九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Multiple zeta values and multi-poly-Bernoulli numbers

今冨，耕太郎

https://doi.org/10.15017/1441041

出版情報：九州大学，2013，博士（数理学），課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

様式7

論文審査の結果の要旨

本論文は，申請者が博士課程在学中に行ってきた，多重ゼータ値および多重ポリベルヌーイ数に関する研究結果を集成したものである．多重ゼータ値とは，有限個の自然数に対して定義されるある多重和で，リーマンゼータ関数の正整数点での値を一般化したものとなっている．古くは Euler に遡る研究史があるが，この20年，数学や物理学の様々な分野との関連もあって，非常に活発に研究されている．また，多重ポリベルヌーイ数とはベルヌーイ数のある種の一般化で，多重対数関数の一般化を用いた母関数により定義される有理数のことである．これは主として多重ゼータ値との関連から興味を持たれている対象であるが，純粋に組み合わせ的な性質も発見され，やはり近年興味をもつ研究者が増加している．

本論文ではまず多重ゼータ値に関して，そのある線形和が円周率のべきと有理数の積で表されるとする結果を証明している．一つの多重ゼータ値が円周率のべきのような具体的な値として書き表されることは非常に稀であるが，そのいくつかの和が具体的表示を持つという結果はいくつか知られている．そのうちの一つである Bowman-Bradley の結果を本論文では一般化した．この結果は既に公表されているが，後にこれを更に一般化する結果が他の研究者により得られている．

本論文の中心となるのは多重ポリベルヌーイ数に関する一連の研究と，その「有限多重ゼータ値」への応用である．有限多重ゼータ値とは，多重ゼータ値を定義する無限級数を途中で打ち切って得られる有限和（有理数）を，素数を法として考えるものである．これについては Hoffman, Zhao などの先行研究があったが，彼らは素数を固定して，その法での計算に終始していた．ところがごく最近 Zagier により，（有限個を除く）すべての素数での合同を同時に考える枠組みが提唱された．それによると，実数上で考えられていたような，多重ゼータ値が生成する有理数体上のベクトル空間や，有理数体上の代数を考えることが出来，また驚くべきことにその構造が実数の場合と極めて類似した状況にあることが予想されている．とくに様々な類似の関係式の成立が予想されているが，実際に証明されているものは数少ないのが現状である．

本学位論文では，有限多重ゼータ値が本質的に多重ポリベルヌーイ数によって与えられることを示し，多重ポリベルヌーイ数の基本的性質，すなわち漸化式や明示公式などを証明する．また組み合わせ的に興味深い対象であるかも知れない負指数を持つ多重ポリベルヌーイ数について，それが実際に正の整数になることを示している．さらに，二つの種類の多重ポリベルヌーイ数の間に成り立つ双対性を発見し，証明した．証明によればこの双対性は多重ポリログのレベルで成り立っている．この結果は Hoffman が有限多重ゼータ値の研究で導入した，多重インデックスの間の双対の概念に基づくもので，多重ポリベルヌーイ数でそのようなことが成り立つとはまったく予期できなかった公式である．この双対性を用いて，Hoffman による有限多重ゼータ値の双対性定理の別証明を与えることにも成功した．これは今後の有限多重ゼータ値の理論の進展にとり大変興味深い応用であると思われる．また，有限多重ゼータ値の和公式が最近 Saito-Wakabayashi によって証明されているが，多重ポリベルヌーイ数のある公式を打ち立てることにより，有限多重ゼータ値の弱い形の和公式を導いている．

最後に，ベルヌーイ多項式の類似として多重ポリベルヌーイ多項式を導入し，そのいくつかの性質を証明している．ベルヌーイ多項式の対称性（x と 1-x に関する）のこの場合の一般化が，上に述べた双対性を組み込みながら成り立っていることは大変興味深い．これらに関する研究はまだ着手されたばかりであるが，次へ進むための基礎が固められたと評価できる．更に本論文では，いわゆる Arakawa-Kaneko のゼータ関数を上記の一般化に対応する形で一般化し，解析接続を与え，負の整数点での値が多重ポリベルヌーイ多項式となることを証明した．特に，これまでに類のない結果として，この一般化された Arakawa-Kaneko ゼータ関数を，古典的な Hurwitz ゼータ関数にある差分作用素を施す形で非常にきれいに書いたことがあげられる．この表示を用いた今後の研究の進展が大いに期待される．

これらの研究のうち最初の部分は既に一編の共著学術論文として掲載済みであり，残りの主要部分は一編の単著論文，および一編の共著論文として投稿中である．

以上の研究結果は整数論，とくに多重ゼータ値およびベルヌーイ数の分野において価値あるすぐれた業績と認められる．よって本研究者は博士（数理学）の学位を授与される資格があるものと認める．