

STUDIES ON HOMOGENEOUS CONES AND THE BASIC RELATIVE INVARIANTS THROUGH SKELETONS

山崎, 貴史

<https://doi.org/10.15017/1441052>

出版情報 : 九州大学, 2013, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

論文審査の結果の要旨

行列の群 $GL(n, \mathbf{R})$ の自然な作用を持っている n 次実対称行列のなす開凸錐を一般化したものが等質開凸錐である。等質開凸錐の一般論は E. Vinberg 氏の 1963 年の論文で基礎付けがなされ、クラン、 T 代数、 N 代数といった代数系の研究に帰着できることが示されている。Vinberg 氏の論文では 11 次元以上になると連続濃度の互いに線型同値でない開凸錐が現れることが示されている一方で、金行壯二氏と辻正司氏による 1974 年の共著論文では、10 次元以下のものについて線型同値を除いて分類されている。そこでは、スケルトンと呼ばれるダイアグラムが導入され、スケルトンが彼らの分類の技法で決定的な役割を果たしている。 N 代数からスケルトンを得る手続きは容易で、 N 代数の階数と「off-diagonal」な部分空間の次元さえわかれば描ける（逆に、11 次元以上になるとスケルトンから N 代数を得ることは決して自明ではなく、不可能な場合さえある）。山崎氏の研究は、等質開凸錐一般の研究にも積極的にこのスケルトンを用いて、理論の見通しをよくすることから始まった。

山崎氏は、まず野村との共著論文である参考論文において、一般の等質開凸錐を実対称行列で実現する研究を行っている。先行研究もすでにいくつか存在するが、参考論文で用いられた手法はスケルトンを用いるもので、スケルトンの源頂点 (source vertices) を取り出し、そこから得られる開凸錐を綴じ合わせるものである。C. B. Chua 氏による 2003 年の論文で設定された条件をクリアする添字集合の中で最小のものを、スケルトンを描くことで容易に取り出せ、無駄のない条件で書き下せることができている。それは、Vinberg 氏が今日 Vinberg 錐と呼ばれる 5 次元 (最低次元) の対称錐でない等質開凸錐を記述した方法を正統に踏襲するものであり、上述の金行氏と辻氏の論文では記述されていない 8, 9, 10 次元のものを含め、一般の等質開凸錐を直接的、明示的、かつ重複する条件なしに効率的に実対称行列で記述するものである。

本学位論文では、等質開凸錐の中で、その基本相対不変式の次数により対称錐を特徴付けた。対称錐は Riemann 対称空間の典型例であり、既約なものは上述の正定値実対称行列、複素数や 4 元数の正定値エルミート行列、ローレンツ錐、そして例外型と呼ばれる 3 次の 8 元数正定値エルミート行列の集合がそのすべてである。対称錐については J. Faraut 氏と A. Koranyi 氏共著の著書に見られる様に、数多くの研究がある。したがって、何らかの条件により等質開凸錐の中で対称錐を特徴付けることは極めて意義深い。本学位論文における主定理の正確な主張は、階数 r の等質開凸錐 Ω が対称錐であるための必要十分条件は、 Ω とその双対錐 Ω^* に付随する基本相対不変式の次数がともに $1, 2, \dots, r$ の等差数列をなすことである、というものである。このようにきれいな形で述べられる定理であるが、その証明にはかなりの洞察力と計算力を要する。またそこでは、スケルトンを援用することによる見通しの良さも大きく効いているし、参考論文で得られている等質開凸錐の実現の手法も、特定の変数に関する次数を精査する時に役立っている。

以上述べてきたように、山崎貴史氏の本学位論文における成果は、その手法、得られた結果において、著しい独創性を持つものであり、当該分野への寄与も大きく、学問的価値のある業績である。よって、本研究者は博士 (数理学) の学位を受ける資格が十分にあるものと認める。