質量を交換しながら相互作用する2粒子

角畠, 浩
富山大学工学部

https://doi.org/10.15017/1448851

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 25AO-S2 (6), pp.35-40, 2014-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.25AO-S2
「非線形波動研究の拡がり」（研究代表者　増田　哲）

Reports of RIAM Symposium No.25AO-S2

The breadth and depth of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2013

Article No. 06 (pp. 35 - 40)

質量を交換しながら相互作用する２粒子

角畠　浩（KAKUHATA Hiroshi）

（Received 8 January 2014; accepted 3 March 2014）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2014

質量を交換しながら相互作用する２粒子

富山大・工　角畠　浩 (Hiroshi Kakuhata)
Faculty of Engineering, University of Toyama

概要

２ソリトン相互作用に対応する質量交換型の２体力学系を考察した。質量の時間発展を拘束条件として閉じた力学系を構成した。

1　はじめに

ソリトンは衝突によっても壊れず，その個性を失わない粒子のような波動である [1]。これまでに，ソリトン相互作用に対応するソリトン粒子の２粒子系を構築することを目指してきた [2, 3]。しかし，ソリトンの相互作用は並進不変であるにもかかわらず，$\boldsymbol{r} = (X, Y, Z)$ をストリングの位置ベクトル，τ を時間，σ をストリングに沿う弧長に対応するパラメータとする連立非分散方程式

$$\partial_\tau^2 \boldsymbol{r} - \partial_\sigma^2 \boldsymbol{r} = (\partial_\tau \boldsymbol{r} + \partial_\sigma \boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}), \tag{1}$$

の２ソリトン解 [4, 5] を用いてソリトンの軌道を求め，その加速度を計算すると，質量を一定とする単純な粒子モデルでは，ソリトン粒子の相互作用は並進不変性を破り，全運動量を保存しないように見える。従来のソリトン粒子の相互作用ではこの点が十分考慮されていないようである [6] 。全運動量が保存されるためにはソリトン粒子間で運動量を運ぶ「もの」が必要である。連立非分散方程式に限らず KdV 方程式など多くのソリトンの相互作用でもソリトンの振幅が変化する様子が観察される。ソリトン相互作用において振幅を質量と見なせば，ソリトン粒子の２体系は可変質量の粒子に対する２体問題になる。しかし質量を交換する粒子系の相互作用はあまり調べられていないようである。以前に，連立非分散方程式のソリトン衝突の挙動を念頭におきながらも，このソリトン相互作用に直接対応する粒子系のモデルを構成するのではなく，閉じた系ではないが質量を交換しながら相互作用する２粒子系の出来るだけ簡単で解析解を持つ toy model を構成した [7]。

以下では，可変質量の２体系を閉じた力学系として定式化することを述べる。

2　質量一定の２粒子系

本節では，質量が一定の sech^2 型のポテンシャルを持つ簡単な２粒子系でどのような相互作用が起こるのかを見る。初期条件として，質量 m_1，m_2 の粒子がそれぞれ速度 v と $-v$ で衝突する場合を考える。この系はラグランジアン

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{q_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q_2}^2 - \frac{g}{2} \mathrm{sech}^2 r \tag{2}$$

で与えられる。ただし，q_n は各粒子の座標で，記号 "˙" は時間 t による微分を表し，r は相対座標

$$r = q_2 - q_1$$

である。よく知られているように，重心と相対座標に対する運動方程式は完全に分離し，

$$\begin{aligned} &M\ddot{Q} = 0, \\ &\mu\ddot{r} = g\ \mathrm{sech}^2 r \tanh r \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられ，重心の運動方程式は自由粒子の運動方程式になる。ここで全質量 M，重心座標 Q，換算質量 μ はそれぞれ

$$\begin{aligned} &M = m_1 + m_2, \\ &Q = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, \\ &\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{aligned} \tag{4}$$

である。相対座標 r に対する運動方程式の解には３つのタイプがあり，運動エネルギーとポテンシャルの高さ $g/2$ （結合定数）の比であるパラメータ

$$a = \frac{g}{4\mu v^2}$$

により分類される。$a > 1$ のときは $g > 0$ であり，粒子が跳ね返る解

$$r = \sinh^{-1}(\sqrt{a-1}\cosh 2vt), \tag{5}$$

が存在し，$a < 1$ では通過型の解で

$$r = \sinh^{-1}(\sqrt{1-a}\sinh 2vt), \tag{6}$$

である。このときには $g < 0$（引力）の場合を含む。この他に $a = 1$ の無限の時間をかけて互いに近づく解

$$r = \sinh^{-1} e^{2vt}, \tag{7}$$

がある。次節で述べるように，非分散連立方程式では，ソリトン間に斥力が働く場合があり，特に解 (5) を重視する。

3　質量を交換する粒子のモデル

まず可変質量で並進不変性を持つ２ソリトン粒子のモデルとして

$$L = \tfrac{1}{2}m_1\dot{q_1}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{q_2}^2 - U(r) \tag{8}$$

で与えられるラグランジアンをまず考える。ここで，$U(r)$ はポテンシャルであるが，通常の２体系とは異なり，$m_n (n = 1, 2)$ は定数ではない。ただし，全質量 $M = m_1 + m_2$ は定数とし，質量の差 $m = m_2 - m_1$ が定数ではないとする。

実際に系の挙動を知るため，連立非分散方程式のループソリトンの衝突を参考にし，m の挙動を考える。連立非分散方程式のソリトン相互作用においては，２つのソリトンが位相速度 v と $-v$ で正面衝突するとき，衝突の仕方によって３つのパターン：

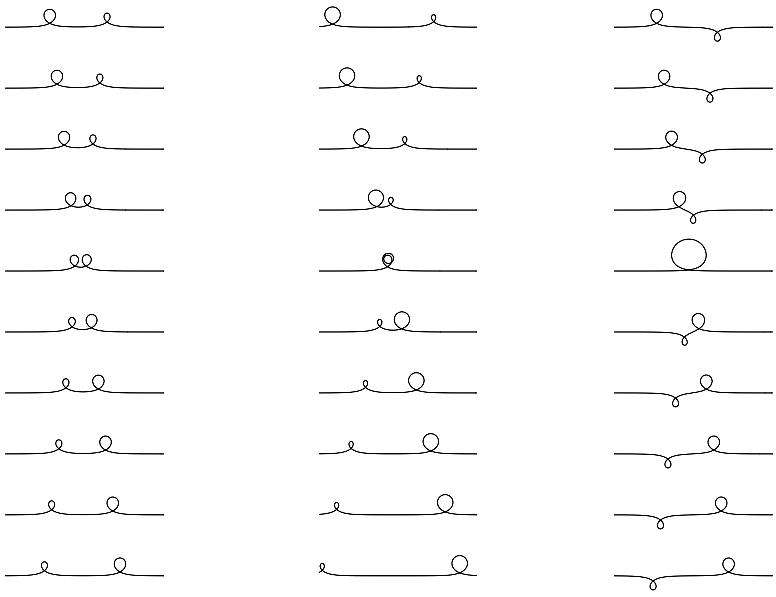

図 1　　　$v = 0.12,$　　　$v = 0.24,$　　　$v = 0.12$

1. 正（負）の振幅同士の衝突のときは，小さい相対速度ではソリトン同士が重ならず弾くように衝突し，
2. 大きい相対速度では小さいループが大きいループの中を回る。
3. 正と負の振幅の衝突のときには，小さいループが一時的に消え，大きいループがさらに大きくなる。

がある。これと同様の振る舞いをするためには，質量差が相対距離の関数，すなわち，$m = m(r)$ とすると，跳ね返り相互作用では質量が元に戻ってしまうので， $m = m(t)$ あるいは $m = m(\dot{r})$ でなければならない。ソリトン相互作用で弾く場合の様子（図 1 の左の図）から，質量の漸近的振る舞いは

$$
\begin{aligned}
&m_1 \to \mu_1,\ m_2 \to \mu_2 \text{ as } t \to -\infty, \\
&m_1 \to \mu_2,\ m_2 \to \mu_1 \text{ as } t \to \infty,
\end{aligned}
$$

であると考えられる。ここで μ_1 と μ_2 は衝突前（$t \to -\infty$）のそれぞれの粒子の質量で定数である。ただし，図 1 のソリトンの相互作用にあわせて $\mu_1 > \mu_2$ とする。すると，最もナイーブには

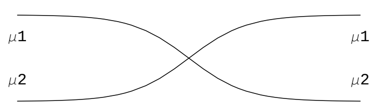

図 2　behavior of mass

$\dot{M} = 0$ を満足しながら，個々の質量が

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m_1(t) = \frac{M - m(t)}{2}, \\
m_2 &= m_2(t) = \frac{M + m(t)}{2},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

で与えられなければならない。すると，質量差 m は図 2 の様に

$$m \sim \tanh 2vt, \tag{10}$$

と振る舞うであろうと予想される。

さて，可変質量の 2 体系に対するラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q_2}^2 - U(r) \tag{11}$$

で与えたとき，m の関数形が不明では運動方程式を解くことはできない。しかし，m の関数形を $m \sim \tanh 2vt$ と固定してしまえば，一定質量の場合の 3 つの相互作用を再現できない。そこで，解 (5) の導関数 $\dot{r}$ が漸近的に $\tanh 2vt$ であることに着目し，拘束条件，$m = \alpha\dot{r}$ をおく（α は定数）。しかし，この拘束条件は non-holonomic なので単純に Lagrange 乗数としてラグランジアンに加えることは出来ない。また，拘束条件により運動項が非線形となり，そのような非線形常微分方程式を解くことは一般に困難である。従って，以下では前節の一定質量の解 (5) ∼ (7) を解として許容するポテンシャル $U(r)$ を求める。系を閉じた力学系とするためラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{q_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q_2}^2 - U(r) - V(m) \tag{12}$$

で与えられる系を考察する。ここで $U(r)$ はソリトン粒子間のポテンシャル，質量 m_1 と m_2 は全質量 M と質量差 m を用いて

$$m_1 = \frac{M-m}{2}, m_2 = \frac{M+m}{2} \tag{13}$$

と与えられ，$V(m)$ は

$$V(m) = \frac{h_1}{2}m^2 - \frac{h_2}{4}m^4 \tag{14}$$

とするが， m を乗数のように扱うのでこれをポテンシャルとは考えない。なお，h_1 と h_2 は初期条件から決める。運動方程式は

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(m_1\dot{q_1}) = \frac{1}{2}(M-m)\ddot{q_1} - \frac{\dot{m}\dot{r}}{2} = \frac{dU}{dr}, \\
&\frac{d}{dt}(m_2\dot{q_2}) = \frac{1}{2}(M+m)\ddot{q_2} + \frac{\dot{m}\dot{r}}{2} = -\frac{dU}{dr}, \\
&\frac{1}{4}(\dot{q_1}+\dot{q_2})\dot{r} - m(h_1 - h_2m^2) = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

である。この m の運動方程式である第 3 式は m の時間発展を記述していないので拘束条件である。運動方程式 (15) の第 1 式と第 2 式を加えて運動量保存則

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{q_1} + m_2\dot{q_2}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[M(\dot{q_1}+\dot{q_2}) + m\dot{r}\right] = 0 \tag{16}$$

を得る。これは並進不変性を反映している。また，両式の差から相対座標の運動方程式

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left[M\dot{r} + m(\dot{q_1}+\dot{q_2})\right] = -\frac{dU}{dr}, \tag{17}$$

が得られる。これは r のみの方程式ではないが，方程式 (16) を積分した値を P_0 とすれば

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left[M\dot{r} + \frac{m}{M}(2P_0 - m\dot{r})\right] = -\frac{dU}{dr}, \tag{18}$$

になる。P_0 を用いれば，拘束条件から

$$\frac{1}{4}(2P_0 - m\dot{r})\dot{r} = (h_1 - h_2 m^2)m$$

なるので，さらに $m = \alpha\dot{r}$ とすれば

$$\frac{1}{4M}(2P_0 - \frac{m^2}{\alpha}) = \alpha(h_1 - h_2 m^2)$$

を得る。従って，h_1 と h_2 を

$$h_1 = \frac{P_0}{2\alpha M},\ h_2 = \frac{1}{4\alpha^2 M}$$

とする。相対座標の運動方程式 (18) に $m = \alpha\dot{r}$ を用い，$\dot{r}$ を乗じて， r のみに対する方程式

$$\frac{1}{8}\left[\left(M + \frac{2P_0\alpha}{M}\right)\dot{r}^2 - \frac{3\alpha^2}{2M}\dot{r}^4\right] = \epsilon - U(r)$$

を得る。ここで ϵ は積分定数である。

$t \to -\infty$ で $\dot{q}_1 = v, \dot{q}_2 = -v$ である初期条件の下で，一定質量の場合の解 (5)，(6)，および (7) が

$$\begin{aligned} &M(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m\dot{r} = 2P_0, \\ &\frac{1}{8}\left[\left(M + \frac{2P_0\alpha}{M}\right)\dot{r}^2 - \frac{3\alpha^2}{2M}\dot{r}^4\right] = \epsilon - U(r) \end{aligned} \tag{19}$$

の解になるようにポテンシャル $U(r)$ を求める。ただし，a は単なるパラメータとした。初期条件から

$$\alpha = -\frac{m_\infty}{2v},\ \epsilon = \frac{v^2}{2}\left(M - \frac{m_\infty^2}{2M}\right),\ P_0 = -m_\infty v, \tag{20}$$

と設定する。すると全ての場合に対して

$$U(r) = \frac{g_1}{2}\mathrm{sech}^2 r + \frac{g_2}{4}\mathrm{sech}^4 r \tag{21}$$

を得る。ここで

$$g_1 = \left(M - \frac{2m_\infty^2}{M}\right)av^2,\ g_2 = 3\frac{m_\infty^2}{M}a^2v^2 \tag{22}$$

である。g_1 を独立なパラメータと見なすと，パラメータ a は

$$a = \frac{Mg_1}{(M^2 - 2m_\infty^2)v^2}$$

で与えられる。g_2 は常に正なので，sech^4 ポテンシャルは必ず斥力であり，たとえ，$g_1 < 0$ で sech^2 ポテンシャルが引力的であっても

$$M > -m_\infty > \frac{M}{\sqrt{2}}$$

のとき粒子の跳ね返りが起こる。すなわち，このとき十分遠方で引力が作用していても，近距離では sech^4 ポテンシャルが支配的になる。

4　振動解

この節では，ソリトン的な挙動をする 2 粒子系から離れて，質量を交換しながら振動する非線形振動子を手短に述べる。解として振幅が A，振動数が ω の単振動解

$$r = A\sin\omega t$$

を仮定すれば，前節と全く同様の計算によって，4 次の非線形ポテンシャル

$$U(r) = \frac{k_1}{2}r^2 + \frac{k_2}{4}r^4$$

を得る。ここで

$$k_1 = 2\left(\frac{3\alpha^2}{M}\omega^2 A^2 - M\right)\omega^2,\ k_2 = \frac{6\alpha^2}{M}\omega^4$$

である。r^2 ポテンシャルは斥力を許容しうるが，$k_2 > 0$ なので r^4 ポテンシャルは必ず引力である。

5　Summary

ソリトン粒子の力学を構成することを目指して，質量を交換しながら相互作用する粒子の厳密な解析解を持つごく簡単な toy model を閉じた系として構築した。このとき問題設定を逆問題として，一定質量に対する運動方程式 (3) の解 (5)，(6)，および (7) を用いて，拘束条件で質量を与え，それぞれの場合に同一のポテンシャル (21) を得た。質量を交換する結果，一定質量とは異なり遠距離では引力であっても近距離では斥力が働き跳ね返る解が存在する。そのため，おそらくはソリトンの漸近的挙動だけでは大域的な挙動を記述するのは困難な可能性がある。従って，まだソリトンの運動には十分対応しないし，他の可能性もあり得る。実際のソリトンの運動に適用することが課題となる。また，ソリトン粒子の運動とは別に単振動する解が満たすポテンシャルを求めた。それは 2 次のポテンシャルと 4 次のポテンシャルの和で与えられる。

参考文献

[1] 例えば，M. J. Ablowitz and H. Segur, “SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM”, SIAM, 1981.

[2] 角畠浩，紺野公明，「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」，数理解析研究所講究録 1701「波動現象の数理と応用」，p.197，京都大学数理解析研究所，2010 年

[3] 角畠浩，紺野公明，「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」，数理解析研究所講究録 1761「非線形波動現象の多様性と普遍性」，p.1118，京都大学数理解析研究所，2011 年

[4] H. Kakuhata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.

[5] H. Kakuhata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.

[6] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.

[7] 角畠浩，佐伯拓弥，「質量移動を伴う二粒子系 — ソリトン粒子の力学に向けて」，数理解析研究所講究録 1847「波動現象研究の数理，モデリングおよび応用」，p.107，京都大学数理解析研究所，2013 年