九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

離散KP方程式のリダクションから得られる超離散ソリトン系について

吉田, 真将
公立はこだて未来大学複雑系科学科

由良, 文孝
公立はこだて未来大学複雑系科学科

https://doi.org/10.15017/14303

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (31), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「**非線形波動の数理と物理**」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 31 (pp. 182-187)

離散KP方程式のリダクションから得られる超離散ソリトン系について

吉田 真将 (YOSHIDA Masanobu),
由良 文孝 (YURA Fumitaka)

（Received February 3, 2009）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

離散KP方程式のリダクションから得られる超離散ソリトン系について

公立はこだて未来大学 複雑系科学科　吉田 真将　(YOSHIDA Masanobu)
由良 文孝　(YURA Fumitaka)

概 要

箱玉系は離散 KdV 方程式や離散 Lotka-Volterra 方程式の超離散化として与えられる．これらの方程式は離散 KP 方程式のリダクションとして理解されるが, このリダクション条件を変えることにより箱玉系に類似した超離散ソリトン系を得たので報告する．この系は箱玉系や番号付き箱玉系を含んだモデルとなっている．

1　はじめに

ソリトン解をもつ超離散系として, 箱玉系 [1] やその拡張としての番号付き箱玉系や運搬車付き箱玉系はよく知られている．また, A 型以外への拡張としてのクリスタルを用いた定式化による系, 戸田格子方程式に付随する戸田型セルオートマトン [3, 4] や, 最近では FST 格子に付随する系の超離散化 [5] も議論されている．

可積分性を判定するテストとして, 連続系においては Painlevé テスト, 離散系においては特異点閉じ込め法や代数的エントロピーによる方法が知られている．これらと比べ超離散系では, 離散系よりもさらに「可積分性」の意味があいまいである．しかしながら箱玉系は超離散可積分系とよぶにふさわしい系である．その根拠として, (1) N ソリトン解を持ち, 十分な量の保存量を持つこと, (2) 初期値問題が解けること, (3) 離散可積分系から超離散化で導けること, などが挙げられる．ここで例えば, 超離散系において何らかの可積分性判定テストが, 良い十分条件として機能することを目指すならば, この箱玉系の拡張を考えることは重要であると思われる．

本研究では, 箱玉系を含んだ形でのリダクション条件を考察し, 箱玉系に類似した超離散ソリトン系を得たのでその基本的な性質を報告する．

2　リダクション条件

離散 KP 方程式は

$$\begin{aligned} &a_1(a_2-a_3)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)\\ &+a_2(a_3-a_1)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\ &+a_3(a_1-a_2)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n) \quad = \quad 0 \end{aligned} \tag{1}$$

である．ここで $\delta := \dfrac{a_2(a_3-a_1)}{a_1(a_2-a_3)}$ とし, 条件 $\tau(l+P,m+Q,n+1)=\tau(l,m,n)\equiv f_l^m$ を課すと,

$$(1+\delta)f_{l-P}^{m-Q}f_{l+1}^{m+1} = f_{l+1}^{m}f_{l-P}^{m-Q+1} + \delta f_l^{m+1}f_{l-P+1}^{m-Q} \tag{2}$$

を得る．この式は次のように超離散化される．$f_l^m = \exp(F_l^m/\epsilon)$, $\delta = \exp(-L/\epsilon)$ とし，両辺の $\lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\log$ を取ることにより

$$F_{l-P}^{m-Q} + F_{l+1}^{m+1} = \max\left(F_{l+1}^m + F_{l-P}^{m-Q+1}, F_l^{m+1} + F_{l-P+1}^{m-Q} - L\right) \tag{3}$$

を得る．ここで

- $(P,Q) = (0,0), (0,-1), (-1,0)$ のとき，自明な 4 点間の関係式となる．
- $(P,Q) = (-1,1)$ とし，座標変換 $m \to m+l$ を行うと

  $$F_l^{m-1} + F_l^{m+1} = \max\left(2F_l^m, F_{l-1}^m + F_{l+1}^m - L\right) \tag{4}$$

  となり，文献 [3] の式 (45) に示された戸田型セルオートマトンとなる．また $(P,Q) = (1,-1)$, $(-1,-1)$ のときも，5 点間の関係式となる．
- $P = 0$ とすると，文献 [2] の式 (12)

  $$F_l^{m-Q} + F_{l+1}^{m+1} = \max\left(F_{l+1}^m + F_l^{m-Q+1}, F_l^{m+1} + F_{l+1}^{m-Q} - L\right) \tag{5}$$

  となり玉の種類が Q 種の番号付き箱玉系となる．

3 従属変数変換について

以降，簡単のため式 (2) について考える (超離散化した式 (3) を用いても同様の議論ができる)．6 点間の関係を考慮し，次の 3 種類の従属変数を取る．

$$a_l^m := \frac{f_l^m f_{l-1}^{m-1}}{f_{l-1}^m f_l^{m-1}}, \qquad b_l^m := \frac{f_l^m f_{l-P}^{m-Q+1}}{f_l^{m+1} f_{l-P}^{m-Q}}, \qquad c_l^m := \frac{f_l^m f_{l-P+1}^{m-Q}}{f_{l+1}^m f_{l-P}^{m-Q}} \tag{6}$$

このとき，式 (2) に等価な次の 2 式が成立する．

$$(1+\delta)a_{l+1}^{m+1} = b_l^m + \delta c_l^m \tag{7a}$$

$$(1+\delta)a_{l-P+1}^{m-Q+1} = b_{l+1}^m + \delta c_l^{m+1} \tag{7b}$$

また，$f_l^m \to 1 (l \to -\infty)$ の境界条件のもとで

$$r_l^m := \frac{f_{l-P+1}^{m-Q}}{f_{l+1}^m} = \prod_{k=-\infty}^{l} c_k^m, \qquad b_l^m = \frac{r_{l-1}^{m+1}}{r_{l-1}^m} \tag{8}$$

が成立する．式 (7a), (7b), (8) より次式を得る．

$$c_{l+P}^{m+Q+1} = c_l^m \left(\frac{r_{l-1}^{m+1}}{r_l^m} + \delta\right)\left(\frac{r_{l+P-1}^{m+Q+1}}{r_{l+P}^{m+Q}} + \delta\right)^{-1} \tag{9}$$

これは超離散化可能であり，$c_l^m = \exp(C_l^m/\epsilon)$, $r_l^m = \exp(R_l^m/\epsilon)$, $\delta = \exp(-L/\epsilon)$ と変換することにより，

$$C_{l+P}^{m+Q+1} = C_l^m + \max\left(R_{l-1}^{m+1} - R_l^m, -L\right) - \max\left(R_{l+P-1}^{m+Q+1} - R_{l+P}^{m+Q}, -L\right) \tag{10}$$

を得る．超離散双線形形式は式 (3) で与えられており，また

$$C_l^m = F_l^m + F_{l-P+1}^{m-Q} - F_{l+1}^m - F_{l-P}^{m-Q}, \tag{11}$$

$$R_l^m = \sum_{k=-\infty}^{l} C_k^m = F_{l-P+1}^{m-Q} - F_{l+1}^m \tag{12}$$

の関係が成り立っている．

4 非自律箱玉系 (nonautonomous BBS) との関係

本節では autonomous な式 (10) から「nonautonomous な」箱玉系を導出する．まず式 (10) において, $(P,Q)=(0,1)$ とする．

$$C_l^{m+2}=C_l^m+\max\left(R_{l-1}^{m+1}-R_l^m,-L\right)-\max\left(R_{l-1}^{m+2}-R_l^{m+1},-L\right) \tag{13}$$

これは玉の種類が 1 種類の（オリジナル）箱玉系を与えるリダクションであり, 双線形形式は式 (5) において $Q=1$ とした場合に相当する．しかし前節で与えた従属変数変換は文献 [2] と違うため, 式 (13) は 2 階の方程式となっている．ここで $C_l^m=R_l^m-R_{l-1}^m$ に注意して次式を得る．

$$C_l^{m+2}-\min\left(L-C_l^{m+1},R_{l-1}^{m+1}-R_{l-1}^{m+2}\right)=C_l^{m+1}-\min\left(L-C_l^m,R_{l-1}^m-R_{l-1}^{m+1}\right)$$

左辺と右辺で m が 1 ずれているだけであるから, X_l を m に依存しないとして,

$$C_l^{m+1}=X_l+\min\left(L-C_l^m,R_{l-1}^m-R_{l-1}^{m+1}\right) \tag{14}$$

が得られる．ここでさらに $D_l^m:=C_l^m-X_l$ とおくと,

$$D_l^{m+1}=\min\left[(L-X_l)-D_l^m,\sum_{k=-\infty}^{l-1}D_k^m-\sum_{k=-\infty}^{l-1}D_k^{m+1}\right] \tag{15}$$

となり, 箱の容量 $(L-X_l)$ の非自律箱玉系を得る．逆に式 (13) を, 非自律箱玉系 (15) の自律化として考えることもできる．

5 ソリトン解

式 (3) のソリトン解について述べる．1 ソリトン解として次の形を仮定する．

$$F_l^m=\max(0,Kl+\Omega m) \tag{16}$$

この仮定のもとで式 (3) より

$$|K(P+1)+\Omega(Q+1)|=\max\left(|K(P+1)+\Omega(Q-1)|,|K(P-1)+\Omega(Q+1)|-2L\right) \tag{17}$$

また, 2 ソリトン解として式 (17) を満たす $(K,\Omega)=(K_1,\Omega_1),(K_2,\Omega_2)$ に対して

$$F_l^m=\max\left(0,K_1l+\Omega_1m,K_2l+\Omega_2m,(K_1+K_2)l+(\Omega_1+\Omega_2)m+A_{12}\right) \tag{18}$$

を仮定する．上と同様に式 (3) へ代入して,

$$\begin{aligned}
&\max\Big(\quad|(K_1+K_2)(P+1)+(\Omega_1+\Omega_2)(Q+1)|+2A_{12},\\
&\qquad\quad|(K_1-K_2)(P+1)+(\Omega_1-\Omega_2)(Q+1)|\quad\Big)\\
=\;&\max\Big(\quad|(K_1-K_2)(P+1)+(\Omega_1-\Omega_2)(Q-1)|,\\
&\qquad\quad|(K_1-K_2)(P-1)+(\Omega_1-\Omega_2)(Q+1)|-2L,\\
&\qquad\quad|(K_1+K_2)(P+1)+(\Omega_1+\Omega_2)(Q-1)|+2A_{12},\\
&\qquad\quad|(K_1+K_2)(P-1)+(\Omega_1+\Omega_2)(Q+1)|+2A_{12}-2L\quad\Big)
\end{aligned} \tag{19}$$

を得る．以下この方程式を解くことにより, 基本的なソリトン解を示す．また, これ以降 $L>0$ とする．

5.1 $P \geq 0, Q \geq 1$ の場合

超離散分散関係は, $K = L + \max\left(0, \dfrac{Q}{P+1}\Omega - L\right) - \max\left(0, \dfrac{Q}{P+1}\Omega + L\right)$, または $\Omega = 0$ である. 位相のずれ A_{12} は, $|\Omega_1|, |\Omega_2| \geq L\dfrac{P+1}{Q}$ のとき ($K_1 = K_2 = -L$),

$$A_{12} = [-(Q+1)\min(\Omega_1, \Omega_2) + LP]\,\mathrm{sgn}(\Omega_1\Omega_2)$$

である. 図 1(右) は $\Omega_1 = 2, \Omega_2 = 3, \Omega_3 = 4$ としたものである. 簡単な計算により"1"が ($|\Omega|Q - P$) 個連なったソリトンは速度 $|\Omega|$ で移動することがわかる. $(P, Q) = (0, 1)$ とした箱玉系はこの特別な場合にあたる.

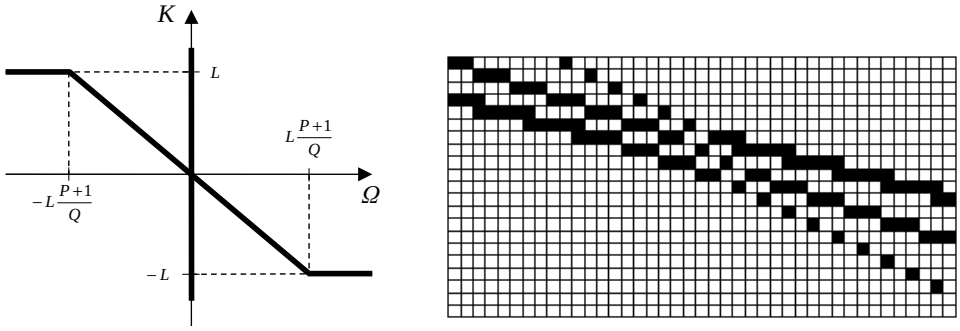

図 1: (左) $P \geq 0, Q \geq 1$ の場合の分散関係. (右) 3 ソリトンの例 ($P = 3, Q = 2, L = 1$)

5.2 $P \geq 1, -P-1 \geq Q \geq -1$ の場合

分散関係は, $K = -\dfrac{Q}{P+1}\Omega$, または $\Omega = 0$ である. この場合, ソリトンの速度が $-\dfrac{P+1}{Q}$ と一定であるために衝突は起こらない.

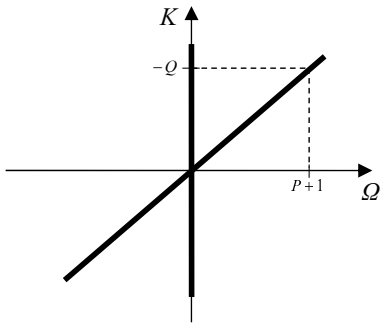

図 2: $P \geq 1, -P-1 \geq Q \geq -1$ の場合の分散関係

5.3 $P \geq 1, Q < -P-1$ の場合

分散関係は,
$K = -\dfrac{(Q+1)\Omega - L}{P} - \dfrac{1}{P}\left[\min\left(0, \dfrac{P+Q+1}{P+1}\Omega + L\right) - \min\left(0, \dfrac{P+Q+1}{P+1}\Omega - L\right)\right]$,
または $\Omega = 0$ である. 図 3(右) は $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = 5, \Omega_3 = 10$ としたものである. 分散の変化が小さいために重なっているが, 長い時間をかけて衝突を起こしていることがわかる. 速度に上限と下限があることもこのパラメータの特徴である.

5.4 $-Q-1 < P \leq -1, 1 \leq Q$ の場合

分散関係は, $K = -\dfrac{(Q+1)\Omega - L}{P} - \dfrac{1}{P}\left[\min\left(0, \dfrac{P+Q+1}{P+1}\Omega + L\right) - \min\left(0, \dfrac{P+Q+1}{P+1}\Omega - L\right)\right]$
(ただし $P = -1$ のときは $\lim_{P \to -1}$ とする),

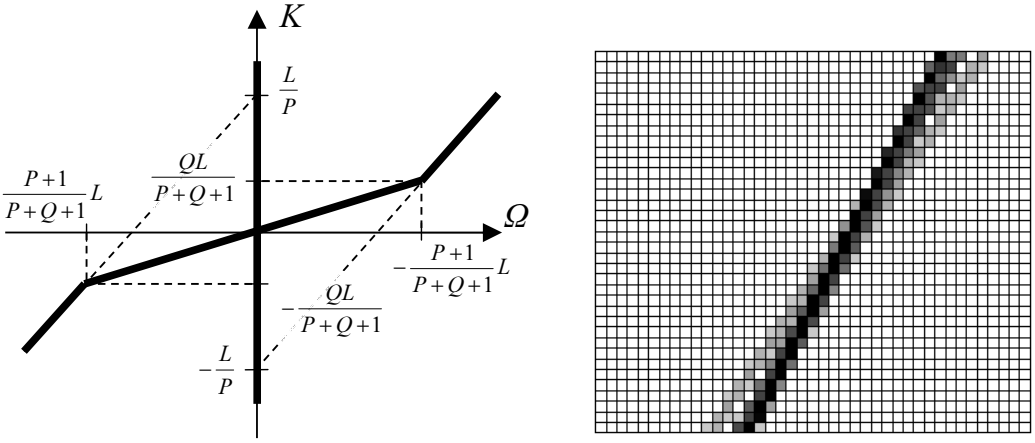

図 3: (左) $P \geq 1, Q < -P-1$ の場合の分散関係 (右) 3 ソリトンの例 ($P=1, Q=-3, L=1$)

$K = L(\Omega < 0)$, $K = -L(\Omega > 0)$ または $\Omega = 0(-L \leq K \leq L)$ である. 図 4(右) は $\Omega_1 = 1/2, \Omega_2 = 2, \Omega_3 = 6$, $K_1 = -1, K_2 = 13/2, K_3 = -1$ としたものである. 図 4(左) の分散関係よりわかるように, このパラメータのときに左右両方向へ走るソリトンが混在する.

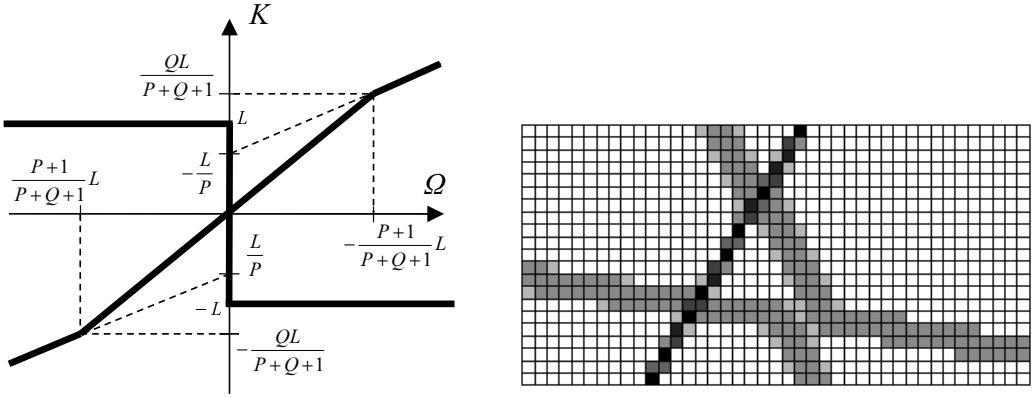

図 4: (左) $-Q-1 < P \leq -1, 1 \leq Q$ の場合の分散関係 (右) 3 ソリトンの例 ($P=-2, Q=2, L=1$)

5.5 $P \leq -Q-1, 1 \leq Q$ の場合

分散関係は, $K = -\dfrac{Q}{P+1}\Omega$, $K = L(\Omega < 0)$, $K = -L(\Omega > 0)$ または $\Omega = 0(-L \leq K \leq L)$ である. 図 5(右) は $\Omega_1 = 1/3, \Omega_2 = 2, \Omega_3 = 10$, $K_1 = K_2 = K_3 = -1$ としたものである.

5.6 $P \leq -1, Q \leq -1$ の場合

分散関係は, $K = L(-\dfrac{P+1}{Q}L < \Omega < 0)$, $K = -L(0 < \Omega < \dfrac{P+1}{Q}L)$, $K = -\dfrac{Q}{P+1}\Omega(-L \leq K \leq L)$, または $\Omega = 0(-L \leq K \leq L)$ である. このパラメータのとき, 式 (18) で仮定した 2 ソリトン解が存在しない. 例えば相異なる $(\Omega_1, -L)$ と $(\Omega_2, -L)$ を取ると, $\Omega_1 = \Omega_2$ となり 1 ソリトンしか存在しないことがわかる. このとき、式 (3) の左辺に現れる 2 点が, 右辺に現れる 4 点の凸包に含まれており時間発展を明示しない. 式 (10) についても同様である.

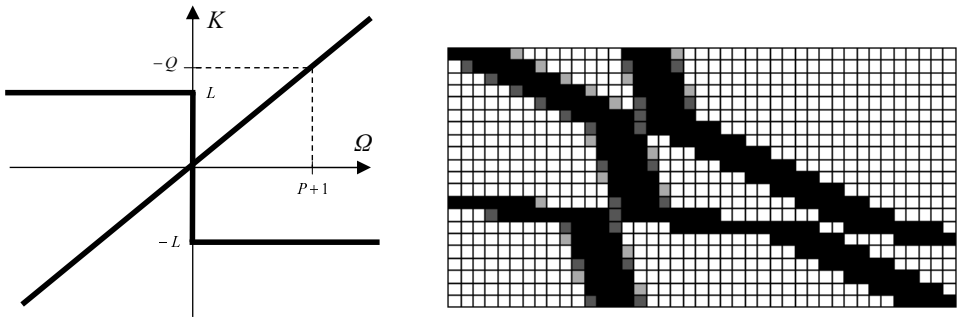

図 5: (左) $P+Q+1 \leq 0, Q \geq 1$ の場合の分散関係 (右) 3 ソリトンの例 ($P=-4, Q=1, L=1$).

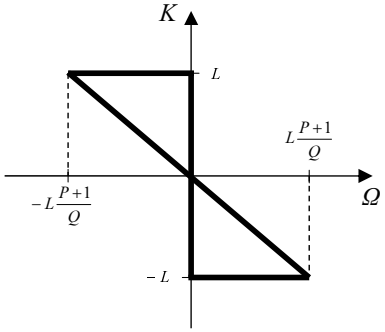

図 6: $P \leq -1, Q \leq -1$ における分散関係

6 今後の課題

4 章では箱の容量の非自律化について述べたが, 4 変数の離散 KP 方程式からのリダクションにより運搬車の自由度についても同様の手続きが可能であると考えられる. また, 一般の (P, Q) の場合について, 番号付き箱玉系における玉の番号と動かし方のルールのような組み合わせ論的な解釈が可能かどうか調べることは今後の課題である.

7 謝辞

本研究集会への参加にあたり, 文部科学省 GCOE プログラム「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」および九州大学応用力学研究所より, 旅費の補助を頂きました. この場をお借りして感謝いたします. また本研究は科学研究費補助金 (若手 (B) 19740053) の補助により進められたものであることを付記します.

参考文献

[1] D. Takahashi and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn **59** (1990) 3514-3519.

[2] T. Tokihiro, D. Takahashi and J. Matsukidaira, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000) 607-619.

[3] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii, Phys. Lett. A **225** (1997) 287-295.

[4] D. Takahashi and J. Matsukidaira, Phys. Lett. A **209** (1995) 184-188.

[5] 西本武志, 辻本諭, 日本応用数理学会年会 講演予稿集 (2008) 201-202.