - S_n^{t+1}\right) \tag{14}$$

を得る．運搬車描像 (5), (6) についても同様に成り立つ．また，$t \to -t$ および $n \to -n$ の変形から明らかに可逆な力学系であることがわかる．

3.2 0-ソリトン解について

箱玉系では，$g_n^t = \text{const.}$ が 0-ソリトン解を与えている．(t に比例する項や n にのみ依存する関数は許されるが u_n^t には効いてこない)．式 (12) においても $G_n^t = \text{const.}$ が 0-ソリトン解に対応すると解釈でき，$U_n^t = -2^{-1}M(0,-L) = l \times M(0,-L)$ が 0-ソリトン解となる．この量は一般には非零だが定数であるため，バックグラウンドを適切にとることで時間発展を定めることができる．

4 もっとも簡単な場合：$p = 3$

$\mathbb{F}_3$ の場合を考える．$l = 1$ であるから $\alpha_1 \in \mathbb{F}_3$ を定めれば M が決まる．

$$M^{(\alpha_1)}(a,b) := (\alpha_1 + 1)(a^2 + ab + b^2) + 2(a+b) \tag{15}$$

$M^{(2)}$ は線形関数であるから自明な系しか与えない．また，

$$M^{(1)}(a,b) = 2^{-1}M^{(0)}(2a, 2b)$$

が成立するため，L と全ての従属変数を 2 倍にする操作のもとで同型となる（$2^{-1} \equiv 2 \mod 3$）．そこで，以下 M として $M^{(1)}(a,b) = 2(a^2 + ab + b^2 + a + b)$ のみを考える．また $L = 1$ に限ることにする．

図 1(a) に，3 種類のソリトンの衝突の例を示す ($L = 1$)．まずこのパラメータのときの 0 ソリトン解は，すべて"0"からなるパターンである．この背景の上で，パターン"11"が速度 2，パターン"1"が速度 1，パターン"2"が速度 0 を持ち移動している様子が分かる．また，衝突の前後で位相はずれるがその形を崩さない点は箱玉系と類似している．しかし，図中における"11"と"2"の 2 箇所の衝突では，各々の衝突の仕方が衝突前の相対的な位相差によって変化している．このようなことは箱玉系の場合には起こらない．

[5] Wilson の定理：$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

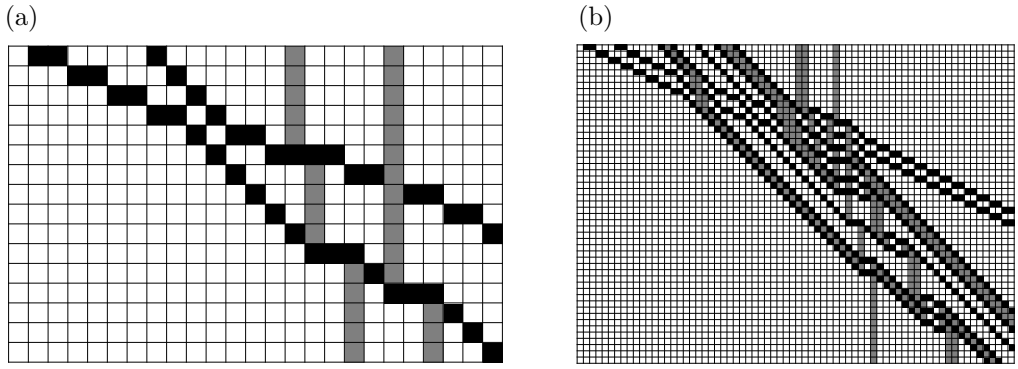

図 1: 式 (13) の時間発展例 ($p = 3, \alpha_1 = 1, L = 1$, 白: 0, 黒: 1, 灰色: 2)．座標軸は，t: 上から下，n: 左から右．初期値として，最上列の左からそれぞれ (a) 速度 2, 1, 0, 0 (b) 速度 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0 のソリトンを与えた．

ここで進行波解を調べる．今 $\alpha_1 = 1,\ L = 1$ であるから $M^{(1)}(0, -L) = 0$ が成立している．$G(\xi) = G_n^t$, $\xi := kn - \omega t$ とおいて式 (12) と (14) へ代入することにより

$$
\begin{aligned}
G(\xi + k - \omega) + G(\xi + \omega) &= M\left(G(\xi + k) + G(\xi), G(\xi + k + \omega) + G(\xi - \omega) - 1\right) && (16)\\
S(\xi + k - \omega) - S(\xi) &= -M\left(0, S(\xi + k) - S(\xi - \omega) - 1\right) && (17)
\end{aligned}
$$

を得る．まず速度 0 の解に対応する $\omega = 0$ を式 (17) へ代入すると，$S(\xi + k) - S(\xi) = 0$ または 2 を得る．$U_{n+1}^t = S(\xi + k) - S(\xi)$ だから $U_{n+1}^t = 0$ または 2 となり，すべての箱の初期状態が"0"または"2"のみ ("1"を含まない) であれば動かないパターンを与えることが分かる．

次に速度 1 の解を調べる．このとき $\omega = k$ だから式 (16) より

$$
G(\xi) + G(\xi + k) = M\left(G(\xi + k) + G(\xi), G(\xi + 2k) + G(\xi - k) - 1\right)
$$

となるため，分配則 (10) より

$$
M\left(0, G(\xi + 2k) - G(\xi + k) - G(\xi) + G(\xi - k) - 1\right) = 0
$$

ところで

$$
\begin{aligned}
U_n^t &= G_n^{t-1} - G_n^t - G_{n-1}^{t-1} + G_{n-1}^t\\
&= G(\xi + \omega) - G(\xi) - G(\xi - k + \omega) + G(\xi - k)\\
&= G(\xi + k) - 2G(\xi) + G(\xi - k)
\end{aligned}
$$

だから $M\left(0, U_{n+1}^t + U_n^t - 1\right) = 0$ となり陽には解けないが，$U_{n+1}^t + U_n^t = 0$ または 1 の条件から，任意の t と n に対し

$$
(U_n^t, U_{n+1}^t) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2)\}
$$

の組み合わせのみが許されることがわかる．0-ソリトン解は"0"が一様に続いているパターンであり，上の組み合わせで $(0, 2)$ が許されていないことから，速度 1 の解の左端は"1"で始まることがわかる．同様に $(2, 0)$ が許されていないことから，速度 1 の解の右端は"1"で終わることがわかる．これらのこ

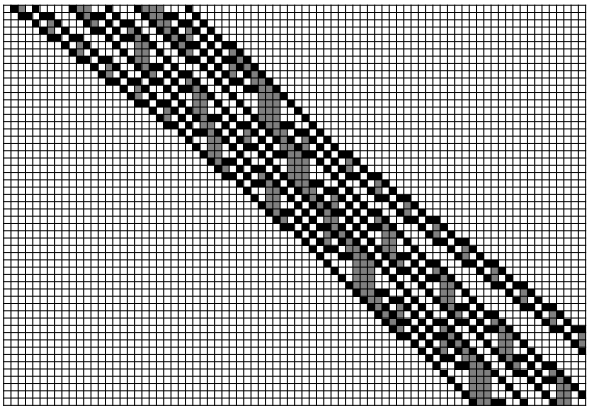

図 2: 式 (13) の時間発展例 ($p = 3, \alpha_1 = 1, L = 1$, 白: 0, 黒: 1, 灰色: 2)．初期値として，最上列の左から速度 4/3, 8/7, 16/15 のソリトンを与えた．複雑な衝突にもかかわらずその前後でパターンを保っている．

とから，パターン中に"2"が含まれていない場合"010"，パターン中に"2"を含む場合"012(12+2)*10"（正規表現）が速度 1 の解である．つまり途中に"0"を含まず，かつ速度 1 を持つパターンが無限個存在する ("010", "01210", "012210", "0121210", "0122210", ...).

次に速度 2 の解を調べる．$\omega = 2k$ だから式 (16) より

$$G(\xi - k) + G(\xi + 2k) = M\left(G(\xi + k) + G(\xi), G(\xi + 3k) + G(\xi - 2k) - 1\right)$$

となるが，上と同様に $U_n^t = G(\xi + 2k) - G(\xi + k) - G(\xi) + G(\xi - k)$ を用いて

$$U_n^t = M\left(0, U_{n+1}^t + U_n^t + U_{n-1}^t - 1\right)$$

を得る．これを解くことにより速度 2 の解に現れるパターンは

$$(U_{n-1}^t, U_n^t, U_{n+1}^t) \in \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (1,1,0)\}$$

の 5 種類であることがわかる．これを組み合わせて得られる解は"$\cdots 001100 \cdots$"のみである．図 1(b) に速度 2, 1, 0 のソリトン例を示した．やはり衝突により各々のパターンが保存していることが見て取れる．速度 0 のソリトンが入れ替わっていることが興味深い．

定理 (1 ソリトン解)
上で求めた速度 *0, 1, 2* のソリトン解以外に，任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$k = 2^{n+1} - 1, \omega = 2^{n+1}$ を満たす進行波解が存在する．その解はある時刻でパターン"12^n0^n1"を含み，速度 $\dfrac{w}{k} = \dfrac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}$ を持つ．$n = 0$ のときは上で求めた速度 *2* のソリトン"*11*"に一致する．

解の具体形は Appendix に記載し，証明は省略する．図 2 に上記に関するソリトンの進行波とその間の散乱の様子を図示した．最上列の初期値として，それぞれ"1201", "122001", "12220001"を与えたものである．ここで分数速度 $\dfrac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}$ は，時刻 $2^{n+1} - 1$ の後に，座標が 2^{n+1} ずれた場所に同じバターンがあらわれることを意味している．ここまでに述べた以外の 1-ソリトンが存在するかどうかは現在のところ未証明である．数値実験の結果では，本論文に記載のパターンを除いて，束縛状態とみなせる状態は見つかっていない．

周期箱玉系 [5] においては，システムサイズ K（箱の数）に対する漸近的な軌道の最大基本周期が求められており [6]，そのオーダーは $\exp\sqrt{K}$ である．さらに，ほとんどすべての軌道に対してその周期のオーダーは $\exp[(\log K)^2]$ よりも小さいことがわかっている．これは状態数 2^K に対して非常に小さく，周期箱玉系の可積分性を反映していると考えられる．上で示した 1-ソリトンの解は，この系がシステムサイズ K に対して周期 $\sim 2^{K/2}$ の軌道を含むことを意味しており，ソリトン系ではあるが非可積分系である可能性があり，保存量などを明らかにすることは重要であると思われる．

5 おわりに

本論文では，箱玉系の双線形形式の類似を考えることにより，有限体上でのソリトン系を提案した．現在のところこの系におけるソリトンの構造にはいまだ不明な点が多い．本論文では $p = 3, L = 1$ の例を示したが，一般の p や L において常にソリトン系を与えるとは限らず，その条件を調べることは今後の課題である．

謝辞

本研究は科研費 (基盤 (C) 23611027) の助成を受けたものである．

A 分数速度の 1-ソリトン解について

以下事実のみを示すものとし，証明は別の機会に譲る．$n(\geq 1)$ を定理中のものとし次の数列を再帰的に用意する．数字の置き換えに伴う木構造を明示するため括弧つきで表示するが，数列としては括弧を無視することとする．

- $I_n^{(n)} := (2^{n+1} - 1, 1)$
- $I_{i-1}^{(n)} := I_i^{(n)}$の中の値$\underline{2^{i+1} - 1}$をすべて$\underline{(2^i - 1, 2^i - 1, 1)}$ に置き換える ($2 \leq i \leq n$ のとき)

各数列 $I_i^{(n)}$ の長さは 2^{n-i+1}，総和は 2^{n+1} である．さらにこれらを次のように並べて，長さが $r := 3 \times 2^{n+1} - (n+5)$，総和が $(2n+1)2^{n+1} - (n+1)$ の数列を得る．

$$I^{(n)} := (I_n^{(n)}, I_{n-1}^{(n)}, \ldots, I_1^{(n)}, \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{2^{(n+1)}-n-1}, I_1^{(n)R}, I_2^{(n)R}, \ldots, I_n^{(n)R})$$

ここで X^R は数列 X を逆順に並べた数列とする．例として，$n = 3$ のとき $I_3^{(3)} = (15, 1), I_2^{(3)} = ((7, 7, 1), 1), I_1^{(3)} = (((3, 3, 1), (3, 3, 1), 1), 1), I_2^{(3)R} = (1, (1, 7, 7))$ などから

$$\begin{aligned} I^{(3)} \quad := \quad & ((15, 1), ((7, 7, 1), 1), (((3, 3, 1), (3, 3, 1), 1), 1), \overbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}^{12}, \\ & (1, (1, (1, 3, 3), (1, 3, 3))), (1, (1, 7, 7)), (1, 15)) \end{aligned}$$

を得る．この長さ r の数列 $I^{(n)}$ の要素を左から順に $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$ とおく．さらに漸化式 $a_{i+1} = a_i + b_i, a_0 = 0$ を用いて，数列の和 $\{a_i\}_{i=0}^r$ を得る．集合 $J := \{a_0, a_1, \ldots, a_r\}$ に対し，$S(\xi) := \sum_{i \in J} \theta(\xi - i) \pmod 3$ を定義すると，$\omega = 2^{n+1}, k = \omega - 1$ と置いたときの式 (17) を満たす．ここで θ は整数 ξ の

みに対し定義される単位ステップ関数 $\theta(\xi) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \xi) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ とする．$n = 3$ の例では，$a_0 = 0, a_1 = 15, a_2 = 16, a_3 = 23, a_4 = 30, a_5 = 31, \ldots$ などである．$S(\xi) = \#\{j \in J \,|j \leq \xi\}$ の表示に注意すると，$S(\xi) - S(\xi - 1) = \begin{cases} 1 & (\xi \in J) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$, $S(\xi + k) - S(\xi - \omega) = \#\left\{j \in J \,\middle|\, \xi - 2^{n+1} < j < \xi + 2^{n+1}\right\}$ となり，間隔 $2k + 1$ の窓の中にある集合 J の要素数を数える問題に帰着する．たとえば上記の例 $n = 3$ で $\xi = 15$ と取ると

$$S(\xi) - S(\xi + k - \omega) = M\left(0, S(\xi + k) - S(\xi - \omega) - 1\right)$$

の左辺は 1, 右辺は $0 \leq a_i \leq 30$ を満たす要素は 5 個であるから $M(0, 5-1) = M(0, 1) = 1$ となり，等号が成立する．また $U_n^t = S(\xi) - S(\xi - k), \xi = kn - \omega t$ だから，間隔 k の窓の中にある集合 J の要素数を，$\xi = \ldots, 7, 7+k, 7+2k, 7+3k, \ldots$ において数えると $\left\{U_n^t\right\}_n = \{\ldots, 1, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots\}$ を得る．

参考文献

[1] D. Takahashi and J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 3514(1990).

[2] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3247(1996).

[3] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *J. Phys.* **A. 30**, 733(1997).

[4] T. Tokihiro, D. Takahashi and J. Matsukidaira, *J. Phys.* **A. 33**, 607(2000).

[5] F. Yura and T. Tokihiro, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 3787(2002).

[6] J. Mada and T. Tokihiro, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 7251(2003).

[7] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, L733(1997).

[8] M. Bruschi, P. M. Santini and O. Ragnisco, *Phys. Lett. A* **169**, 151(1992).

[9] A. Bobenko, M. Bordemann, C. Gunn and U. Pinkall, *Commun. Math. Phys.* **158**, 127 (1993).

[10] Y. Nakamura and A. Mukaihira, *Phys. Lett. A* **249**, 295(1998).

[11] M. Bruschi, *J. Nonlinear Math. Phys.* **13**(No. 2), 205(2006).

[12] M. Białecki and A. Doliwa, *Theor. and Math. Phys.* **137(1)**, 1412(2003).

[13] A. Doliwa, M. Białecki and P. Klimczewski, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 4827(2003).

[14] M. Kanki, J. Mada and T. Tokihiro, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)* **8**, 054 (2012).

[15] R. Hirota, M. Iwao, A. Ramani, D. Takahashi, B. Grammaticos and Y. Ohta, *Phys. Lett. A* **236**, 39(1997).

[16] 中村佳正 編, 「可積分系の応用数理」，裳華房 (2000).

[17] 由良文孝, 電子情報通信学会信学技法, NLP2009-89, 39 (2009).