

## 回転浮遊液滴の形状及び振動に関する研究

崔, 大宇  
東京大学工学系研究科

江口, 隆大  
東京大学工学部

<https://doi.org/10.15017/14301>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (29), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7  
「非線形波動の数理と物理」(研究代表者 矢嶋 徹)  
共催 九州大学グローバル COE プログラム  
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7  
*Mathematics and Physics in Nonlinear Waves*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by  
*Kyushu University Global COE Program*  
*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

Article No. 29 (pp. 171-174)

# 回転浮遊液滴の形状及び 振動に関する研究

崔 大宇 (CHOI Daewoo), 江口 隆大 (EGUCHI Takahiro)

( Received January 28, 2009 )



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
February, 2009

# 回転浮遊液滴の形状及び振動に関する研究

東京大学工学系研究科 崔大宇 (CHOI Daewoo)  
東京大学工学部 江口隆大 (EGUCHI Takahiro)

概要 液滴の挙動解析や制御に関する研究は宇宙環境での新しい材料の開発や車・航空機のエンジンの燃料噴霧の問題など幅広い分野で応用が期待されている。本研究はそれらの基礎研究の一環として、本研究では浮遊する液滴を回転させたときの形状や振動及び大変形挙動を理論的に解析することを目的としている。理論に関しては JAXA (宇宙航空研究開発機構) による回転浮遊液滴の実験結果との検証も行っている。

## 1 はじめに

回転液滴における軸対称形状の平衡状態については Rayleigh[1], Chandrasekhar[2], Ross[3] によって理論的解析が行われてきたが、軸対称形状から 2 分化形状形状の非軸対称形状にいたる回転液滴の回転速度と平衡形状の関係性は、Brown & Scriven[4] によってコンピュータによる有限要素法を用いて表された。すでに我々は、2 分化形状に関する理論的な考察を回転軸に垂直な軸に関して対称な形状という近似を用いることで 2 分化形状を理論的に求める方法を構築した。近年の浮遊液滴を用いた回転実験では、Brown と Scriven の数値計算結果をの比較が主に行われており、本研究でも Fig.1 においてこれとの比較を行っている。また、JAXA による実験との比較も行っている。

Fig.1 では角運動量をあげるに従って角速度も上昇するのだが、無次元回転数が 0.5 ~ 0.6 あたりで 2 分化形状に遷移すると、それ以降は角運動量をあげても回転数は下がって行き、いずれ分裂する様子が見て取れる。図中の Theoretical result[5] に関しては、本研究室における先行研究であり、回転軸に対称な形状と回転軸に垂直な軸に対称と仮定した 2 分化形状の 2 本の別々の式を解くことによって得られたものなので、2 本の曲線が現れている。そしてその遷移点あたりでは 3 軸不等の楕円体となっていることが予測されるため、これらの式ではモデル化できていないことがわかる。そこで今回は液滴の遷移点付近でのラグランジアンに注目することで 3 軸不等楕円体の安定性に関する考察する。

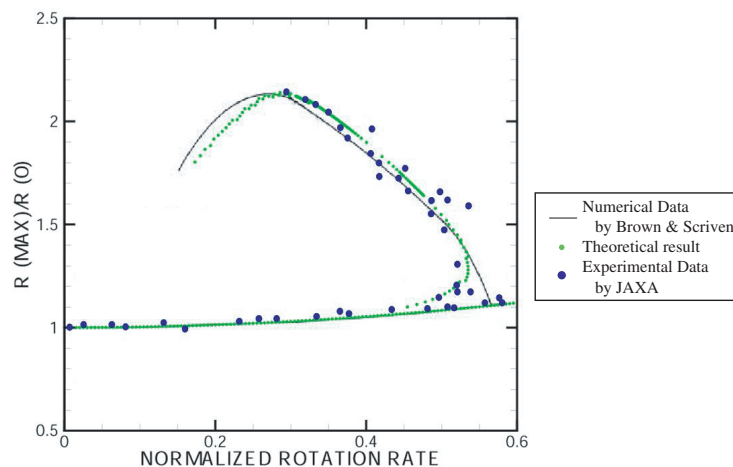


Fig. 1: Oblateness of the droplet as a function of normalized rotation rate

## 2 回転液滴のラグランジアン

回転する液体を  $2a, 2b, 2c$  を径とする楕円体 ( $a \geq b \geq c$ ) と考えることで、液滴のラグランジアンを考える。座標設定は以下の通り。

$$(x, y, z) = (a \sin \theta \cos \phi, b \sin \theta \sin \phi, c \cos \theta) \quad (2.1)$$

この座標設定の下で、液滴の表面積は以下のように求めることができる。

$$S = 2\pi c^2 \left( 1 + b^* \sqrt{a^{*2} - 1} E(\alpha, k) + \frac{b^*}{\sqrt{a^{*2} - 1}} F(\alpha, k) \right) \quad (2.2)$$

ただし、

$$k^2 = \frac{1 - 1/b^{*2}}{1 - 1/a^{*2}}, \quad \alpha = \sin^{-1} \sqrt{1 - 1/a^{*2}}$$

ここでは簡単のため  $a/c = a^*$ ,  $b/c = b^*$  となる無次元量を導入した。また、 $F(\alpha, k)$ ,  $E(\alpha, k)$  はそれぞれ第1種、第2種楕円積分である。

一方、液滴に関しては非圧縮をかていしているのので、体積一定条件から  $r^3 = abc = a^* b^* c^3$  となり、 $c^2 = (r^3/a^* b^*)^{2/3}$  という形で、自由度を1つ減らすことが出来る。つまり、表面積は以下のように表すことができる。

$$S = 2\pi \frac{r^2}{(a^* b^*)^{2/3}} \left( 1 + b^* \sqrt{a^{*2} - 1} E(\alpha, k) + \frac{b^*}{\sqrt{a^{*2} - 1}} F(\alpha, k) \right) \quad (2.3)$$

ポテンシャルエネルギーは表面張力係数  $\alpha$  を用いて、 $U = \alpha S$  で求めることが出来るので以下のようなになる。ただし、ここでは球状態の液滴のポテンシャルエネルギー  $4\pi\alpha r^2$  で割った値を無次元ポテンシャルエネルギー  $U^*$  とした。

$$U^* = \frac{U}{4\pi\alpha r^2} = \frac{1}{2(a^* b^*)^{2/3}} \left( 1 + b^* \sqrt{a^{*2} - 1} E(\alpha, k) + \frac{b^*}{\sqrt{a^{*2} - 1}} F(\alpha, k) \right) \quad (2.4)$$

同様に、 $4\pi\alpha r^2$  で割って無次元化された運動エネルギー  $T^*$  を求める。液滴の慣性モーメントは

$$I = \frac{1}{5} (a^2 + b^2) \rho \frac{4}{3} \pi abc = \frac{4}{15} \pi \rho (a^2 + b^2) abc \quad (2.5)$$

と計算できるので、 $T^*$  は以下のように求めることが出来る。

$$T^* = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{2}{15} \Omega^2 \pi \rho (a^2 + b^2) abc / 4\pi\alpha r^2 \quad (2.6)$$

ここで、液滴の密度を  $\rho$ 、回転数を  $\Omega$  とした。この式に、回転数を2次モードの固有振動数で割った無次元回転数  $\Omega/\omega = \sqrt{\rho r^3 \Omega^2 / 8\alpha}$  を用いると、以下のようなになる。

$$T^* = \frac{4}{15(a^* b^*)^{2/3}} \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 (a^{*2} + b^{*2}) \quad (2.7)$$

以上より無次元化したラグランジアン  $L^*$  を求めると式 (2.8) のようになる。

$$\begin{aligned} L^* &= U^* - T^* \\ &= \frac{1}{2(a^* b^*)^{2/3}} \left( 1 + b^* \sqrt{a^{*2} - 1} E(\alpha, k) + \frac{b^*}{\sqrt{a^{*2} - 1}} F(\alpha, k) - \frac{8}{15} \left( \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 (a^{*2} + b^{*2}) \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

この式において無次元回転数  $\Omega/\omega$  を  $0.4 \sim 0.65$  の間で定め、パラメータを  $a^*$ ,  $b^*$  として  $L^*$  を描いたのが、次に示す Fig.2 ~ Fig.7 である。

無次元回転数が 0.50 以下では,  $a^* = b^*$  上に停留点が存在することが見て取れるが, 0.60 や 0.65 では  $a^* = b^*$  上が不安定であり, よりラグランジアンの高い  $a^* \neq b^*$  の方に安定点を持つことがわかる.

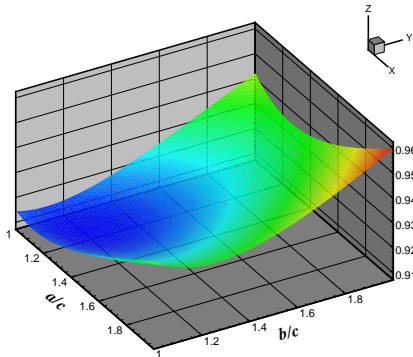


Fig. 2: Lagrangian Surface ( $\Omega/\omega = 0.40$ )

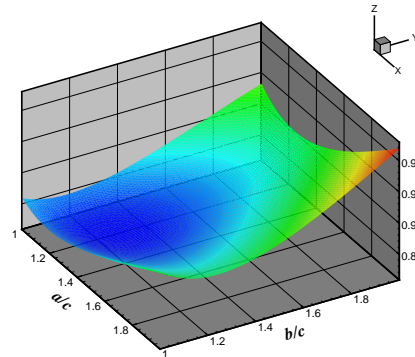


Fig. 3: Lagrangian Surface ( $\Omega/\omega = 0.45$ )

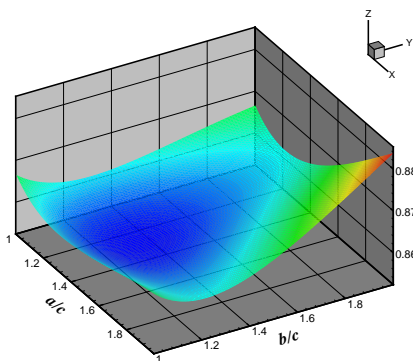


Fig. 4: Lagrangian Surface ( $\Omega/\omega = 0.50$ )

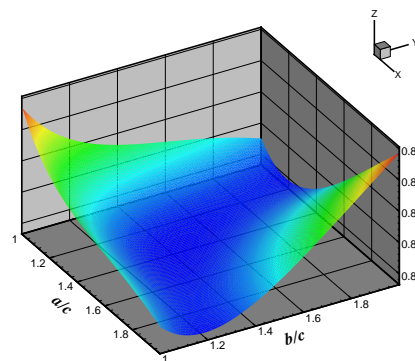


Fig. 5: Lagrangian Surface ( $\Omega/\omega = 0.55$ )

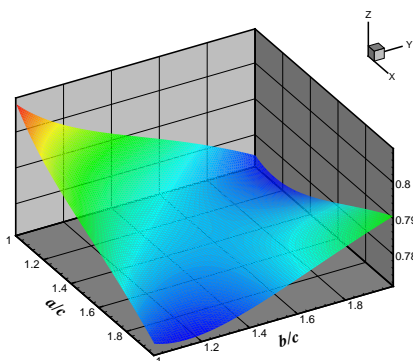


Fig. 6: Lagrangian Surface ( $\Omega/\omega = 0.60$ )

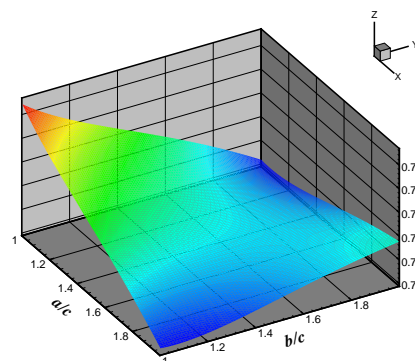


Fig. 7: Lagrangian Surface ( $\Omega/\omega = 0.65$ )

### 3 最後に

ラグランジアンを基にした今回の解析によると, 無次元回転数  $\Omega/\omega = 0.57$  付近にて  $a^* = b^*$  上での安定点が消えた. これを言い換えると  $\Omega/\omega = 0.57$  以下であれば, 安定した回転軸対称形状をとることができるが, それ以上の場合はよりラグランジアンの高い  $a^* \rightarrow 1$  もしくは  $b^* \rightarrow 1$ , つまり回転軸に垂直な軸に対して対称な形状をとることがわかる. 今回は液滴の形状として楕円体を仮定しているので, 球が2つくっついたような2分化形状を表現することが出来ないが, 今後2分化形状のラグランジアンも調べることで, ラグランジアン観点から形状を一意に決定することが出来ると考えられる.

#### 参考文献

- [1] Rayleigh, L.: “The equilibrium of revolving liquid under capillary force”, *Phil. Mag.*, **vol28** (1914), pp.161-170.
- [2] Chandrasekhar, S.: “Stability of a Rotating Liquid Drop”, *Proc.R.Soc.London*, **A286** (1965), pp.1-26.
- [3] Ross, D.K.: “The shape and energy of a revolving liquid mass held together by surface tension,” *Aust. J. Phys.*, **vol21** (1968), pp.823-835.
- [4] Brown, R.A. and Scriven, L.E.: “The shape and stability of rotating liquid drops,” *Proc.R.Soc.London*, **A371** (1980), pp.331-357.
- [5] 榎佑作: “回転にともなう液滴の形状分岐と固有振動数変化”, 東京大学修士論文 (2008).