B型箱玉系の混合解について

長井，秀友
東海大学理学部

https://doi.org/10.15017/1448856

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．25AO-S2 (11), pp.65-70, 2014-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2
「非線形波動研究の拡がり」（研究代表者　増田　哲）

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

The breadth and depth of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 11 (pp. 65 - 70)

B型箱玉系の混合解について

長井　秀友（NAGAI Hidetomo）

（Received 15 January 2014; accepted 19 February 2014）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2014

B 型箱玉系の混合解について

東海大学理学部　長井秀友　(NAGAI Hidetomo)

概　要　離散 BKP 方程式から導かれるある超離散方程式のソリトン解を紹介する．この解は超離散 KdV 方程式，超離散戸田格子方程式と同様の分散関係式で定義される 2 種類のソリトン解を混合した解となっている．

1　はじめに

超離散ソリトン方程式は差分ソリトン方程式を超離散化して得られる方程式であり，差分ソリトン方程式同様，ソリトン解を持つ．特に超離散化は元の方程式の積，和をそれぞれ和，max 演算に置き換えることから，適当な初期値のもとで超離散ソリトン方程式は独立変数のみならず従属変数も整数値をとるように定められる．代表的な超離散ソリトン方程式として超離散 KdV 方程式が挙げられる．この方程式では初期値を 0, 1 で定めた場合，時間発展を無限個の箱と有限個の玉をある規則に従って動かすことで表すことができ，箱玉系と呼ばれる [1]．箱玉系を拡張した容量付箱玉系や周期箱玉系なども存在し，同様にソリトンの性質を持つ [2, 3]．

現在までに与えられている超離散ソリトン方程式の多くは離散 KP 方程式から導かれている．一方，離散ソリトン方程式には離散 KP 方程式以外にも，離散 BKP 方程式などが存在する [4]．離散 BKP 方程式の超離散化の研究は離散 KP 方程式と比べるとあまり多くないが，先行研究の一つとして Sawada-Kotera 方程式の超離散化が挙げられる [5]．この研究では Sawada-Kotera 方程式を超離散化して得られる方程式には通常のソリトン解の他に PPS 解と呼ばれる周期位相項をもつソリトン解が存在することを示している．元の Sawada-Kotera 方程式には PPS 解は存在せず，超離散方程式において新しい解が発見されるという興味深い事実を与えている．本研究ではこのような結果を踏まえ，B 型箱玉系と呼ばれる一般化した離散 BKP 方程式から導かれる方程式を対象にして研究を行った．[6] において 2 種類のソリトン解が存在することを示したが，本論文ではこの 2 種の解を特別な場合に含むような厳密解が存在することを紹介する．

2　B 型箱玉系

B 型箱玉系は次で与えられる [6].

$$F_{n+1}^{m+1}+F_n^{m-1}=\max(F_{n+1}^m+F_n^m, F_n^{m+1}+F_{n+1}^{m-1}-\delta_1, F_{n+2}^m+F_{n-1}^m-\delta_2) \qquad (0\le\delta_1\le\delta_2) \tag{2.1}$$

この方程式は

$$(1+d_2)f_{n+1}^{m+1}f_n^{m-1}=(1-d_1)f_{n+1}^m f_n^m+d_1 f_n^{m+1}f_{n+1}^{m-1}+d_2 f_{n+2}^m f_{n-1}^m \tag{2.2}$$

を変数変換 $d_i=e^{-\delta_i/\varepsilon}$, $f_n^m=e^{F_n^m/\varepsilon}$ のもとで超離散化することで得られる方程式である．ここで (2.2) は離散 BKP 方程式を一般化した方程式

$$\begin{aligned} &z_1\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)+z_2\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\ &+z_3\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n)+z_0\tau(l,m,n)\tau(l+1,m+1,n+1)=0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

に座標変換

$$l=-k_1, \qquad m=2k_1+k_2-k_3, \qquad n=-k_1-k_2 \tag{2.4}$$

を行って得られる方程式

$$\begin{aligned} &z_1\tau(k_1,k_2+1,k_3)\tau(k_1+1,k_2,k_3+1)+z_2\tau(k_1+1,k_2,k_3+1)\tau(k_1,k_2,k_3)\\ &+z_3\tau(k_1+1,k_2,k_3+1)\tau(k_1,k_2-1,k_3)+z_0\tau(k_1+1,k_2,k_3+2)\tau(k_1,k_2,k_3-1)=0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

に対して拘束条件

$$\tau(k_1+1,k_2,k_3)=\tau(k_1,k_2,k_3) \tag{2.6}$$

および

$$z_1=1+d_1, \qquad z_2=-1+d_2, \qquad z_3=-d_1, \qquad z_4=-d_2, \tag{2.7}$$

から与えられる式である．

(2.1) は次で表されるソリトン解を持つ．

$$\begin{aligned} F_n^m =&(0,S_1),\\ F_n^m =&(0,S_1,S_2,S_1+S_2-A_{12}),\\ F_n^m =&(0,S_1,S_2,S_3,S_1+S_2-A_{12},S_1+S_3-A_{13},S_2+S_3-A_{23},\\ &S_1+S_2+S_3-A_{12}-A_{13}-A_{23}), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} S_i =&S_i(m,n)=P_im-Q_in+C_i,\\ Q_i =&\frac{1}{2}(|P_i+\delta_1|-|P_i-\delta_1|),\\ A_{ij} =&2\min(\max(P_i,-P_j),\max(-P_i,P_j)). \end{aligned} \tag{2.9}$$

ただし P_i, C_i は任意定数とする．さらに (2.9) の条件式とは別に Ω_i, C_i を任意定数として

$$\begin{aligned} S_i =&S_i(m,n)=K_im-\Omega_in+C_i,\\ K_i =&\min(0,-\Omega_i+\delta_2)-\min(0,\Omega_i+\delta_2),\\ A_{ij} =&\min(\max(K_i-2\Omega_i,-K_j+2\Omega_j),\max(K_j-2\Omega_j,-K_i+2\Omega_j)) \end{aligned} \tag{2.10}$$

のもとでの (2.8) も (2.1) の解となる．すなわち B 型箱玉系には (2.8), (2.9) で与えられるソリトン解と，(2.8), (2.10) で与えられるソリトン解の 2 種が存在する．ここでは (2.9) で与えられる解を超離散 KdV タイプの解，(2.10) で与えられる解を超離散戸田タイプの解と呼ぶ．

3 混合解

前節で与えたソリトン解とは別に次の解が (2.1) には存在する．

$$\begin{aligned} &F_n^m=(0,S_1,S_2,S_1+S_2-A_{12})\\ &S_1(m,n)=Pm-Qn+C_1, \qquad Q=\min(P,\delta_1)\\ &S_2(m,n)=Km-\Omega n+C_2, \qquad K=\min(0,-\Omega+\delta_2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$A_{12}=\min(\max(-P+2Q,2K),\max(-P+2Q+\Omega-\delta_2,0)) \tag{3.2}$$

ここでは簡単のため，$P,\Omega\geq 0$ としている．解 (3.1) は $P=0, C_1=0$ のとき，$A_{12}=0$ となり前節で与えた超離散戸田タイプの解となる．また $\Omega=0, C_2=0$ の場合についても同様に $A_{12}=0$ とな

り超離散 KdV タイプの解となる．つまり (3.1) は特別な場合として超離散 KdV タイプ，超離散戸田タイプのソリトン解を含む解であり，これらの混合解とみなせる．

(3.1), (3.2) が (2.1) の解であることは以下のように示される．$F^{m+\alpha}_{n+\beta}+F^{m-\alpha}_{n+1-\beta}$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
&F^{m+\alpha}_{n+\beta}+F^{m-\alpha}_{n+1-\beta}\\
=&\max(0,S_1+\alpha P-\beta Q,S_2+\alpha K-\beta\Omega,S_1+S_2+\alpha(P+K)-\beta(Q+\Omega)-A_{12})\\
&\quad+\max(0,S_1-\alpha P-(1-\beta)Q,S_2-\alpha K-(1-\beta)\Omega,S_1+S_2-\alpha(P+K)-(1-\beta)(Q+\Omega)-A_{12})\\
=&\max\Big(0,S_1+\max(\alpha P-\beta Q,-\alpha P-(1-\beta)Q),\quad S_2+\max(\alpha K-\beta\Omega,-\alpha K-(1-\beta)\Omega),\\
&\quad 2S_1-Q,\quad 2S_2-\Omega,\ 2S_1+2S_2-Q-\Omega-2A_{12},\\
&\quad 2S_1+S_2+\max(-\alpha K-Q-(1-\beta)\Omega-A_{12},\ \alpha K-Q-\beta\Omega-A_{12}),\\
&\quad S_1+2S_2+\max(\alpha P-(1-\beta)\Omega-\beta(Q+\Omega)-A_{12},\ -\alpha P-\beta\Omega-(1-\beta)(Q+\Omega)-A_{12}),\\
&\quad S_1+S_2+\max(\alpha(P+K)-\beta(Q+\Omega)-A_{12},\ -\alpha(P+K)-(1-\beta)(Q+\Omega)-A_{12},\\
&\qquad \alpha(P-K)-\beta Q-(1-\beta)\Omega,\ -\alpha(P-K)-\beta\Omega-(1-\beta)Q)\Big)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

と表される．(α,β) を (1,1), (0,1), (1,0), (0,2) としたものが (2.1) の各項を与えている．したがって α,β に (1,1) などの値を代入した項が (2.1) を満たしていれば解となるが，これはそれぞれ S_1, S_2 が同じ係数をもつ項同士で (2.1) が成り立つことから示される．例えば (3.3) において S_1+S_2 を持つ項を取り出すと

$$
\begin{aligned}
S_1+S_2+\max(\alpha(P+K)-\beta(Q+\Omega)-A_{12},\ -\alpha(P+K)-(1-\beta)(Q+\Omega)-A_{12},\\
\alpha(P-K)-\beta Q-(1-\beta)\Omega,\ -\alpha(P-K)-\beta\Omega-(1-\beta)Q)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

であるが，これに (α,β) を (1,1), (0,1), (1,0), (0,2) と代入した項同士は

$$
\begin{aligned}
&\max(P+K-Q-\Omega-A_{12},-P-K-A_{12},P-K-Q,-P+K-\Omega)\\
=&\max\Big(-Q-\Omega-A_{12},-A_{12},-Q,-\Omega,\\
&\quad\max(P+K-A_{12},-P-K-Q-\Omega-A_{12},P-K-\Omega,-P+K-Q)-\delta_1,\\
&\quad\max(-2Q-2\Omega-A_{12},Q+\Omega-A_{12},-2Q+\Omega,-2\Omega+Q)-\delta_2\Big)
\end{aligned}
$$

を満たすことが (3.1), (3.2) より示される．他の S_1, S_2, S_1+2S_2 などを持つ項同士も同様にして (2.1) を満たすことが確認できる．

(3.2), (3.1) で定義された解の挙動を図 1 に表す．ここで変数 U^m_n, V^m_n, X^m_n は次で与えられる [6].

$$
\begin{aligned}
U^m_n=&F^m_{n+1}+F^{m+1}_n-F^m_n-F^{m+1}_{n+1}\\
V^m_n=&F^{m-1}_n+F^{m+1}_{n+1}-F^m_n-F^m_{n+1}\\
X^m_n=&F^m_{n-1}+F^m_{n+2}-F^m_n-F^m_{n+1}
\end{aligned}
$$

なお混合解を一般化したものとして次で定義される F^m_n が方程式を満たすことが数値計算から予

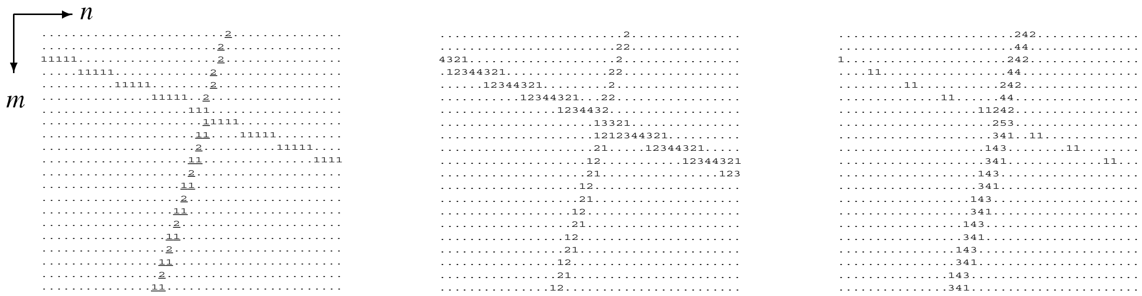

図 1: 解 (3.2), (3.1) のプロット．$(P,\Omega,C_1,C_2)=(5,4,17,2)$，$\delta_1=1$, $\delta_2=2$ とし，左から U_n^m, V_n^m, X_n^m を表す．また “.”は 0 を，$\underline{1}$ は -1 を表す.

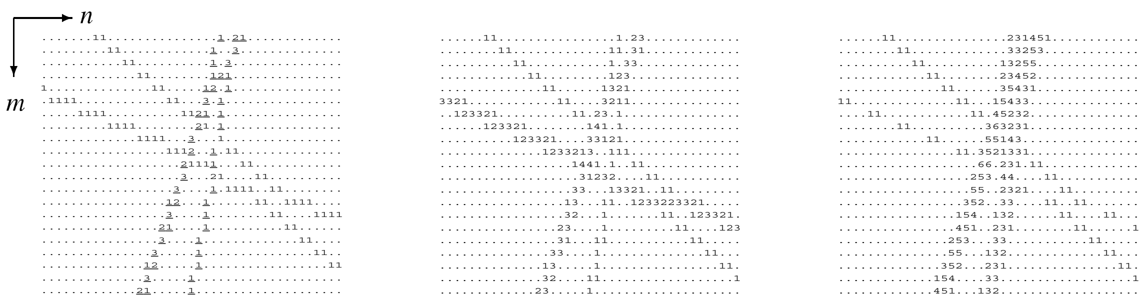

図 2: (3.5) のプロット．$(P_1,P_2,\Omega_3,\Omega_4,C_1,C_2,C_3,C_4)=(2,4,3,5,7,1,10,6)$，$\delta_1=1$, $\delta_2=2$ とし，左から U_n^m, V_n^m, X_n^m を表す.

想される.

$$
\begin{aligned}
&F_n^m=\max_{\mu_i=0,1}\Big(\sum_{i=1}^{N+M}\mu_i S_i(m,n)-\sum_{1\le i<j\le N+M}\mu_i\mu_j A_{ij}\Big)\\
&S_i(m,n)=\begin{cases}P_i m-Q_i n+C_i & (1\le i\le N)\\ K_i m-\Omega_i n+C_i & (N+1\le i\le N+M)\end{cases}\\
&A_{ij}=\begin{cases}2\min(P_i,P_j) & (1\le i<j\le N)\\ \min(\max(-P_i+2Q_i,2K_j), & \\ \qquad\max(-P_i+2Q_i+\Omega_j-\delta_2,0)) & (1\le i\le N<j\le N+M)\\ \min(-K_j+2\Omega_j,-K_i+2\Omega_j) & (N\le i<j\le N+M)\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

ここで P_i, Ω_i は正の定数．C_i は任意定数とする．この解は超離散 KdV 方程式の解を N 個，超離散戸田タイプの解を M 個混合したものとなっている.

4 混合解を持つ方程式の生成に関する考察

本節では既知の超離散ソリトン方程式を組み合わせて，B 型箱玉系の様な混合解を持つ方程式が生成できるかを考察する.

一般に

$$\begin{aligned}
F_n^m &= \max_{\mu_i=0,1}\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i S_i(m,n) - \sum_{1\le i<j\le N}\mu_i\mu_j R_i\right)\\
S_i(m,n) &= P_i m - Q_i n + C_i, \qquad 0\le P_1\le P_2\le\cdots\le P_N\\
R_i &= kP_i + lQ_i, \qquad k,l\ge 0
\end{aligned}\tag{4.1}$$

で定義された F_n^m は各分散関係式によって次の方程式を満たすことが示される [7]．ここで L_i, M は正の任意定数を表す.

- 分散関係式 $Q_i=\min(P_i,L_1)$ のとき

$$F_n^m + F_{n-l+1}^{m+k} = \max(F_{n-l}^{m+k-1}+F_{n+1}^{m+1}, F_{n-l}^{m+k}+F_{n+1}^{m}-L_1) \qquad (k\ge 2) \tag{4.2}$$

- 分散関係式 $Q_i=\max(0,P_i-L_2)$ のとき

$$F_n^m + F_{n-l-1}^{m+k-1} = \max(F_{n-l}^{m+k-1}+F_{n-1}^{m}, F_{n-l}^{m+k}+F_{n-1}^{m-1}-L_2) \qquad (k,l\ge 1) \tag{4.3}$$

- 分散関係式 $Q_i=\begin{cases}0 & (0\le P_i\le M)\\ L_3 & (M<P_i)\end{cases}$ のとき

$$F_n^m + F_{n-l+1}^{m+k} = \max(F_{n-l+2}^{m+k}+F_{n-1}^{m}, F_{n-l}^{m+k}+F_{n+1}^{m}-L_3) \qquad (l\ge 3) \tag{4.4}$$

ここで (4.2) に属する

$$F_{n+1}^{m+1} + F_n^{m-1} = \max(F_{n+1}^{m}+F_n^{m}, F_n^{m+1}+F_{n+1}^{m-1}-L_1) \tag{4.5}$$

と，m と n を置き換えた (4.3) に属する

$$F_{n+1}^{m+1} + F_n^{m-1} = \max(F_{n+1}^{m}+F_n^{m}, F_{n+2}^{m}+F_{n-1}^{m}-L_2) \tag{4.6}$$

を観察すると，B 型箱玉系は (4.5) と (4.6) の右辺を一つの max 関数にまとめた式とみなせる．さらに (4.5) のソリトン解は (2.8), (2.9) で与えられ，(4.6) のソリトン解は (2.8), (2.10) で与えられるが，B 型箱玉系はこれらをどちらも解として満たす．この関係性から，(4.2), (4.3), (4.4) から 2 つの方程式を取り出し，左辺および右辺第一項が一致するように k, l をさだめ，右辺を一つの max でまとめることで B 型箱玉系と同様の 2 種のソリトン解をもつ方程式を生成される可能性が考えられる．例えば，(4.3), (4.4) において左辺が等しくなるような例として，

$$\begin{aligned}
F_n^m + F_{n-3}^{m+1} &= \max(F_{n-2}^{m+1}+F_{n-1}^{m}, F_{n-2}^{m+2}+F_{n-1}^{m-1}-L_2)\\
F_n^m + F_{n-3}^{m+1} &= \max(F_{n-2}^{m+1}+F_{n-1}^{m}, F_{n-4}^{m+1}+F_{n+1}^{m}-L_3)
\end{aligned}$$

が挙げられる．これらの右辺を一つの max でまとめた方程式

$$F_n^m + F_{n-3}^{m+1} = \max(F_{n-2}^{m+1}+F_{n-1}^{m}, F_{n-2}^{m+2}+F_{n-1}^{m-1}-L_2, F_{n-4}^{m+1}+F_{n+1}^{m}-L_3)$$

が混合解を持つ方程式の候補として挙げられる．しかしながら上記の方程式は (4.1) の解を持たないことが数値計算から確かめられる．他の組み合わせにおいても，k, l の条件がはずれる，大小関係から簡単化される，などの理由から B 型箱玉系の場合を除いて 2 種のソリトン解を持つ方程式は生成できないことが確認される.

5　まとめ

本研究ではB型箱玉系において，2種のソリトン解が混合する厳密解を与えた．これまでに超離散系において負の解とソリトン解を混合した解は知られていたが，本研究においてソリトン解2種を混合した解の存在も示された．また，本論文では既知の超離散ソリトン方程式を組み合わせて，B型箱玉系のような方程式の生成を試みたが，B型箱玉系を除くと2種のソリトン解をもつ方程式が今回の手法では得られないことが確認された．以上のことからも2種のソリトン解を持つ方程式としてのB型箱玉系の特殊性がうかがえる．

参考文献

[1] 広田良吾，高橋大輔：「差分と超離散」, 共立出版 (2003)

[2] D. Takahashi and J. Matsukidaira,: "Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation", J. Phys. A Math. Gen. **30** (1997) L733–739.

[3] F. Yura and T. Tokihiro: "On a periodic soliton cellular automaton", J. Phys. A Math. Gen. **35** (2002) 3787–3801.

[4] T. Miwa: "On Hirota's difference equations", Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. **58** (1982) 9–12.

[5] S. Nakamura: "A periodic phase soliton of the ultradiscrete hungry Lotka-Volterra equation　", J.Phys.A: Math.Theor.42(2009)495204(10pp))

[6] 広田良吾，長井秀友: 「B型箱玉系のソリトン解について」，九州大学応用力学研究所研究集会報告集 No.24AO-S3, 101–106.

[7] H. Nagai and D. Takahashi: "Bilinear Equations and Bäcklund Transformation for Generalized Ultradiscrete Soliton Solution", J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010), 375202(13pp).