R_{II}格子と非自励離散mKdV方程式

前田，一貴
京都大学情報学研究科

辻本，諭
京都大学情報学研究科

https://doi.org/10.15017/1448854

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 25AO-S2 (9), pp.53-58, 2014-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2
「非線形波動研究の拡がり」（研究代表者　増田　哲）

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

The breadth and depth of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 09 (pp. 53 - 58)

R_{II} 格子と非自励離散 mKdV 方程式

前田　一貴（MAEDA Kazuki），辻本　諭（TSUJIMOTO Satoshi）

(Received 14 January 2014; accepted 26 February 2014)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2014

R_{II} 格子と非自励離散 mKdV 方程式

京都大学大学院情報学研究科　前田一貴　(Maeda Kazuki)
京都大学大学院情報学研究科　辻本　諭　(Tsujimoto Satoshi)

概　要　モニック対称 R_{II} 多項式のスペクトル変換の両立条件として，非自励離散 mKdV 方程式が導出されることを示す．このことを用いて，モニック型 R_{II} 格子と非自励離散 mKdV 方程式の間の Miura 変換を与える．さらに，半無限格子境界条件の場合の解（分子解）も Hankel 行列式を用いて与える．

1　はじめに

直交多項式やその一般化と可積分系との関係がよく知られている [2]．特にモニック直交多項式と非自励離散戸田格子 [6]，モニック対称直交多項式と非自励離散 Lotka–Volterra 方程式 [7]，R_{II} 多項式と R_{II} 格子 [8] との関係が行列の固有値計算アルゴリズムなどへの応用上重要である．これらの例において，離散可積分系は直交多項式のスペクトル変換の両立条件として現れ，この関係を通じて，特に境界条件が有限格子の場合には初期値問題の解を Hankel 行列式を用いて与えることができる [3].

本稿では，モニック対称 R_{II} 多項式のスペクトル変換を考えることで，有名な Toda–Volterra 対応（非自励離散戸田格子と非自励離散 Lotka–Volterra 方程式の間の Miura 変換）[6] のある一般化が得られたので [4]，この結果について簡潔にまとめ，報告する．対称 R_{II} 多項式に付随する離散可積分系については既に先行研究 [5] が存在していたが，今回得られたものは，従属変数の選び方を工夫することで，より対称性が高く簡潔な表示式（非自励離散 mKdV 方程式）となっている．

2　モニック R_{II} 多項式のスペクトル変換とモニック型 R_{II} 格子

モニック R_{II} 多項式 $\{\varphi_n^{k,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は次の三項間漸化式で定義される：

$$\begin{aligned}
&\varphi_{-1}^{k,t}(x) := 0, \qquad \varphi_0^{k,t}(x) := 1,\\
&\varphi_{n+1}^{k,t}(x) := ((1+\beta_n^{k,t})x - \alpha_n^{k,t})\varphi_n^{k,t}(x) - \beta_n^{k,t}(x+\gamma_{k+t+2n-2})(x+\gamma_{k+t+2n-1})\varphi_{n-1}^{k,t}(x),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0,1,2,\dots.
\end{aligned}$$

ここで，$k,t \in \mathbb{Z}$ は離散時間（時間発展をすぐ後で導入する），$\alpha_n^{k,t} \in \mathbb{R}$，$\beta_n^{k,t}, \gamma_{k+t+n} \in \mathbb{R}-\{0\}$ である．定義より，$\varphi_n^{k,t}(x)$ は n 次のモニック多項式である．非零の定数 $h_0^{k,t}, h_1^{k,t}$ を固定すれば，Favard 型の定理 [1] により次の直交関係式を満たす線型汎関数 $\mathscr{L}^{k,t}$ が唯一つ定まる：

$$\mathscr{L}^{k,t}\left[\frac{x^m\varphi_n^{k,t}(x)}{\prod_{j=0}^{2n-1}(x+\gamma_{k+t+j})}\right] = h_n^{k,t}\delta_{m,n}, \qquad n = 0,1,2,\dots, \qquad m = 0,1,\dots,n. \tag{2.1}$$

ここで，$h_n^{k,t}, n = 2,3,\dots$ は非零の定数である．

モニック R_{II} 多項式の時間発展を次のスペクトル変換で導入する．

- k-方向：

$$(1+q_n^{k,t})x\varphi_n^{k+1,t}(x) = \varphi_{n+1}^{k,t}(x) + q_n^{k,t}(x+\gamma_{k+t+2n})\varphi_n^{k,t}(x), \tag{2.2a}$$

$$(1+e_n^{k,t})\varphi_n^{k,t}(x) = \varphi_n^{k+1,t}(x) + e_n^{k,t}(x+\gamma_{k+t+2n-1})\varphi_{n-1}^{k+1,t}(x). \tag{2.2b}$$

- t-方向：

$$(1+\tilde{q}_n^{k,t})(x+s^{(t)})\varphi_n^{k,t+1}(x) = \varphi_{n+1}^{k,t}(x) + \tilde{q}_n^{k,t}(x+\gamma_{k+t+2n})\varphi_n^{k,t}(x), \tag{2.2c}$$

$$(1+\tilde{e}_n^{k,t})\varphi_n^{k,t}(x) = \varphi_n^{k,t+1}(x) + \tilde{e}_n^{k,t}(x+\gamma_{k+t+2n-1})\varphi_{n-1}^{k,t+1}(x). \tag{2.2d}$$

ここで，

$$q_n^{k,t} := -(\gamma_{k+t+2n})^{-1}\frac{\varphi_{n+1}^{k,t}(0)}{\varphi_n^{k,t}(0)}, \quad \tilde{q}_n^{k,t} := -(\gamma_{k+t+2n}-s^{(t)})^{-1}\frac{\varphi_{n+1}^{k,t}(-s^{(t)})}{\varphi_n^{k,t}(-s^{(t)})},$$

および $e_n^{k,t}, \tilde{e}_n^{k,t}$ はすぐ後にあるモニック型 $\mathrm{R_{II}}$ 格子の関係式 (2.4) から定まる変数であり，これで $\varphi_n^{k+1,t}(x), \varphi_n^{k,t+1}(x)$ はともに n 次のモニック多項式になる．k-方向と t-方向の違いはパラメータ $s^{(t)} \in \mathbb{R}-\{0\}$ の有無のみである．線型汎関数 $\mathscr{L}^{k,t}$ の時間発展を，有理関数 $\rho(x)$ に対して

$$\mathscr{L}^{k+1,t}[\rho(x)] := \mathscr{L}^{k,t}\left[\frac{x}{x+\gamma_{k+t}}\rho(x)\right], \qquad \mathscr{L}^{k,t+1}[\rho(x)] := \mathscr{L}^{k,t}\left[\frac{x+s^{(t)}}{x+\gamma_{k+t}}\rho(x)\right] \tag{2.3}$$

で定めれば，$\{\varphi_n^{k+1,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n^{k,t+1}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ はまた直交関係式 (2.1) を満たすモニック $\mathrm{R_{II}}$ 多項式となることが確認できる．スペクトル変換 (2.2) の両立条件として，半無限モニック型 $\mathrm{R_{II}}$ 格子の時間発展方程式が得られる：

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{k,t} &= \gamma_{k+t+2n}q_n^{k,t} + \gamma_{k+t+2n-1}e_n^{k,t}\frac{1+q_n^{k,t}}{1+q_{n-1}^{k,t}} \\
&= \gamma_{k+t+2n-1}q_n^{k-1,t}\frac{1+e_{n+1}^{k-1,t}}{1+e_n^{k-1,t}} + \gamma_{k+t+2n}e_{n+1}^{k-1,t} \\
&= \gamma_{k+t+2n}\tilde{q}_n^{k,t} + \gamma_{k+t+2n-1}\tilde{e}_n^{k,t}\frac{1+\tilde{q}_n^{k,t}}{1+\tilde{q}_{n-1}^{k,t}} - s^{(t)}(1+\tilde{q}_n^{k,t})(1+\tilde{e}_n^{k,t}) \\
&= \gamma_{k+t+2n-1}\tilde{q}_n^{k,t-1}\frac{1+\tilde{e}_{n+1}^{k,t-1}}{1+\tilde{e}_n^{k,t-1}} + \gamma_{k+t+2n}\tilde{e}_{n+1}^{k,t-1} - s^{(t-1)}(1+\tilde{q}_n^{k,t-1})(1+\tilde{e}_{n+1}^{k,t-1}),
\end{aligned} \tag{2.4a}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n^{k,t} &= q_{n-1}^{k,t}e_n^{k,t}\frac{1+q_n^{k,t}}{1+q_{n-1}^{k,t}} = q_n^{k-1,t}e_n^{k-1,t}\frac{1+e_{n+1}^{k-1,t}}{1+e_n^{k-1,t}} \\
&= \tilde{q}_{n-1}^{k,t}\tilde{e}_n^{k,t}\frac{1+\tilde{q}_n^{k,t}}{1+\tilde{q}_{n-1}^{k,t}} = \tilde{q}_n^{k,t-1}\tilde{e}_n^{k,t-1}\frac{1+\tilde{e}_{n+1}^{k,t-1}}{1+\tilde{e}_n^{k,t-1}},
\end{aligned} \tag{2.4b}$$

$$e_0^{k,t} = \tilde{e}_0^{k,t} = 0 \qquad \text{for all } k \text{ and } t. \tag{2.4c}$$

図 1 はモニック $\mathrm{R_{II}}$ 多項式のスペクトル変換 (2.2) とモニック型 $\mathrm{R_{II}}$ 格子 (2.4) の変数の関係を図示したものである．

線型汎関数 $\mathscr{L}^{0,t}$ のモーメントを

$$\mu_{m,l}^{(t)} := \mathscr{L}^{0,t}\left[\frac{x^m}{\prod_{j=0}^{l-1}(x+\gamma_{t+j})}\right]$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{\varphi_n^{k+1,t-1}(x)\}_{n=0}^{\infty} \arrow[r, shift left, "\{\tilde{q}_n^{k+1,t-1}\}_{n=0}^{\infty},\ s^{(t-1)}"] \arrow[d, shift left, "\{e_n^{k,t-1}\}_{n=1}^{\infty}"] & \{\varphi_n^{k+1,t}(x)\}_{n=0}^{\infty} \arrow[l, shift left, "\{\tilde{e}_n^{k+1,t-1}\}_{n=1}^{\infty}"] \arrow[r, shift left, "\{\tilde{q}_n^{k+1,t}\}_{n=0}^{\infty},\ s^{(t)}"] \arrow[d, shift left, "\{e_n^{k,t}\}_{n=1}^{\infty}"] & \{\varphi_n^{k+1,t+1}(x)\}_{n=0}^{\infty} \arrow[l, shift left, "\{\tilde{e}_n^{k+1,t}\}_{n=1}^{\infty}"] \arrow[d, shift left, "\{e_n^{k,t+1}\}_{n=1}^{\infty}"] & \\
 & \{\varphi_n^{k,t-1}(x)\}_{n=0}^{\infty} \arrow[r, shift left, "\{\tilde{q}_n^{k,t-1}\}_{n=0}^{\infty},\ s^{(t-1)}"] \arrow[d, shift left, "\{e_n^{k-1,t-1}\}_{n=1}^{\infty}"] \arrow[u, shift left, "\{q_n^{k,t-1}\}_{n=0}^{\infty}"] & \{\varphi_n^{k,t}(x)\}_{n=0}^{\infty} \arrow[l, shift left, "\{\tilde{e}_n^{k,t-1}\}_{n=1}^{\infty}"] \arrow[r, shift left, "\{\tilde{q}_n^{k,t}\}_{n=0}^{\infty},\ s^{(t)}"] \arrow[d, shift left, "\{e_n^{k-1,t}\}_{n=1}^{\infty}"] \arrow[u, shift left, "\{q_n^{k,t}\}_{n=0}^{\infty}"] & \{\varphi_n^{k,t+1}(x)\}_{n=0}^{\infty} \arrow[l, shift left, "\{\tilde{e}_n^{k,t}\}_{n=1}^{\infty}"] \arrow[d, shift left, "\{e_n^{k-1,t+1}\}_{n=1}^{\infty}"] \arrow[u, shift left, "\{q_n^{k,t+1}\}_{n=0}^{\infty}"] & \\
 & \{\varphi_n^{k-1,t-1}(x)\}_{n=0}^{\infty} \arrow[r, shift left, "\{\tilde{q}_n^{k-1,t-1}\}_{n=0}^{\infty},\ s^{(t-1)}"] \arrow[u, shift left, "\{q_n^{k-1,t-1}\}_{n=0}^{\infty}"] & \{\varphi_n^{k-1,t}(x)\}_{n=0}^{\infty} \arrow[l, shift left, "\{\tilde{e}_n^{k-1,t-1}\}_{n=1}^{\infty}"] \arrow[r, shift left, "\{\tilde{q}_n^{k-1,t}\}_{n=0}^{\infty},\ s^{(t)}"] \arrow[u, shift left, "\{q_n^{k-1,t}\}_{n=0}^{\infty}"] & \{\varphi_n^{k-1,t+1}(x)\}_{n=0}^{\infty} \arrow[l, shift left, "\{\tilde{e}_n^{k-1,t}\}_{n=1}^{\infty}"] \arrow[u, shift left, "\{q_n^{k-1,t+1}\}_{n=0}^{\infty}"] &
\end{tikzcd}
$$

図 1: モニック $\mathrm{R_{II}}$ 多項式のスペクトル変換の鎖.

で定める．線型汎関数の時間発展 (2.3) より，関係式

$$
\mathscr{L}^{k,t}\left[\frac{x^m}{\prod_{j=0}^{l-1}(x+\gamma_{k+t+j})}\right] = \mathscr{L}^{0,t}\left[\frac{x^{k+m}}{\prod_{j=0}^{k+l-1}(x+\gamma_{t+j})}\right] = \mu_{k+m,k+l}^{(t)}
$$

と分散関係式

$$
\mu_{m,l}^{(t+1)} = \mu_{m+1,l+1}^{(t)} + s^{(t)}\mu_{m,l+1}^{(t)}, \qquad \mu_{m,l}^{(t)} = \mu_{m+1,l+1}^{(t)} + \gamma_{t+l}\mu_{m,l+1}^{(t)} \tag{2.5}
$$

が成り立つ．モーメントを用いると，モニック $\mathrm{R_{II}}$ 多項式 $\{\varphi_n^{k,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ の行列式表示が

$$
\varphi_n^{k,t}(x) = \frac{1}{\tau_n^{k,2n,t}}\begin{vmatrix}
\mu_{k,k+2n}^{(t)} & \mu_{k+1,k+2n}^{(t)} & \cdots & \mu_{k+n-1,k+2n}^{(t)} & \mu_{k+n,k+2n}^{(t)} \\
\mu_{k+1,k+2n}^{(t)} & \mu_{k+2,k+2n}^{(t)} & \cdots & \mu_{k+n,k+2n}^{(t)} & \mu_{k+n+1,k+2n}^{(t)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mu_{k+n-1,k+2n}^{(t)} & \mu_{k+n,k+2n}^{(t)} & \cdots & \mu_{k+2n-2,k+2n}^{(t)} & \mu_{k+2n-1,k+2n}^{(t)} \\
1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n
\end{vmatrix} \tag{2.6}
$$

で与えられる．ここで，$\tau_n^{k,l,t}$ は n 次の Hankel 行列式である：

$$
\tau_{-1}^{k,l,t} := 0, \qquad \tau_0^{k,l,t} := 1, \qquad \tau_n^{k,l,t} := |\mu_{k+i+j,k+l}^{(t)}|_{0\le i,j\le n-1}, \qquad n = 1,2,3,\dots.
$$

実際，(2.6) の右辺は n 次のモニック多項式であり，線型汎関数の線型性から直交関係式 (2.1) の成立を確かめることは容易である．行列式表示 (2.6)，分散関係式 (2.5)，Plücker 関係式を用いることで，モニック型 $\mathrm{R_{II}}$ 格子の Hankel 行列式解が得られる：

$$
q_n^{k,t} = (\gamma_{k+t+2n})^{-1}\frac{\tau_n^{k,2n,t}\tau_{n+1}^{k+1,2n+1,t}}{\tau_{n+1}^{k,2n+2,t}\tau_n^{k+1,2n-1,t}}, \qquad e_n^{k,t} = \gamma_{k+t+2n}\frac{\tau_{n+1}^{k,2n+1,t}\tau_{n-1}^{k+1,2n-2,t}}{\tau_n^{k,2n-1,t}\tau_n^{k+1,2n,t}},
$$

$$
\tilde{q}_n^{k,t} = (\gamma_{k+t+2n} - s^{(t)})^{-1}\frac{\tau_n^{k,2n,t}\tau_{n+1}^{k,2n+1,t+1}}{\tau_{n+1}^{k,2n+2,t}\tau_n^{k,2n-1,t+1}}, \quad \tilde{e}_n^{k,t} = (\gamma_{k+t+2n} - s^{(t)})\frac{\tau_{n+1}^{k,2n+1,t}\tau_{n-1}^{k,2n-2,t+1}}{\tau_n^{k,2n-1,t}\tau_n^{k,2n,t+1}}.
$$

つまり，$\mu_{m,l}^{(t)}$ を分散関係式 (2.5) を満たす任意関数とすれば，これを成分とする Hankel 行列式によってモニック型 $\mathrm{R_{II}}$ 格子の解は与えられる．このように Hankel 行列式解が現れるのは，$\mathrm{R_{II}}$ 格子が離散 2 次元戸田階層の簡約で得られることの反映である [10].

3　対称 $\mathrm{R_{II}}$ 多項式のスペクトル変換と非自励離散 mKdV 方程式

次で定義される多項式列 $\{\varsigma_n^{k,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を考えよう：

$$\varsigma_{2n+i}^{k,t}(x) := x^i \varphi_n^{k+i,t}(x^2), \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \qquad i = 0, 1.$$

$\varsigma_n^{k,t}(x)$ は対称性と呼ばれる条件

$$\varsigma_n^{k,t}(-x) = (-1)^n \varsigma_n^{k,t}(x)$$

を満たす n 次のモニック多項式である．線型汎関数 $\mathscr{S}^{k,t}$ を

$$\mathscr{S}^{k,t}\left[\frac{x^{2m}}{\prod_{j=0}^{l-1}(x^2+\gamma_{k+t+j})}\right] := \mathscr{L}^{k,t}\left[\frac{x^m}{\prod_{j=0}^{l-1}(x+\gamma_{k+t+j})}\right],$$
$$\mathscr{S}^{k,t}\left[\frac{x^{2m+1}}{\prod_{j=0}^{l-1}(x^2+\gamma_{k+t+j})}\right] := 0, \qquad l = 0, 1, 2, \dots, \qquad m = 0, 1, \dots, l.$$

によって定める．モニック $\mathrm{R_{II}}$ 多項式 $\{\varphi_n^{k,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ の k-方向のスペクトル変換 (2.2a), (2.2b) より，$\{\varsigma_n^{k,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が満たす三項間漸化式

$$\varsigma_{2n+2}^{k,t}(x) = (1+q_n^{k,t})x\varsigma_{2n+1}^{k,t}(x) - q_n^{k,t}(x^2+\gamma_{k+t+2n})\varsigma_{2n}^{k,t}(x), \tag{3.1a}$$
$$\varsigma_{2n+1}^{k,t}(x) = (1+e_n^{k,t})x\varsigma_{2n}^{k,t}(x) - e_n^{k,t}(x^2+\gamma_{k+t+2n-1})\varsigma_{2n-1}^{k,t}(x), \tag{3.1b}$$

が得られ，モニック $\mathrm{R_{II}}$ 多項式が満たすべき直交関係式 (2.1) も線型汎関数 $\mathscr{S}^{k,t}$ について確かめられ，$\{\varsigma_n^{k,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ はモニック対称 $\mathrm{R_{II}}$ 多項式となっている．さらに，モニック $\mathrm{R_{II}}$ 多項式 $\{\varphi_n^{k,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ の t-方向のスペクトル変換 (2.2c), (2.2d) から，モニック対称 $\mathrm{R_{II}}$ 多項式 $\{\varsigma_n^{k,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ の t-方向のスペクトル変換

$$(1+\tilde{q}_n^{k,t})(x^2+s^{(t)})\varsigma_{2n}^{k,t+1}(x) = \varsigma_{2n+2}^{k,t}(x) + \tilde{q}_n^{k,t}(x^2+\gamma_{k+t+2n})\varsigma_{2n}^{k,t}(x), \tag{3.2a}$$
$$(1+\tilde{q}_n^{k+1,t})(x^2+s^{(t)})\varsigma_{2n+1}^{k,t+1}(x) = \varsigma_{2n+3}^{k,t}(x) + \tilde{q}_n^{k+1,t}(x^2+\gamma_{k+t+2n+1})\varsigma_{2n+1}^{k,t}(x), \tag{3.2b}$$
$$(1+\tilde{e}_n^{k,t})\varsigma_{2n}^{k,t}(x) = \varsigma_{2n}^{k,t+1}(x) + \tilde{e}_n^{k,t}(x^2+\gamma_{k+t+2n-1})\varsigma_{2n-2}^{k,t+1}(x), \tag{3.2c}$$
$$(1+\tilde{e}_n^{k+1,t})\varsigma_{2n+1}^{k,t}(x) = \varsigma_{2n+1}^{k,t+1}(x) + \tilde{e}_n^{k+1,t}(x^2+\gamma_{k+t+2n})\varsigma_{2n-1}^{k,t+1}(x) \tag{3.2d}$$

が得られる．

関係式 (3.1), (3.2) から，次の関係式を満たす $v_n^{k,t}$ の存在が言える：

$$\begin{aligned}&(\gamma_{k+t+n}+v_n^{k,t})(x^2+s^{(t)})\varsigma_n^{k,t+1}(x)\\&\quad = (\gamma_{k+t+n}-s^{(t)})x\varsigma_{n+1}^{k,t}(x) + (s^{(t)}+v_n^{k,t})(x^2+\gamma_{k+t+n})\varsigma_n^{k,t}(x),\end{aligned} \tag{3.3a}$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{k+t+n}(s^{(t)}+v_n^{k,t})\varsigma_n^{k,t}(x)\\
&\qquad = s^{(t)}(\gamma_{k+t+n}+v_n^{k,t})\varsigma_n^{k,t+1}(x)+(\gamma_{k+t+n}-s^{(t)})v_n^{k,t}x\varsigma_{n-1}^{k,t+1}(x).
\end{aligned}
\tag{3.3b}
$$

ここで，(3.3) から

$$
\begin{aligned}
\varsigma_{n+1}^{k,t}(x) &= \left(1+(\gamma_{k+t+n-1})^{-1}v_n^{k,t}\frac{1+(s^{(t)})^{-1}v_{n-1}^{k,t}}{1+(\gamma_{k+t+n-1})^{-1}v_{n-1}^{k,t}}\right)x\varsigma_n^{k,t}(x)\\
&\quad -(\gamma_{k+t+n-1})^{-1}v_n^{k,t}\frac{1+(s^{(t)})^{-1}v_{n-1}^{k,t}}{1+(\gamma_{k+t+n-1})^{-1}v_{n-1}^{k,t}}(x^2+\gamma_{k+t+n-1})\varsigma_{n-1}^{k,t}(x)\\
&= \left(1+(\gamma_{k+t+n-1})^{-1}v_n^{k,t-1}\frac{1+(s^{(t-1)})^{-1}v_{n+1}^{k,t-1}}{1+(\gamma_{k+t+n})^{-1}v_{n+1}^{k,t-1}}\right)x\varsigma_n^{k,t}(x)\\
&\quad -(\gamma_{k+t+n-1})^{-1}v_n^{k,t-1}\frac{1+(s^{(t-1)})^{-1}v_{n+1}^{k,t-1}}{1+(\gamma_{k+t+n})^{-1}v_{n+1}^{k,t-1}}(x^2+\gamma_{k+t+n-1})\varsigma_{n-1}^{k,t}(x).
\end{aligned}
$$

が得られるから，$v_n^{k,t}$ が満たすべき両立条件は

$$
v_n^{k,t}\frac{1+(s^{(t)})^{-1}v_{n-1}^{k,t}}{1+(\gamma_{k+t+n-1})^{-1}v_{n-1}^{k,t}} = v_n^{k,t-1}\frac{1+(s^{(t-1)})^{-1}v_{n+1}^{k,t-1}}{1+(\gamma_{k+t+n})^{-1}v_{n+1}^{k,t-1}},
\tag{3.4a}
$$

$$
v_0^{k,t}=0 \qquad \text{for all } k \text{ and } t,
\tag{3.4b}
$$

である．これは運搬車付き箱玉系の時間発展方程式を導出する際に用いられた離散 mKdV 方程式 [9] の非自励版である．なお，$\gamma_{k+t+n}\to\infty$ の極限をとれば，非自励離散 mKdV 方程式 (3.4) は非自励離散 Lotka–Volterra 方程式

$$
v_n^{k,t}(1+(s^{(t)})^{-1}v_{n-1}^{k,t}) = v_n^{k,t-1}(1+(s^{(t-1)})^{-1}v_{n+1}^{k,t-1})
$$

へと簡約される．

モニック型 $\mathrm{R_{II}}$ 格子 (2.4) と非自励離散 mKdV 方程式 (3.4) の間の Miura 変換が，(3.1), (3.2), (3.3) から次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
q_n^{k,t} &= (\gamma_{k+t+2n})^{-1}v_{2n+1}^{k,t}\frac{1+(s^{(t)})^{-1}v_{2n}^{k,t}}{1+(\gamma_{k+t+2n})^{-1}v_{2n}^{k,t}} = (\gamma_{k+t+2n})^{-1}v_{2n+1}^{k,t-1}\frac{1+(s^{(t-1)})^{-1}v_{2n+2}^{k,t-1}}{1+(\gamma_{k+t+2n+1})^{-1}v_{2n+2}^{k,t-1}},\\
e_n^{k,t} &= (\gamma_{k+t+2n-1})^{-1}v_{2n}^{k,t}\frac{1+(s^{(t)})^{-1}v_{2n-1}^{k,t}}{1+(\gamma_{k+t+2n-1})^{-1}v_{2n-1}^{k,t}} = (\gamma_{k+t+2n-1})^{-1}v_{2n}^{k,t-1}\frac{1+(s^{(t-1)})^{-1}v_{2n+1}^{k,t-1}}{1+(\gamma_{k+t+2n})^{-1}v_{2n+1}^{k,t-1}},\\
\tilde{q}_n^{k,t} &= (\gamma_{k+t+2n}-s^{(t)})^{-1}s^{(t)}(1+(s^{(t)})^{-1}v_{2n+1}^{k,t})(1+(s^{(t)})^{-1}v_{2n}^{k,t})\\
&= (\gamma_{k+t+2n}-s^{(t)})^{-1}s^{(t)}(1+(s^{(t)})^{-1}v_{2n+1}^{k-1,t})(1+(s^{(t)})^{-1}v_{2n+2}^{k-1,t}),\\
\tilde{e}_n^{k,t} &= \frac{(\gamma_{k+t+2n}-s^{(t)})v_{2n}^{k,t}v_{2n-1}^{k,t}}{s^{(t)}\gamma_{k+t+2n-1}\gamma_{k+t+2n}(1+(\gamma_{k+t+2n})^{-1}v_{2n}^{k,t})(1+(\gamma_{k+t+2n-1})^{-1}v_{2n-1}^{k,t})}\\
&= \frac{(\gamma_{k+t+2n}-s^{(t)})v_{2n}^{k-1,t}v_{2n+1}^{k-1,t}}{s^{(t)}\gamma_{k+t+2n-1}\gamma_{k+t+2n}(1+(\gamma_{k+t+2n-1})^{-1}v_{2n}^{k-1,t})(1+(\gamma_{k+t+2n})^{-1}v_{2n+1}^{k-1,t})}.
\end{aligned}
$$

さらに (3.3) から，

$$
\frac{1+(s^{(t)})^{-1}v_{2n}^{k,t}}{1+(\gamma_{k+t+2n})^{-1}v_{2n}^{k,t}} = \frac{\varphi_n^{k,t+1}(0)}{\varphi_n^{k,t}(0)},
$$

$$1+\left(s^{(t)}\right)^{-1}v_{2n-1}^{k,t}=\left(-s^{(t)}\right)^{-1}\frac{\varphi_n^{k,t}(-s^{(t)})}{\varphi_{n-1}^{k+1,t}(-s^{(t)})},$$

$$1+\left(\gamma_{k+t+2n-1}\right)^{-1}v_{2n-1}^{k,t}=\left(-\gamma_{k+t+2n-1}\right)^{-1}\frac{\varphi_n^{k,t}(-\gamma_{k+t+2n-1})}{\varphi_{n-1}^{k+1,t+1}(-\gamma_{k+t+2n-1})}$$

を得る．これより，非自励離散 mKdV 方程式 (3.4) の Hankel 行列式解が

$$v_{2n+1}^{k,t}=\gamma_{k+t+2n}q_n^{k,t}\frac{\varphi_n^{k,t}(0)}{\varphi_n^{k,t+1}(0)}=\frac{\tau_n^{k,2n,t+1}\tau_{n+1}^{k+1,2n+1,t}}{\tau_{n+1}^{k,2n+2,t}\tau_n^{k+1,2n-1,t+1}},$$

$$v_{2n}^{k,t}=s^{(t)}e_n^{k,t}\frac{\varphi_{n-1}^{k+1,t}(-s^{(t)})}{\varphi_n^{k,t}(-s^{(t)})}\frac{\varphi_n^{k,t}(-\gamma_{k+t+2n-1})}{\varphi_{n-1}^{k+1,t+1}(-\gamma_{k+t+2n-1})}=s^{(t)}\gamma_{k+t+2n}\frac{\tau_{n+1}^{k,2n+1,t}\tau_{n-1}^{k+1,2n-2,t+1}}{\tau_n^{k,2n-1,t+1}\tau_n^{k+1,2n,t}}$$

で与えられる．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 11J04105, 25400110 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] M. E. H. Ismail and D. R. Masson, *Generalized orthogonality and continued fractions*, J. Approx. Theory **83** (1995), 1–40.

[2] 前田一貴, 三木啓司, 辻本諭, 直交多項式理論からみえてくる可積分系, 日本応用数理学会論文誌 **23** (2013), 341–380.

[3] K. Maeda and S. Tsujimoto, *A generalized eigenvalue algorithm for tridiagonal matrix pencils based on a nonautonomous discrete integrable system*, arXiv:1303.1035 [math.NA].

[4] K. Maeda and S. Tsujimoto, *Direct connection between the R_{II} chain and the nonautonomous discrete modified KdV lattice*, SIGMA **9** (2013), 073.

[5] V. P. Spiridonov, S. Tsujimoto and A. S. Zhedanov, *Integrable discrete time chains for the Frobenius-Stickelberger-Thiele polynomials*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), 139–165.

[6] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials*, Methods Appl. Anal. **2** (1995), 369–398.

[7] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete-time Volterra chain and classical orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), 8727–8737.

[8] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Spectral transformation chains and some new biorthogonal rational functions*, Comm. Math. Phys. **210** (2000), 49–83.

[9] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), L733–L739.

[10] S. Tsujimoto, *Determinant solutions of the nonautonomous discrete Toda equation associated with the deautonomized discrete KP hierarchy*, J. Syst. Sci. Complex. **23** (2010), 153–176.