

KP 方程式の初期値問題とソリトン解 : V字波形の 時間発展

辻, 英一
九州大学応用力学研究所

及川, 正行
九州大学応用力学研究所

児玉, 裕二
オハイオ州立大学

<https://doi.org/10.15017/14309>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (37), 2009-02. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」(研究代表者 矢嶋 徹)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 37 (pp. 218-223)

KP 方程式の初期値問題とソリトン解 — V 字波形の時間発展 —

辻 英一 (TSUJI Hidekazu), 及川 正行 (OIKAWA Masayuki),
児玉 裕二 (KODAMA Yuji)

(Received February 16, 2009)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

KP 方程式の初期値問題とソリトン解

– V 字波形の時間発展 –

九大応力研 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)
九大応力研 及川 正行 (Masayuki OIKAWA)
Ohio State University 児玉 祐治 (Yuji KODAMA)

1 はじめに

Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(4 \frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

は、弱二次元的な非線形長波の伝播を表すモデル方程式である (Kadomtsev and Petviashvili (1970))。ここで x 座標が主に波が伝わる方向であり、 y 座標がそれに直行する方向である。 y 座標はスケールが変換されており、元の座標系では x 方向に比べゆっくりした変化 (弱二次元的) となっている。KP 方程式の重要な特徴の一つとして、二次元的なソリトン解を持つ事があげられる。既に広田の方法によって求められる N ソリトン解や 3 本の半無限に伸びるソリトンから構成される共鳴解 (Miles (1977)) が知られていたが、最近、既知の解を含んだ、より広いクラスの新しい解が提出されている (Biondini and Kodama (2003); Kodama (2004))。

一方、これまで成層流体やプラズマなどの二次元モデル方程式について孤立波の相互作用が調べられてきた (Oikawa and Tsuji (2006))。二本の孤立波を組み合わせた V 字波形を初期値として数値的に時間発展を求め、漸近的な波動パターンの解析を行うことにより、ソリトンの進行方向の成す角度についての依存性や、相互作用によって新しくソリトンが形成される場合の振幅について明らかにしてきた。

KP 方程式についても、曲がった峰を持つ複数の孤立波 (これらはソリトン解では無い) を初期条件として、その時間発展を調べられている (Porubov et al. (2005))。しかし、直線的な峰を持つ V 字型の初期値での時間発展は、これまで既存の解との比較が行われているのみで、新しい解との比較を行った例は無い。本研究の目的は、この新しい解と、V 字型の初期条件からの時間発展による漸近的なパターンとの詳細な比較を行い、より一般的な孤立波の相互作用に関する知見を得ることである。

これまでの研究では、振幅の等しい孤立波同士の相互作用を調べてきた。これは数値計算の技術的な制限であったが、最近この制限を取り除くことができたため、ここでは、特に振幅の異なる孤立波同士の相互作用について調べる。

2 KP 方程式の解析解

前節で述べた，より広いクラスの解 (Kodama, 2004) は，

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau, \quad \tau_N = \begin{vmatrix} f_1^{(0)} & \cdots & f_N^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(N-1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \quad f_i^{(n)} = \frac{\partial^n f_i}{\partial x^n}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = -\frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3}$$

と書ける．これを満たす f を具体的に与える事により， τ 関数と具体的な解が求められる．

ここで， $N = 2$ での以下のような場合を考える．

$$\tau_2 = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \equiv AE$$

$$e_i = \exp \theta_i, \quad \theta_i = k_i x + k_i^2 y - k_i^3 t + \theta_0, \quad k_1 < k_2 < k_3 < k_4$$

以下この解を 2-ソリトン解と呼ぶことにする．ここで，行列 A の形によって，さまざまなパターンが表れる．

例として，

$$A = A_{3142} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．この解 (A_{3142} 解と呼ぶ) の τ を具体的に表すと

$$\tau_2 = (k_3 - k_1) \exp(\theta_1 + \theta_3) + (k_4 - k_1) \exp(\theta_1 + \theta_4) + (k_3 - k_2) \exp(\theta_2 + \theta_3) \\ + (k_4 - k_2) \exp(\theta_2 + \theta_4) + (k_4 - k_3) \exp(\theta_3 + \theta_4)$$

である．指数関数の項が 5 つ含まれているが，ある時刻のある点 (x, y, t) を考えた時に，もしそのうち一つの項が卓越する (τ 関数が一つの指数関数であらわせる) 場合には， $u = 0$ となり，その場所でソリトンは存在しない．また，二つの項が同程度で卓越している場合，その部分にはソリトンが存在している．例えば， $\exp(\theta_1 + \theta_4)$ と $\exp(\theta_3 + \theta_4)$ が同程度に他の項よりも非常に大きくなる場所があると，そこでは， τ 関数の他の項を無視して計算することにより

$$u = \frac{1}{2} (k_3 - k_1)^2 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} (\theta_3 - \theta_1)$$

で表されるソリトンが存在することがわかる．このソリトンは，振幅が $(k_3 - k_1)^2/2$ ，またその峰の線の向きが $\theta_3 = \theta_1$ より $x + (k_1 + k_3)y = \text{const.}$ とそれぞれ k_1, k_3 を使った形で表される．

この A_{3142} 解のある時間での波形を図 1 に示す．図中のソリトン A が例として述べた $\exp(\theta_1 + \theta_4)$ と $\exp(\theta_3 + \theta_4)$ が卓越している場所であり，振幅，向きを k_1, k_3 から求められる．また，ソリト

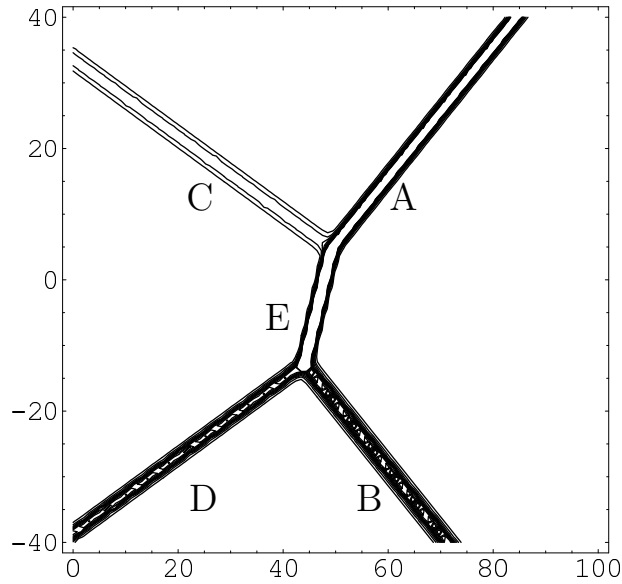


図 1: 2 ソリトン解 ($A = A_{3142}$) . 横軸, 縦軸に, それぞれ x, y 軸を取っている . $k_1 = -1.5$, $k_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, $k_3 = 0.5$, $k_4 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $t = 25$.

ン B は $\exp(\theta_2 + \theta_3)$ と $\exp(\theta_3 + \theta_4)$ が卓越している場所であり, 振幅, 向きを k_2, k_4 から求められる . 同様に他のソリトン C~E も, 対応する k によってその振幅を求める事ができる .

逆に, ある A_{3142} 解が与えられた時に, 例えばソリトン A,B の振幅と向きから k_1, \dots, k_4 を求める事も可能である . その場合, 他のソリトンはその k で表される振幅, 向きを取るようになる .

3 数値計算の結果・考察

本論文での具体的な数値計算法は, Oikawa and Tsuji (2006) などでの孤立波の二次元相互作用を研究する際に採用された方法とほぼ同様であるが, 境界条件の処理について新しい方法を用いている .

空間微分の計算については, 差分法よりも精度的に有利な擬スペクトル法を用いる . 時間発展については Crank-Nicholson 法を用いて差分化し, 非線形の部分は繰り返しで行う . x 方向については, 初期の波動を置く場所は境界から十分距離を置くように設定しており, 時間発展の全体でこの条件は保たれる . そのため, x 方向には周期境界条件を用いることができる .

一方, y 方向については, 初期値として振幅の異なる line ソリトンが伸びており, そのままでは周期境界条件を満たす事はできない . 最近スペクトル法で非周期境界条件の問題を解く windowing method が開発された (Schlatter et al. (2005)) . これはスペクトル法で解けない変数の代わりに, 両端で 0 となる window function を作用させた変数を使って方程式を書き換えて解き, 逆変換を行う事により, 元の変数での値を得る, という方法である . ここでは, その方法を応用した方法を用いる . 詳細は辻ら (2008) に述べている .

図 2 の (a) を用いて初期条件の説明を行う . 初期には, 二つのソリトン (図中 A,B) が領域の中

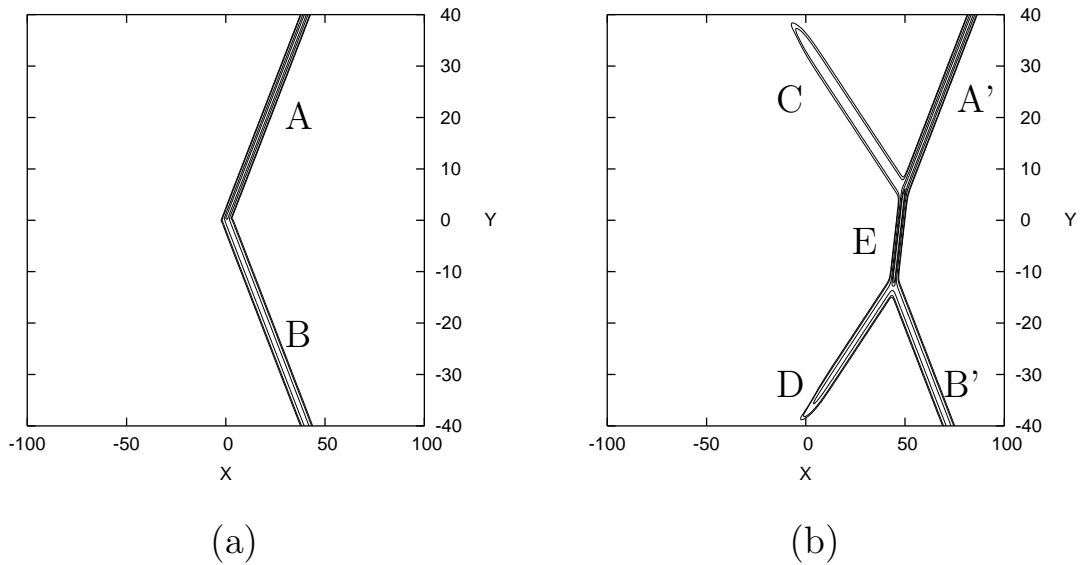


図 2: ソリトン A の振幅が 2.0 の場合の時間発展 . (a): $t = 0$. (b): $t = 25$.

心で交わるようにおく . ソリトン B は振幅 1 で常に固定し , ソリトン A の振幅をパラメータとする . ソリトンの峰線を $x + cy = \text{const.}$ と表すと , ソリトン A,B はそれぞれ $c = -1, 1$ であり , これも固定する .

図 2 はソリトン A の振幅が 2 の場合である . 時間が経過すると , ソリトン A,B は峰と直角の方向に進むので , 二つの波は x 軸の正の方向へ移動しつつ , 領域の中心で相互作用を行う . ある程度の相互作用を行った後 , 波動場は定常的な伝播となる . その図を 2(b) に示している . 初期から存在しているソリトン A' , B' に加えて , 後方 (x 軸の負の方向) に新しいソリトン C,D が形成されている . また , 領域の中心にはソリトン E が存在する . このソリトン E は両側の端でソリトン A' 及び C , また B' 及び D とそれぞれ交っており , その間の距離は時間がたつにつれて広がっていく .

この波形は , 先に示した A_{3142} 解と比較すると非常に良く似ている . 実際にソリトン A,B の振幅と向き c の値から $k_i (i = 1, \dots, 4)$ を求め , そこからソリトン C,D,E に対応する波の振幅を求めたところ , いずれもほぼ一致している . なお , A_{3142} 解の $t = 0$ での波形は , 既にソリトン C,D が存在するような波形で , 図 2(a) の波形とは一致しない . ここでの計算結果と理論解の一致は , 時間が十分経過した漸近状態でのものである .

ここで , A_{3142} 解の解析から , ソリトン A の振幅が $3 - 2\sqrt{2} \simeq 0.172$ より小さい場合には A_{3142} 解の条件 $k_2 < k_3$ が満たされない . 特に $k_2 = k_3$ では , 図 1 でのソリトン A とソリトン D の振幅が同じ値をとる . この場合に対応する振幅を初期のソリトン A に与えた数値計算の結果を次に示す .

図 3 はソリトン A の振幅が 0.1 の場合である . この場合 , 時間が経過すると , 相互作用部から

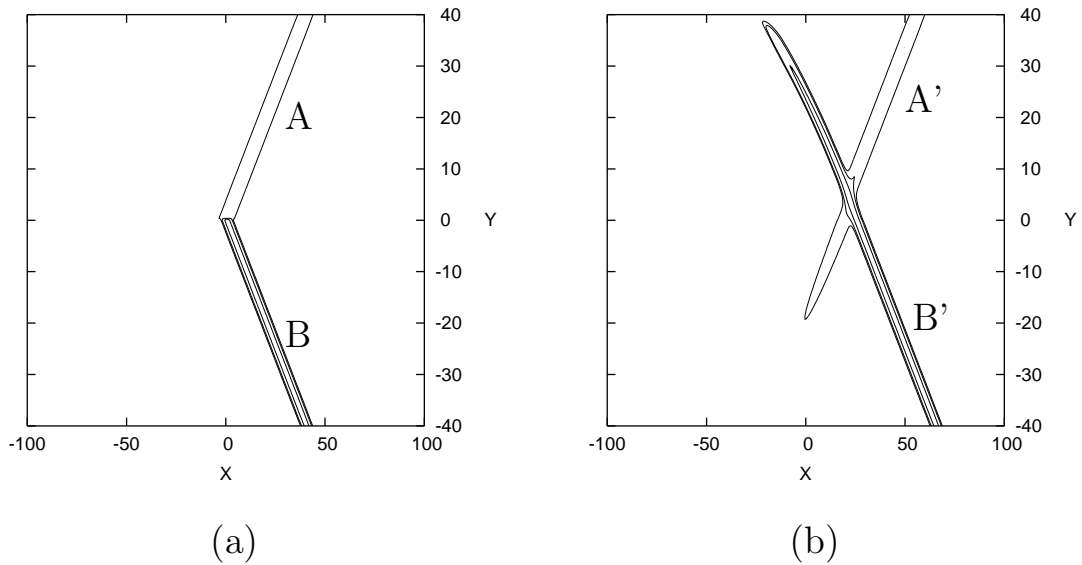


図 3: ソリトン A の振幅が 0.1 の場合の時間発展 . (a): $t = 0$. (b): $t = 20$.

ソリトン A,B と同じ振幅 , 方向のソリトンが後方へと形成されていく . 相互作用部では , ある程度の位相ずれが見られるが , 波形としてはほぼ重ね合わせのように見える . この場合も , 時間が十分たった後の状態 (b) について , 2-ソリトンの理論解に対応するものがあり , 図 2 の場合の比較と同様 , よく一致している .

図 2 に対応する A_{3142} 解の解析でもう一つわかることは , ソリトン A の振幅が $3 + 2\sqrt{2} \simeq 5.828$ より大きい場合には A_{3142} 解の条件 $k_3 < k_4$ が満たされない . 特に $k_3 = k_4$ の場合 , 図 1 でのソリトン C の振幅が 0 となる . この場合に対応する振幅を初期のソリトン A に与えた数値計算を図 4 に示す . 時間が経過した後 , ソリトン B の後方だけにソリトン D が形成される . また , ソリトン B' とソリトン D の交点から領域右上に伸びているソリトンは , 一見 A' のように見えるが , 実際には新しいソリトン E が生成されており , 滑らかに A' とつながっている . この場合の理論解との適切な比較は , 調査中である . 現段階では , 3 つのソリトン B', D, E の振幅 , 向きなどを解析した結果 , Miles の共鳴条件をほぼ満たしている事を確認している .

今後 , 図 4 に対応する理論解との比較や , ソリトンの向き c をパラメーターとした時にどのような相互作用が起こるのかなどを調べる予定である .

参考文献

Biondini, G. and Kodama, Y., On a family of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation which also satisfy the Toda lattice hierarchy, J. Phys. A, **36**(2003)10519-10536.

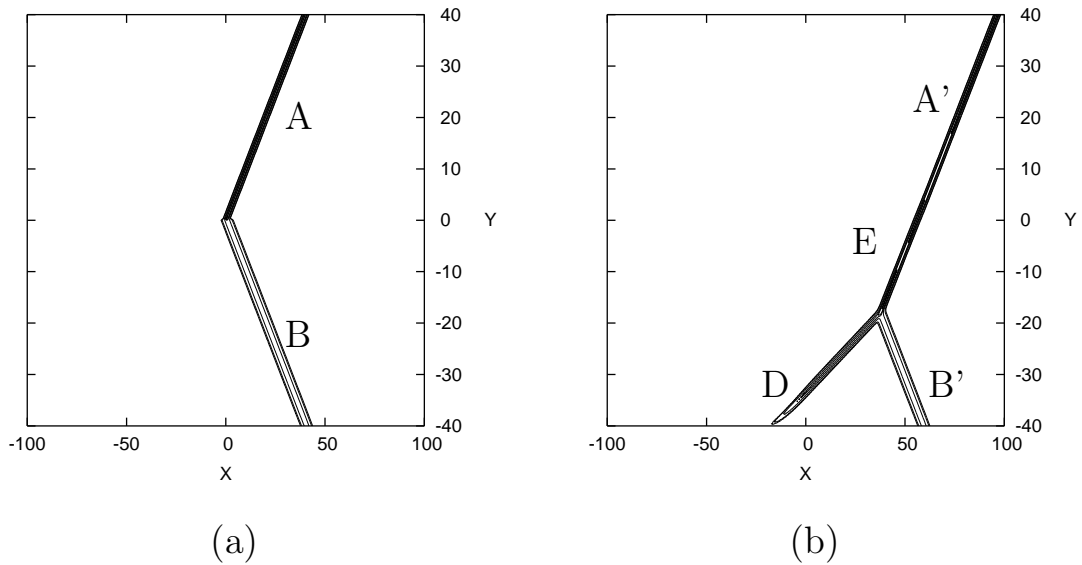


図 4: ソリトン A の振幅が 6.0 の場合の時間発展 . (a): $t = 0$. (b): $t = 15$.

Kodama, Y., Young diagrams and N -soliton solutions of the KP equation, *J. Phys. A*, **37**(2004)11169-11190.

Kadomtsev, B. B. and Petviashvili, V. I.: On the stability of solitary waves in weakly dispersing media, *Sov. Phys. Dokl.*, **15** (1970) 539-541.

Miles, J.W., Resonantly interacting solitary waves, *J. Fluid Mech.*, **79**(1977) 171-179.

Oikawa, M. and Tsuji H., Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems, *Fluid Dynamics Research*, **38** (2006) 868 - 898.

AV. Porubov, H. Tsuji, IV. Lavrenov and M. Oikawa: Formation of the rogue wave due to non-linear two-dimensional waves interaction, *Wave Motion*, **42** (2005) 202-210.

Schlatter, P., Adams N.A. and Kleiser, L., "A windowing method for periodic inflow/outflow boundary treatment of non-periodic flows", *J. Comp. Phys.* **206**(2005) 505-535.

辻英一, 及川正行, 丸野健一: 長波長孤立波の二次元的相互作用と web solution, 日本流体力学会 年会 2008 拡張要旨集 (2008) 32033.