特異点閉じ込めテストの超離散化について

三村, 尚之
青山学院大学理工学研究科

礒島, 伸
青山学院大学理工学研究科

村田, 実貴生
青山学院大学理工学研究科

薩摩, 順吉
青山学院大学理工学研究科

https://doi.org/10.15017/14304

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (32), 2009-02. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 32 (pp. 188-194)

特異点閉じ込めテストの超離散化について

三村 尚之 (MIMURA Naoyuki), 礒島 伸 (ISOJIMA Shin), 村田 実貴生 (MURATA Mikio), 薩摩 順吉 (SATSUMA Junkichi)

（Received February 4, 2009）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

特異点閉じ込めテストの超離散化について

青山学院大学理工学研究科 三村 尚之 (MIMURA Naoyuki)
青山学院大学理工学部 礒島 伸 (ISOJIMA Shin)
青山学院大学理工学部 村田 実貴生 (MURATA Mikio)
青山学院大学理工学部 薩摩 順吉 (SATSUMA Junkichi)

概 要

差分方程式の値を正に制限せずに超離散化する手法として, スピン変数付き超離散化を導入する. さらに, スピン変数付き超離散化によって得られる超離散方程式に対して, 差分方程式の特異点閉じ込めテストに対応する可積分性判定法を提案する.

1 はじめに

常微分方程式の可積分性判定法であるパンルヴェテストの離散版として特異点閉じ込めテスト (singularity confinement test, SC) が提案されている [1, 2]. 差分方程式の特異性が有限回のステップ後に打ち消し合い, 初期値の情報が回復されることを SC に通るといい, これを用いて離散パンルヴェI,II,III,IV,V 方程式が導出されている. SC に通ることは差分方程式が可積分であるための必要条件でも十分条件でもないが [3, 4, 5], この性質は差分方程式の可積分性と深い関連があると考えられる.

一方, 極限操作によって差分方程式の従属変数を離散化する手法 (超離散化) が発見され, 超離散方程式に対しても SC の超離散版として可積分性判定法が提案されている [6, 7]. 超離散系の数理モデルを扱う利点の 1 つは, 連続系や離散系の場合よりも方程式の持つ特徴がより際立つことであろう. しかし超離散方程式は max-plus 代数上の方程式であり, また超離散極限をとるためにはもとの差分方程式の全ての値を正に制限する必要があるため, このような制約下で SC に対応する可積分性判定法を構築することは難しい.

本稿では, 負の値もとる差分方程式を超離散化する手法 [8](別の手法が [9] にもある) を導入し, 超離散方程式に対して SC の特徴を保つような可積分性判定法を提案する.

2 スピン変数付き超離散化

まずはじめに, 次の差分方程式を考える.

$$x_{n+1} = ax_n \tag{2.1}$$

ここで $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ はパラメータである. (2.1) の一般解は

$$x_n = a^n x_0 \tag{2.2}$$

で与えられる．(2.1) を超離散化する場合, 通常 $a > 0$, $x_n > 0$ $(\forall n)$ の制限のもとで $a = e^{\frac{A}{\varepsilon}}$, $x_n = e^{\frac{X_n}{\varepsilon}}$ により定義されるパラメータ A 及び従属変数 X_n を導入し, 公式

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (e^{\frac{K}{\varepsilon}} + e^{\frac{L}{\varepsilon}}) = \max(K, L) \tag{2.3}$$

を用いて極限操作を施す．すると (2.1) は以下の超離散方程式に帰着される．

$$X_{n+1} = A + X_n \tag{2.4}$$

(2.4) の解は

$$X_n = nA + X_0 \tag{2.5}$$

である．生物の個体数の数理モデルのように, 正の値のみをとるような数理モデルを扱う上では, (2.5) はもとの差分方程式の解 (2.2) の特徴を保存している．

次に, (2.1) の値を正に制限せずに超離散化する方法を示す．まず, スピン変数 $\sigma, \sigma_n \in \{-1, 1\}$ と振幅変数 $b, y_n \in \mathbb{R}_{>0}$ を導入して $a = \sigma b$, $x_n = \sigma_n y_n$ と書く．さらにスピン関数 $s : \{-1, 1\} \mapsto \{0, 1\}$ を

$$s(\tau) := \begin{cases} 1 & (\tau = 1) \\ 0 & (\tau = -1) \end{cases} \tag{2.6}$$

で定義し, これを用いて $\sigma = s(\sigma) - s(-\sigma)$, $\sigma_n = s(\sigma_n) - s(-\sigma_n)$ と書く．最後に $b = e^{\frac{B}{\varepsilon}}$, $y_n = e^{\frac{Y_n}{\varepsilon}}$ とおいて超離散極限をとると, 次の方程式が得られる．

$$\begin{aligned} &\max[Y_{n+1} + S(\sigma_{n+1}), B + Y_n + \max\{S(\sigma) + S(-\sigma_n), S(-\sigma) + S(\sigma_n)\}] \\ &= \max[Y_{n+1} + S(-\sigma_{n+1}), B + Y_n + \max\{S(\sigma) + S(\sigma_n), S(-\sigma) + S(-\sigma_n)\}] \end{aligned} \tag{2.7}$$

ただし, 超離散スピン関数 $S : \{-1, 1\} \mapsto \{0, -\infty\}$ は以下のように定義される．

$$S(\tau) := \begin{cases} 0 & (\tau = 1) \\ -\infty & (\tau = -1) \end{cases} \tag{2.8}$$

(2.7) は陰的な方程式であるが, 次のような陽的な時間発展形式に書き直すことができる．

$$\sigma_{n+1} = \sigma \sigma_n \tag{2.9}$$

$$Y_{n+1} = B + Y_n \tag{2.10}$$

さらに (2.7) の各点を $X_n := (\sigma_n, Y_n)$ と書くと, (2.7) の解は以下のように表わされる．

$$X_n = (\sigma^n \sigma_0, nB + Y_0) \tag{2.11}$$

(2.7) で $\sigma = \sigma_{n+1} = \sigma_n = 1$ とおくと (2.4) に帰着される．よって (2.7) は (2.4) を 2 つの従属変数の組 $X_n = (\sigma_n, Y_n)$ に拡張した超離散方程式であり, (2.2) の特徴を全て保存している．

3　特異点閉じ込めテストの超離散化

2 階差分方程式 $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ の特異点 x_n は, 任意の初期値 x_{n-1} に対して $\partial x_{n+1}/\partial x_{n-1} = 0$ を満たすような x_n で定義され, 特異性は任意の初期値 x_{n-1} に対して $\partial x_{n+k}/\partial x_{n-1} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ を満たす x_{n+k} で定義される．これを踏まえた上で, 超離散方程式の特異点を以下のように定義する．

定義 1. 2 階超離散方程式において, 特別な値 $X_n = (\sigma_n, Y_n)$ をとると任意の初期値 $X_{n-1} = (\sigma_{n-1}, Y_{n-1})$ に対して $X_{n+1} = (\sigma_{n+1}, Y_{n+1})$ が不定になるとき, $X_n = (\sigma_n, Y_n)$ を超離散方程式の特異点と定義する. さらに, 任意の初期値 X_{n-1} に対して不定であるような $X_{n+k} = (\sigma_{n+k}, Y_{n+k})$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ を, 超離散方程式の特異性と定義する.

一般に差分方程式の特異性は消えないが, 可積分な差分方程式では時間発展の途中で現れる不定形が有限確定になることで特異性が消え, 初期値が回復される. 超離散系でこれに相当する現象は, 次のように言うことができる.

定義 2. 2 階超離散方程式で特異点をとって時間発展させると, 再び特異点に戻って初期値の一般性が回復する時間発展が存在するとき, 超離散特異点閉じ込めテスト (ultradiscrete singularity confinement test, uSC) に通ると定義する. ただし, 初期値の任意性が失われないような時間発展を選ぶ.

以上の準備をもとに, 次の差分方程式 [6] から得られる超離散方程式が uSC に通るかを調べる.

$$x_{n+1} x_n^{\gamma} x_{n-1} = a x_n + 1 \tag{3.1}$$

$\gamma = 0, 1, 2$ のとき, (3.1) は Quispel-Roberts-Thompson (QRT) 系とよばれる保存量を持つという意味で可積分な差分方程式であり, SC に通る. ここでは $\gamma = 2$ とし, $a > 0$ の場合を考える.

(3.1) をスピン変数付きで超離散化すると, 以下の方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
&\max[Y_{n+1} + Y_{n-1} + \max\{S(\sigma_{n+1}) + S(-\sigma_{n-1}), S(-\sigma_{n+1}) + S(\sigma_{n-1})\}, A - Y_n + S(\sigma_n), -2Y_n] \\
&= \max[Y_{n+1} + Y_{n-1} + \max\{S(\sigma_{n+1}) + S(\sigma_{n-1}), S(-\sigma_{n+1}) + S(-\sigma_{n-1})\}, A - Y_n + S(-\sigma_n)]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

さらに, 符号関数 $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \mapsto \{-1, 0, 1\}$ を

$$\mathrm{sgn}(Z) := \begin{cases} 1 & (Z > 0) \\ 0 & (Z = 0) \\ -1 & (Z < 0) \end{cases} \tag{3.3}$$

で定義すると, $X_n \neq (-1, -A)$ ならば (3.2) は以下のような時間発展形式に書き直される.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n-1} \left[\frac{\sigma_n}{2} \{1 + \mathrm{sgn}(A + Y_n)\} + \frac{1}{2} \{1 - \mathrm{sgn}(A + Y_n)\} \right] \tag{3.4}$$

$$Y_{n+1} = \max(A - Y_n, -2Y_n) - Y_{n-1} \tag{3.5}$$

一方, (3.2) に $X_{n-1} = (\sigma_{n-1}, Y_{n-1})$, $X_n = (-1, -A)$ を代入すると, $\sigma_{n+1} = 1$ または $\sigma_{n+1} = -1$, $Y_{n+1} \leq 2A - Y_{n-1}$ が得られるので, (3.2) の特異点は $X_n = (-1, -A)$ である.

初期値を $X_0 = (1, F)$ とし, 特異点 $X_1 = (-1, -A)$ をとると, $\sigma_2 = 1$ または $\sigma_2 = -1$, $Y_2 \leq 2A - F$ となる. 初期値 Y_0 の一般性を失わないようにするために Y_2 は他の値と比べて十分に小さいという条件を設けて時間発展させると, 以下のように時間発展が一意に定まる. ただ

し, $X_2=(1,Y_2)$ を採用する.

$$\begin{aligned}
&X_0=(1,F)\\
&X_1=(-1,-A)\\
&X_2=(1,Y_2),\ \text{ただし}\ Y_2\le 2A-F\\
&X_3=(-1,A-2Y_2)\\
&X_4=(-1,Y_2)\\
&X_5=(-1,-A)\\
&X_6=(1,Y_6)\ \text{または}\ (-1,Y_6),\ \text{ただし}\ Y_6\le 2A-Y_2
\end{aligned}\tag{3.6}$$

X_5 で再び特異点が現れ, さらに Y_2 が十分に小さいという条件より X_6 で一般性が回復されている. よって (3.2) は uSC に通る.

一方, (3.1) で $\gamma=3$ のときは SC に通らない. この場合の差分方程式をスピン変数付きで超離散化すると次の方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
&\max[Y_{n+1}+Y_{n-1}+\max\{S(\sigma_{n+1})+S(-\sigma_{n-1}),S(-\sigma_{n+1})+S(\sigma_{n-1})\},A-2Y_n,-3Y_n+S(\sigma_n)]\\
&=\max[Y_{n+1}+Y_{n-1}+\max\{S(\sigma_{n+1})+S(\sigma_{n-1}),S(-\sigma_{n+1})+S(-\sigma_{n-1})\},-3Y_n+S(-\sigma_n)]
\end{aligned}\tag{3.7}$$

$X_n\neq(-1,-A)$ ならば, (3.7) は以下の発展形式に書き直される.

$$\sigma_{n+1}=\sigma_{n-1}\left[\frac{\sigma_n}{2}\{1-\mathrm{sgn}(A+Y_n)\}+\frac{1}{2}\{1+\mathrm{sgn}(A+Y_n)\}\right]\tag{3.8}$$

$$Y_{n+1}=\max(A-2Y_n,-3Y_n)-Y_{n-1}\tag{3.9}$$

(3.7) の特異点は $X_n=(-1,-A)$ であり, このとき $\sigma_{n+1}=1$ または $\sigma_{n-1}=-1$, $Y_{n+1}\le 3A-Y_{n-1}$ となる.

前と同じ条件のもとで時間発展させると以下の通りになる.

$$\begin{aligned}
&X_0=(1,F)\\
&X_1=(-1,-A)\\
&X_2=(1,Y_2),\ \text{ただし}\ Y_2\le 3A-F\\
&X_3=(-1,A-3Y_2)\\
&X_4=(1,-A+5Y_2)\\
&X_5=(-1,2A-12Y_2)\\
&X_6=(1,-2A+19Y_2)\\
&X_7=(-1,4A-45Y_2)\\
&X_8=(1.-5A+71Y_2)
\end{aligned}\tag{3.10}$$

(3.10) の一般項は以下のように表される.

$$\sigma_n = (-1)^n \tag{3.11}$$

$$Y_{2m} = \left\{ \frac{12-7\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^m + \frac{12+7\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^m - 1 \right\} A + \left\{ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^m + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^m \right\} Y_2 \tag{3.12}$$

$$Y_{2m+1} = \left\{ \frac{15-8\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^m + \frac{15+8\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^m - 1 \right\} A + \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^m + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^m \right\} Y_2 \tag{3.13}$$

ただし $m = 1, 2, 3, \ldots$ である. (3.10) は再び特異点に戻らないため, (3.7) は uSC には通らない.

最後に, 次の差分方程式 [1] を考える.

$$(x_{n+1} + x_{n-1})x_n = ax_n + 1 \tag{3.14}$$

ここで $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ はパラメータであり, (3.14) は SC に通る. 以下, $a > 0$ の場合を考える.

(3.14) の特異点 $x_n = 0$ は, 超離散極限をとった後の方程式では現れない. よって, この特異点を $x_n = \tilde{x}_n + a/2$ によって $\tilde{x}_n = -a/2$ にシフトすると, $\tilde{x}$ に対する以下の方程式が得られる.

$$(\tilde{x}_{n+1} + \tilde{x}_{n-1})\left(\tilde{x}_n + \frac{a}{2}\right) = 1 \tag{3.15}$$

(3.15) をスピン変数付きで超離散化すると以下の方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
&\max[\max\{Y_{n+1} + S(\sigma_{n+1}), Y_{n-1} + S(\sigma_{n-1})\} + \max\{Y_n + S(\sigma_n), A\},\\
&\max\{Y_{n+1} + S(-\sigma_{n+1}), Y_{n-1} + S(-\sigma_{n-1})\} + Y_n + S(-\sigma_n)]\\
&= \max[\max\{Y_{n+1} + S(-\sigma_{n+1}), Y_{n-1} + S(-\sigma_{n-1})\} + \max\{Y_n + S(\sigma_n), A\},\\
&\max\{Y_{n+1} + S(\sigma_{n+1}), Y_{n-1} + S(\sigma_{n-1})\} + Y_n + S(-\sigma_n), 0]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.16) の時間発展形式は以下の通りである.

$$\sigma_{n+1} = \begin{cases} -\mathrm{sgn}\{Y_{n-1} + \max(Y_n, A)\} & (\sigma_{n-1} = 1, \sigma_n = 1 \text{ のとき}) \\ \mathrm{sgn}(A - Y_n)\mathrm{sgn}\{\max(Y_n, -Y_{n-1}) - A\} & (\sigma_{n-1} = 1, \sigma_n = -1 \text{ のとき}) \\ 1 & (\sigma_{n-1} = -1, \sigma_n = 1 \text{ のとき}) \\ \mathrm{sgn}(A - Y_n)\mathrm{sgn}\{\max(A, -Y_{n-1}) - Y_n\} & (\sigma_{n-1} = -1, \sigma_n = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3.17}$$

$$Y_{n+1} = \max\{Y_{n-1}, -\max(A, Y_n)\} \tag{3.18}$$

ただし (3.17), (3.18) は以下の場合には成り立たない.

$$\sigma_{n-1} = 1, \sigma_n = 1, Y_{n-1} = -\max(Y_n, A) \tag{3.19}$$

$$\sigma_{n-1} = 1, \sigma_n = -1, A = \max(Y_n, -Y_{n-1}) \tag{3.20}$$

$$\sigma_{n-1} = -1, \sigma_n = -1, Y_n = \max(A, -Y_{n-1}) \tag{3.21}$$

$$Y_{n-1} > -A, \sigma_n = -1, Y_n = A \tag{3.22}$$

$$Y_{n-1} \leq -A, \sigma_n = -1, Y_n = A \tag{3.23}$$

(3.19), (3.20), (3.21) のとき $\sigma_{n+1} = 1$ または $\sigma_{n+1} = -1$, $Y_{n+1} \le \max\{Y_{n-1}, -\max(Y_n, A)\}$, (3.22) のとき $\sigma_{n+1} = 1$ または $\sigma_{n+1} = -1$, $Y_{n+1} > -A$, (3.23) のとき $\sigma_{n+1} = 1$ または $\sigma_{n+1} = -1$, Y_{n+1} は任意となる．しかし, これらは任意の X_{n-1} に対する不定性ではないので, X_{n+1} は特異性ではない．一方, (3.16) に一般の初期値 $X_{n-1} = (\sigma_{n-1}, Y_{n-1})$ と $X_n = (-1, A)$ を代入すると $\sigma_{n+1} = 1$ または $\sigma_{n+1} = -1$, $Y_{n+1} \ge \max(Y_{n-1}, -A)$ が得られるので, (3.16) の特異点は $X_n = (-1, A)$ である．

初期値 $X_0 = (1, F)$ と特異点 $X_1 = (-1, A)$ をとり, Y_2 を十分に大きいと仮定して時間発展させると以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&X_0 = (1, F)\\
&X_1 = (-1, A)\\
&X_2 = (1, Y_2),\ \text{ただし } Y_2 \ge \max(F, -A)\\
&X_3 = (1, A)\\
&X_4 = (-1, Y_2)\\
&X_5 = (-1, A)\\
&X_6 = (1, Y_6)\ \text{または } (-1, Y_6),\ \text{ただし } Y_6 \le Y_2,
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

(3.24) においては, X_5 で特異点が現れ, X_6 で一般性が回復されている．よって, (3.16) は uSC に通る．

尚, (3.14) の特異点を $\tilde{x}_n = -a/2$ 以外にシフトすると, 特異性が周期的に現れる時間発展が存在する．このような時間発展に対して uSC を拡張することは今後の課題である．

4　結論

本稿では, 差分方程式の各項をスピン変数と振幅変数に分離することにより, 差分方程式の値を正に制限せずに超離散化する手法 (スピン変数付き超離散化) を導入した．この手法を用いると, もとの差分方程式の特徴をより多く保存するような超離散方程式が得られる．

スピン変数付き超離散方程式は陰的な方程式であるため, 時間発展が一意に定まらない場合がある．特に, 一般の X_{n-1} に対して X_{n+1} が不定になるような特別な値 X_n を, 2 階超離散方程式の特異点と定義した．すると, SC に通る差分方程式から得られる超離散方程式には, 特異性が現れた後に初期値の一般性が回復されるような時間発展が存在することが確かめられた．この性質の有無を確かめることを超離散特異点閉じ込めテスト (uSC) と定義し, 超離散方程式の可積分性判定法として提案した. SC の場合と同様に, uSC は超離散方程式の非自励化や超離散ソリトン方程式への応用も期待される．

参考文献

[1] Grammaticos B, Ramani A and Papageorgiou V 1991 Phys. Rev. Lett. **67** 1825

[2] Grammaticos B and Ramani A 2002 ANZIAM J. **44** 21

[3] Hietarinta J and Viallet C 1998 Phys. Rev. Lett. **81** 325

[4] Tsuda T, Ramani A, Grammaticos B and Takenawa T 2007 Lett. Math. Phys. **82** No.1 39

[5] Takenawa T 2001 J. Phys. A:Math. Gen. **34** L95

[6] Grammaticos B, Ramani A, Tamizhmani K M, Tamizhmani T and Carstea A S 2007 J.Phys. A:Math. Theor. **40** F725

[7] Joshi N and Lafortune S 2005 J.Phys. A:Math. Gen. **38** L499

[8] Mimura N, Isojima S, Murata M and Satsuma J 2009 Singularity confinement test for ultradiscrete equations with spin variables *In preparation*

[9] Isojima S, Grammaticos B, Ramani A and Satsuma J 2006 J.Phys. A:Math. Gen. **39** 3663