九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

# Multiple zeta values and multi-poly-Bernoulli numbers

今冨，耕太郎

https://doi.org/10.15017/1441041

出版情報：九州大学，2013，博士（数理学），課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

氏　　名：今冨 耕太郎

論文題目：Multiple zeta values and multi-poly-Bernoulli numbers
(多重ゼータ値と多重ポリベルヌーイ数)
区　　分：甲

# 論　文　内　容　の　要　旨

本論文は多重ゼータ値および多重ポリベルヌーイ数に関する研究結果のまとめである．多重ゼータ値とはリーマンゼータ関数の正整数点での値の一般化で，多重級数で定義される実数値のことである．多重ゼータ値は古くは L. Euler の時代から多くの研究者によって研究されてきた．近年，多重ゼータ値の研究は活発化してきており，現在では数論のみならず結び目理論，共形場理論そして量子物理などの様々な分野と関連していることがわかっている．特に，2011 年 F. Brown は多重ゼータ値たちによって張られるベクトル空間の生成元を明示した．これは D. Zagier によって提起された多重ゼータ値に関する次元予想の解決に迫る著しい結果であり，また現在も盛んに研究されていることを示すものでもある．一方，多重ポリベルヌーイ数とはベルヌーイ数のある種の一般化で，多重対数関数の一般化を用いて構成される母関数により定義される有理数のことである．多重ポリベルヌーイ数は現在発展途上の分野で，研究するべきことの多い興味深い研究対象である．

本論文における多重ゼータ値に関する研究は，多重ゼータ値の特殊値に関するものである．リーマンゼータ関数の正偶数点での値はある有理数と円周率のベキ乗の積で表されることは有名である．しかし多重ゼータ値の観点から見ればそのように表されることは非常に少ない．本論文において我々は多重ゼータ値たちのある特定の和が有理数と円周率のベキ乗の積で表されることを先行結果とともに示している．

多重ポリベルヌーイ数に関する研究の動機の一つとして有限多重ゼータ値が挙げられる．多重ゼータ値が多重級数で与えられることは上述したが，それを途中で打ち切って得られる有限和に関する研究も同様に続けられている．有限多重ゼータ値とは各素数ごとに与えられるこの有限和たちをある枠組みで捉えたものである．有限多重ゼータ値は多重ゼータ値に比べ新しい分野であるため，得られている結果は比較的少ない．そのため本論文において有限多重ゼータ値に関する予想をいくつか述べている．

本論文における多重ポリベルヌーイ数に関する研究は，大きく分けて多重ポリベルヌーイ数の基本的性質，有限多重ゼータ値との関連そして負指数を持つ多重ポリベルヌーイ数の三つに分けられる．基本的性質に関しては，多重ポリベルヌーイ数に対する漸化式および明示公式などを証明している．また有限多重ゼータ値との関連に関しては，まず全ての有限多重ゼータ値が多重ポリベルヌーイ数を用いて記述されることを示している．これは多重ポリベルヌーイ数に対する情報は有限多重ゼータ値に対する情報へと書き換えられることを意味している．例えば我々が示した結果の一つとして多重ポリベルヌーイ数に関する双対性があるが，これを有限多重ゼータ値で考えると M. Hoffman によって得られた有限多重ゼータ値に関する双対性と同一である．最後に負指数を持つ多重ポリベルヌーイ数に関しては，明示公式により整数であることは明らかであるが，数値実験により正整数であることが予想された．そこでこれらの母関数を考察することで正整数であることを示

し，さらに特殊な場合の値を第 2 種スターリング数を用いて具体的に記述している．

ベルヌーイ数の一般化としてベルヌーイ多項式があるように，我々は多重ポリベルヌーイ数の一般化として多重ポリベルヌーイ多項式の研究を行った．また，一般化された荒川-金子型ゼータ関数について考察している．多重ポリベルヌーイ多項式に関しては，基本的な性質を中心に研究を行った. その結果の一つとして, ベルヌーイ多項式の対称性の一般化に相当する関係式を証明している．また一般化された荒川-金子型ゼータ関数については, 非正整数点において多重ポリベルヌーイ多項式をもつことを示している. またこの関数が差分演算子と Hurwitz ゼータ関数を用いて表されることを証明している．