STUDIES ON HOMOGENEOUS CONES AND THE BASIC RELATIVE INVARIANTS THROUGH SKELETONS

山崎, 貴史

https://doi.org/10.15017/1441052

出版情報：九州大学, 2013, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

氏　　名：　山崎　貴史

論 文 題 目 ：　STUDIES ON HOMOGENEOUS CONES AND THE BASIC RELATIVE INVARIANTS THROUGH SKELETONS
（等質錐と基本相対不変式についてのスケルトンを用いた研究）

区　　分：　甲

論　文　内　容　の　要　旨

直線を含まない開凸錐で、線型自己同型群が推移的に作用するものを等質錐という。Vinberg は 1963 年に、クラン、T 代数、N 代数という二重次数付き代数を導入して等質錐の研究を行った。これらの代数はすべて同型を除いて等質錐と 1 対 1 に対応している。さらに、Kaneyuki と Tsuji は 10 次元以下の等質錐を分類するために、m-skeleton と呼ぶ図形を導入した。一般に skeleton から T 代数を得ることは容易ではないが、逆に T 代数のべき零部分である N 代数からは、単純な手続きによって skeleton $S(\mathfrak{N})$を得ることができる。実際に、階数 m の T 代数$\mathfrak{A}=\sum_{i,j=1}^{m}\mathfrak{A}_{ij}$とそのべき零部分$\mathfrak{N}=\sum_{1\leqq i<j\leqq m}\mathfrak{A}_{ij}$に対して、$S(\mathfrak{N})$は次のようにして得られる。$S(\mathfrak{N})$の m 個の頂点を、凸 m 角形をなすように配置して、これらの頂点を反時計回りに $1,\ldots,m$ と番号付ける。$\mathfrak{A}_{ij}$（$i<j$）の次元 n_{ij} が正ならば頂点 i と j を線分で結んで、その線分に正整数 n_{ij} を付与する。このように、$S(\mathfrak{N})$は$\mathfrak{N}$の部分空間同士の関係を可視化した図形であり、$\mathfrak{N}$の詳細な構造を調べることが可能となっている。この $S(\mathfrak{N})$を援用した研究によって、以下に述べるように有意義な結果を得た。

まず参考論文では、申請者は一般の等質錐を実現する直接的で系統的な手法を与えた。その手順は、$S(\mathfrak{N})$の性質に従って次のように段階を分けるものである。$S(\mathfrak{N})$の頂点のうち、極小頂点 ω、つまり ω より小さい他の頂点と線分で結ばれていない頂点 ω に着目する。まず $S(\mathfrak{N})$がただ 1 つの極小頂点を持つ場合に実現して、それから一般の場合に移る。一般の場合には、$S(\mathfrak{N})$のすべての極小頂点 $\omega_1,\ldots,\omega_r$ を取って、これらの頂点からそれぞれ等質錐 $\Omega_1,\ldots,\Omega_r$ を第一の手順によって生成する。そしてそれらを綴じ合わせることで元の等質錐を実現できる。いくつかの $S(\mathfrak{N})$の頂点は、2 つ（あるいはそれ以上）の極小頂点 ω_i、ω_j と線分で結ばれていることに注意しよう。この場合、Vinberg 錐において見られるように、等質錐 Ω_i、Ω_j はいくつかの座標を共有している。それゆえ申請者による等質錐の実現は Vinberg 錐の記述をモデルに構築されたものである。

主論文では、前述の skeleton を用いた等質錐の研究を発展させて、等質錐の中で自己双対錐の特徴付けを与えた。自己双対な等質錐は、Faraut と Korányi の本において対称錐と呼ばれ、Riemann 対称空間の代表的な例である。その本では、対称錐やその上での調和解析に関する多種多様な研究がまとめられている。一方で、基本相対不変式は概均質ベクトル空間の理論において、様々な面で重要な役割を担っている。申請者の研究では、階数 m の等質錐 Ω に対して、Ω に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群 H を考え、相対不変性はこの H に関するものとする。Ω に付随する基本相対不変式 $\Delta_1(x),\ldots,\Delta_m(x)$は、Ishi によって 2001 年にその存在が示されており、本論文は、これら $\Delta_i(x)$の次数によって対称錐を特徴付けるものである。

上述の Faraut と Korányi の本で述べられているように、階数 m の対称錐は同じ階数 m の Euclid

型 Jordan 代数の元の平方からなる集合の内部に一致する。与えられた Jordan 枠から得られる Jordan 代数版の主小行列式は基本相対不変式であり、それらの次数は昇順に並べると 1, ..., m である。このような場合、本論文では基本相対不変式の次数が 1, ..., m 型であるという。このことより、直ちに次の予想を得る。すなわち、階数 m の等質錐 Ω が対称となる必要十分条件は Ω に付随する基本相対不変式の次数が 1, ..., m 型となることである。しかし、これには 2008 年に Ishi と Nomura によって階数 3 の反例が与えられ、さらに Nakashima と Nomura は 2013 年に、この例を 3 以上の任意の階数に一般化する系統的な手法を与えた。予想を双対錐 Ω*についても言及する形に変更し、本論文では次の定理を証明した。Ω が対称となる必要十分条件は Ω と Ω*に付随する基本相対不変式の次数が共に 1, ..., m 型となることである。

主論文の構成は以下の通りである。第 2 節では等質錐、関係する代数、基本相対不変式そして skeleton の定義を述べる。Ω を階数 m の等質錐、$\mathfrak{A}=\sum_{i,j=1}^{m}\mathfrak{A}_{ij}$を対応する T 代数とする。すべての i に対して、部分空間$\mathfrak{A}_{ii}$は$\mathbb{R}$に同型な実代数であり、その単位元を e_i と書く。さらに、$\mathfrak{A}$は対合的な反同型写像$x\mapsto x^*$を持つ。$x^*=x$ を満たす元 x を自己双対な元と呼び、$\mathfrak{A}$の自己双対な元全体からなる部分空間を$\mathfrak{X}(\mathfrak{A})$と書く。すると、Ω は$\mathfrak{X}(\mathfrak{A})$内の等質錐であるとみなせる。基本相対不変式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_m(x)$は$\mathfrak{X}(\mathfrak{A})$上の既約多項式であり、Vinberg が導入した多項式 $D_1(x), \ldots, D_m(x)$の既約因子全体に一致する（Ishi、2001 年）。

第 3 節では、$\mathfrak{A}$のべき零部分$\mathfrak{N}$から得られた図形 $S=S(\mathfrak{N})$によって、その頂点 i から生成される T 代数$\mathfrak{A}_{[i]}$を定義する。$\mathfrak{A}_{[i]}$は以下のように与えられる。まず、i より大きい頂点 j で i と線分で結ばれているものを取って、そのような j 全体と i からなる集合を $E_{[i]}$とする。$j,k\in E_{[i]}$を満たす$\mathfrak{A}_{jk}$の総和として$\mathfrak{A}_{[i]}$を定義すると、$\mathfrak{A}_{[i]}$は T 代数であることが分かる。さらに、$\mathfrak{X}(\mathfrak{A})$上の基本相対不変式 $\Delta_j(x)$のうち$j\in E_{[i]}$を満たすものは、$\mathfrak{X}(\mathfrak{A}_{[i]})$上の基本相対不変式に一致する。よって、$\mathfrak{A}_{[i]}$において考えることで、本論文での議論の多くは、参考論文と同じように S がただ 1 つの極小頂点を持つ場合に帰着する。

第 4 節では x の対角変数に関して $\Delta_i(x)$を調べる。ここで x の対角変数とは、x の$e_j\in\mathfrak{A}_{jj}$に関する成分 λ_j（j=1, ..., m）を意味する。$\Delta_i(x)$の λ_j に関する次数が 1 以上になるのは、$j\in E_{[i]}$であることが必要十分である。また、$\Delta_i(x)$は$j\in E_{[i]}$となる λ_j の正整数べきの積からなる項を持つ。このことは、続く議論においてきわめて重要である。

第 5 節では、S がただ 1 つの極小頂点を持ち、かつ $\Delta_i(x)$の次数が 1, ..., m 型である場合を扱う。このとき S は完全グラフになる。つまり S の任意の 2 頂点は線分で結ばれている。さらに、$D_i(x)$を既約因子 $\Delta_j(x)$に分解する明示的な等式が得られる。

最後に、第 6 節で主定理の証明を与える。まず以下の(1)と(2)が同値であることを示す。

(1) S は完全グラフで、$n_{12}=n_{13}=\cdots=n_{1m}$ を満たす。

(2) S はただ 1 つの極小頂点を持って、$\Delta_i(x)$の次数が 1, ..., m 型である。

この同値条件を Ω と Ω*の両方について適用することで主定理が得られる。ここでは、Ω が対称錐であるためには$\mathfrak{A}_{ij}$（$i\neq j$）の次元がすべて等しいことが必要十分であるという Vinberg の判定基準を用いる。