九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

微分-差分-超離散OV モデルについて

高橋, 大輔
早稲田大学理工学術院

松木平, 淳太
龍谷大学理工学部

https://doi.org/10.15017/14292

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (20), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「**非線形波動の数理と物理**」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 20 (pp. 127-132)

微分–差分–超離散 OV モデルについて

高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke),
松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA Junta)

（Received February 6, 2009）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

微分–差分–超離散 OV モデルについて

早稲田大学理工学術院　高橋大輔　(TAKAHASHI Daisuke)
龍谷大学理工学部　松木平淳太　(MATSUKIDAIRA Junta)

概　要　交通流の自然渋滞形成を再現する数学モデルのひとつに最適速度モデル（OV モデル）が知られている．このモデルは複数台の車が 1 方向 1 車線で走る状況を想定しており，連立常微分方程式の形で記述されている．本研究ではこの最適速度モデルの超離散化を試みた．超離散化のためにはまず方程式の差分化を行うが，この際に超離散化の負の問題が生じないような差分化が必要である．どのように超離散化可能な差分化を行うか，そして得られた超離散方程式からどのようなセルオートマトンモデルが導かれるかなどについて解説する．

1　はじめに

坂東らによって提案された最適速度モデル（Optimal Velocity モデル，以下 OV モデル）は，交通流の自然渋滞形成を再現する強力なモデルとして知られている [1]．本研究ではこのモデルの超離散化が最大の目的なので，まずモデルの定義を紹介する．図 1 のような 1 方向 1 車線のサーキットを考えよう．車は K 台あるとし，左回りに順に 1 番, 2 番, $\cdots$, K 番というふうに車に番号が付いている．そしてサーキットのある点を原点にして測った時刻 t での k 番目の車の位置を $x_k(t)$ とする．

OV モデルとは車の運動を以下の常微分方程式で記述する数学モデルである．

$$\ddot{x}_k = A\{V(x_{k+1} - x_k) - \dot{x}_k\} \tag{1.1}$$

$V(\Delta x)$ は最適速度関数と呼ばれ，運転者が自分の車と直近の前方車との車間距離 Δx に応じて出したいであろう自分の車の速度をモデル化したものである．そのプロフィールはおおむね図 2 のようなものであり，車間距離が小さいときは速度は小さく，ある程度以上の車間距離になるにつれ速度がどんどん大きくなるが，法定速度などの上限のせいで $V_{\max}$ で頭打ちになる．

車はアクセルやブレーキによる加減速の制御によって運行される．OV モデルではその加減速の決定を (1.1) のようにモデル化する．すなわち，最適速度 ($V(x_{k+1} - x_k)$) と現在の実際の速度 ($\dot{x}_k$) との差に比例して，比例係数 A で加減速 ($\ddot{x}_k$) を決めるのである．このモデルがいかに現実の自然渋滞を再現するかについては [1] を始めとしてさまざまな文献に紹介されているのでそちらを参照してほしい．

ところで，自然渋滞形成の数理モデルは OV モデルの他にさまざまなものが提案されている．そして OV モデルは車の番号で連立させた連立常微分方程式の形をしているが，流体方程式をベースにした偏微分方程式 [2]，(1.1) の時間変数を離散化したようなカップルドマップラティス [3]，すべての変数が離散的なセルオートマトン [4, 5] などがモデルとして用いられている．

これら多々あるモデルを大まかに分類する指標のひとつとして，変数の離散度合いが考えられる．偏微分方程式の空間変数を離散化して連立常微分方程式，さらに時間変数も離散化してカップルドマップラティス，さらに状態変数（従属変数）も離散化してセルオートマトン (CA) というふうに，全変数連続から全変数離散まで幅広く交通流モデルは存在しており，どれも有効性が確認されている．

同じ渋滞形成という現象を異なる離散度合いのモデルによって再現できるということは，それらモデルの間に直接的な関連があってしかるべきである．その関連が分かれば，対応するそれぞれのモデルが互いの鏡となってより深くモデルの特性や有効性，限界などを知ることができるであろう．

このような直接的関連を示す典型的な例が偏微分方程式である Burgers 方程式の差分化および超離散化である [6]．超離散化は公式

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log(e^{A/\varepsilon}+e^{B/\varepsilon}+\cdots)=\max(A,B,\cdots) \tag{1.2}$$

を基礎とする従属変数の離散化手法であり，次式にその典型を示す．

$$x_{n+1}=\frac{c+x_n}{x_{n-1}} \quad \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{x_n=e^{X_n/\varepsilon},\quad c=e^{C/\varepsilon}} \quad X_{n+1}=\max(C,X_n)-X_{n-1} \tag{1.3}$$

上の X_n についての漸化式に関して，もしも X_n の初期値および C が整数であるなら任意の X_n は整数になる．このように自然な前提条件によって従属変数が離散化可能であり，上式の x_n の方程式から X_n の方程式を導くような手続きを超離散化と呼ぶ．

連続極限で Burgers 方程式に帰着する差分 Burgers 方程式を超離散化するとルール番号 184 の Elementary CA という 2 進デジタル系が得られる [7]．ここではその CA を Burgers CA と呼ぶことにする．Burgers 方程式も Burgers CA もともに渋滞形成のモデルとしてよく知られている．そして，Burgers CA の解の渋滞・非渋滞パターン選択の証明に，Burgers 方程式の初期値問題に対する解析学的手法を転用することが超離散化によって初めて可能となった．

本研究の主目的は，OV モデルの超離散化である．OV モデルは交通流モデルの中でも非常に有効性の高い部類に属し，その超離散化対応物が何になるかという問題はたいへん興味深い．超離散化を行うには，まず微分方程式の差分化を行い，しかる後に適切な変数変換と極限を用いる．ところが，負の問題と呼ばれる超離散化特有の問題が存在し，方程式を常に超離散化できるわけではない [8]．そこで，あらかじめ超離散化が可能となるような差分方程式を見つけなければならない．もちろんその差分方程式の連続極限は元の微分方程式であり，解の挙動も対応がついていなければならない．このように微分方程式の解の挙動と超離散化可能性の両方を同時に考慮した差分方程式を見つけることが超離散化のポイントとなる．では，次節以降で OV モデルの超離散化の手順について説明する．

2　差分 OV モデル

この節では超離散化可能な差分 OV モデルの導出について説明する．まず (1.1) の差分化を以下で与える．

$$x_k^{n+1}-2x_k^n+x_k^{n-1}=A\{\log\bigl(1+\delta^2V(x_{k+1}^n-x_k^n)\bigr)-\log\bigl(1+\delta(e^{x_k^n-x_k^{n-1}}-1)\bigr)\} \tag{2.1}$$

右辺に $\log(1+\cdots)$ という特殊な形を用いているのは負の問題を起こさないための工夫である．x_k^n を $x_k(n\delta)$ に置き換え $\delta\sim0$ を仮定すると (2.1) は以下のように評価できる．

$$\ddot{x}_k=A\{V(x_{k+1}-x_k)-\dot{x}_k\}+\frac{A}{2}(\ddot{x}_k-(\dot{x})^2)\delta+O(\delta^2) \tag{2.2}$$

$\delta\to0$ とする連続極限で，この式は確かに (1.1) と一致する．さらに，最適速度関数 $V(\Delta x)$ についても負の問題を回避するため以下の形に限定する．a, b, c は正の定数である．

$$V(\Delta x)=a\Bigl(\frac{1}{1+e^{-b(\Delta x-c)}}-\frac{1}{1+e^{bc}}\Bigr) \tag{2.3}$$

この関数のプロットを図 3 に示す．確かに図 2 の特徴を再現している．

差分 OV モデルを用いて実際に車の動きを数値計算した例を図 4 に示す．さらに車の総数を K, サーキット一周の長さを L とし，密度 ρ，流量 Q を次式で定義する．ただし，n_0, n_1 は長時間平均を取るための時間範囲であり，$n_1 \gg n_0 \gg 0$ を満たす．

$$\rho = \frac{K}{L}, \qquad Q = \frac{1}{(n_1 - n_0 + 1)L\delta} \sum_{n=n_0}^{n_1} \sum_{k=1}^{K} (x_k^n - x_k^{n-1}) \tag{2.4}$$

車の台数を変えて ρ を変えながら適当な初期条件から数値計算を行い，長時間平均により Q を求めてプロットしたものは基本図と呼ばれ，交通流解析で重要な図となっている．図 5 が差分 OV モデルの基本図である．元の OV モデルの基本図の特徴をよく再現している．

3　超離散 OV モデル

いよいよ差分 OV モデルの超離散化を行う．このために次式の変換を採用する．

$$x_k^n \to \frac{x_k^n + n\delta}{\varepsilon}, \qquad \delta \to e^{-\delta/\varepsilon}, \qquad a \to e^{(a+2\delta)/\varepsilon}, \qquad c \to \frac{c}{\varepsilon} \tag{3.1}$$

これらの変換を (2.1) と (2.3) に代入し，a, b, c, δ がすべて正で $a < bc$ が満たされているという仮定の下で $\varepsilon \to +0$ の超離散極限をとると次式の超離散 OV モデルが得られる．

$$\begin{aligned} x_k^{n+1} - 2x_k^n + x_k^{n-1} &= A\{V(x_{k+1}^n - x_k^n) - \max(0, x_k^n - x_k^{n-1})\}, \\ V(\Delta x) &= \max(0, b(\Delta x - c) + a) - \max(0, b(\Delta x - c)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

図 6 に超離散最適速度関数 $V(\Delta x)$ のプロットを示す．超離散化のせいで区分的に線形な関数になるが，用いた変換・極限を考慮すると図 3 に示した差分の最適速度関数のカリカチュアになっている．さらに超離散 OV モデルを用いて車の動きを数値計算した例を図 7 に，基本図をプロットしたものを図 8 に示す．

4　超離散 OV モデルの特殊な場合

もし A, a, b, c と初期位置 x_k^0（初期時刻を $n = 0$ とする）がすべて整数なら，x_k^n は常に整数の値をとる．したがってこの前提条件の下で (3.2) はデジタルモデルとなる．さらに $A = 1$ とすると (3.2) は次式に帰着する．

$$x_k^{n+1} = x_k^n + V(x_{k+1}^n - x_k^n) + \min(0, x_k^n - x_k^{n-1}) \tag{4.1}$$

任意の Δx に対し $V(\Delta x) \geq 0$ とし，ある時刻 n で任意の k に対して $x_k^n - x_k^{n-1} \geq 0$ とすると，(4.1) の右辺の最後の min は 0 になるので，$x_k^{n+1} - x_k^n = V(x_{k+1}^n - x_k^n) \geq 0$ となる．したがって $V(\Delta x) \geq 0$ であり，初速度が $x_k^1 - x_k^0 \geq 0$ を満たしているなら，(4.1) は次式に帰着する．

$$x_k^{n+1} = x_k^n + V(x_{k+1}^n - x_k^n) \tag{4.2}$$

さらに正の定数 $v_{\max}$ を用いて $a = v_{\max}, b = 1, c = v_{\max} + 1$ とおくと (4.2) の $V(\Delta x)$ は次式で与えられる．

$$V(\Delta x) = \max(0, \Delta x - 1) - \max(0, \Delta x - v_{\max} - 1) \tag{4.3}$$

もし，各車のサイズが単位セルの大きさ 1 であるとすると $x_{k+1}^n - x_k^n - 1$ が k 番目と $k+1$ 番目の車の時刻 n における車間距離となり，上のモデルは $v_{\max}$ を上限としてできるだけ車間距離を詰めよ

うとする CA モデル，すなわち福井–石橋モデルに帰着する．さらに $v_{\max} = 1$ の場合は福井–石橋モデルは Burgers CA に帰着する．

今まで述べてきたことを簡単にまとめると図 9 の相関図が得られる．OV モデルの系列と Burgers 方程式の系列は，実はこの図で表されるような関係を持っていたのである．

参考文献

[1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, “Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation”, Phys. Rev. E, **51** (1995) 1035–1042.

[2] T. Musha and H. Highchi, “Traffic current fluctuation and the Burgers equation”, Jpn. J. Appl. Phys., **17** (1978) 811–816.

[3] S. Tadaki, M. Kikuchi, Y. Sugiyama and S. Yukawa, “Coupled Map Traffic Flow Simulator Based on Optimal Velocity Functions”, J. Phys. Soc. Jpn., **67** (1998) 2270–2276.

[4] K. Nagel and M. Schreckenberg, “A cellular automaton model for freeway traffic”, J. Physique I, **2** (1992) 2221–2229.

[5] M. Fukui and Y. Ishibashi, “Traffic Flow in 1D Cellular Automaton Model Including Cars Moving with High Speed”, J. Phys. Soc. Jpn., **65** (1996) 1868–1870.

[6] K. Nishinari and D. Takahashi, “Analytical Properties of Ultradiscrete Burgers Equation and Rule–184 Cellular Automaton”, J. Phys. A, **31** (1998) 5439–5450.

[7] S. Wolfram, “Theory and Applications of Cellular Automata”, World Scientific, Singapore, 1986.

[8] 広田良吾, 高橋大輔, “差分と超離散”, 共立出版, 2003.

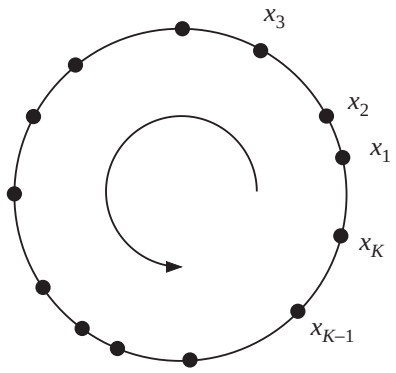

図 1: サーキットと車

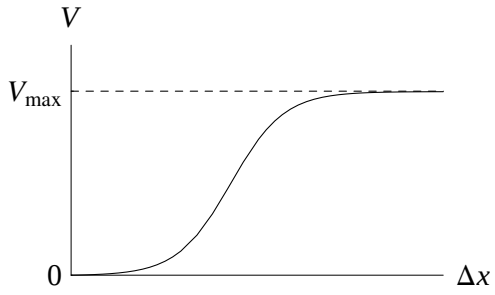

図 2: 最適速度関数の典型的なプロフィール

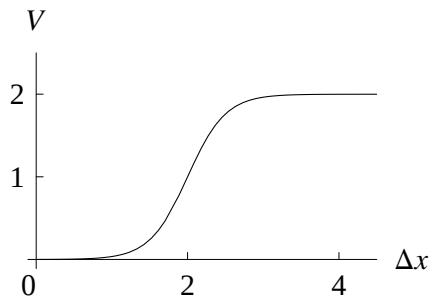

図 3: (2.3) で定義された $V(\Delta x)$. $a = 2$, $b = 4$, $c = 2$ の場合

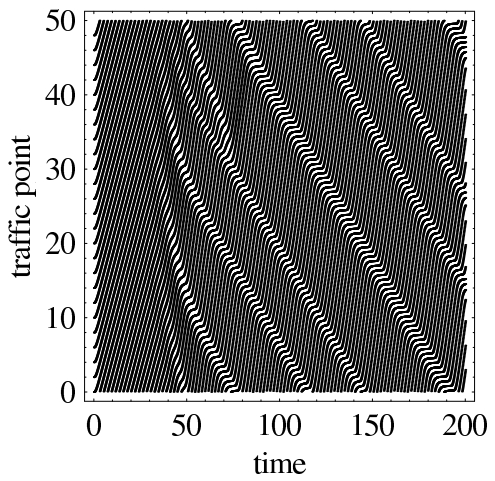

図 4: 差分 OV モデル (2.1) による車の動き. $L = 50$, $K = 25$, $\delta = 0.1$, $A = 1$, $a = 2$, $b = 4$, $c = 2$

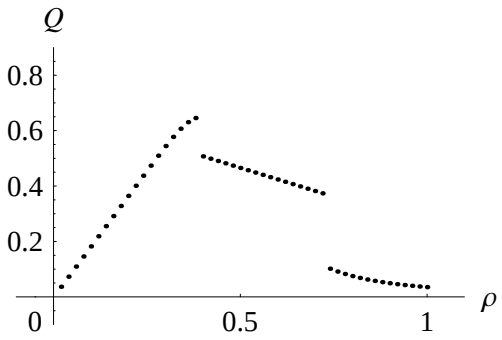

図 5: 差分 OV モデル (2.1) の基本図. $L = 50$, $\delta = 0.1$, $A = 1$, $a = 2$, $b = 4$, $c = 2$, $n_0 = 90000$, $n_1 = 100000$, $1 \le K \le 50$

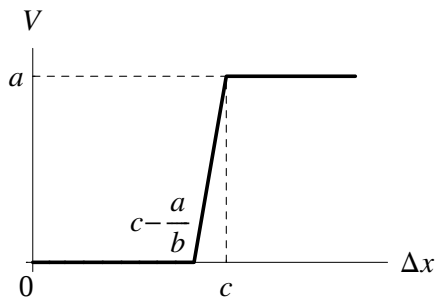

図 6: (3.2) の $V(\Delta x)$ のプロット

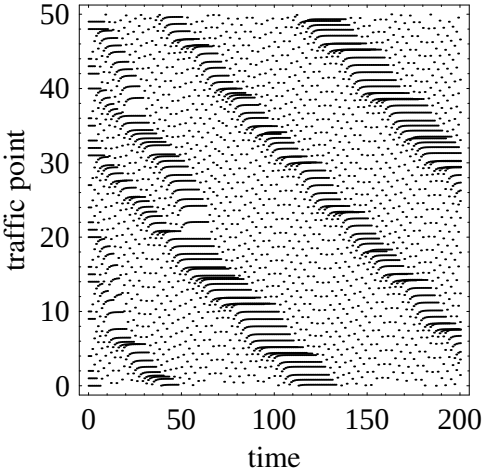

図 7: 超離散 OV モデル (3.2) による車の動き. $L = 50$, $K = 25$, $A = 0.5$, $a = 1.9$, $b = 4$, $c = 3$

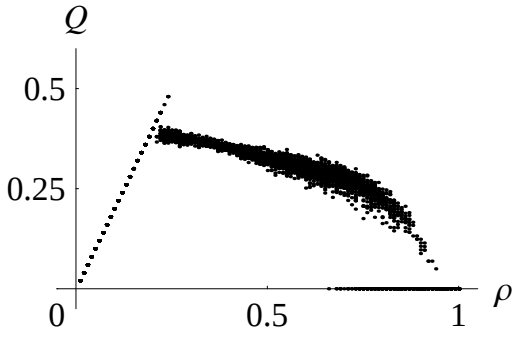

図 8: 超離散 OV モデル (3.2) の基本図. $L = 100$, $A = 0.5$, $a = 1.9$, $b = 4$, $c = 3$, $n_0 = 1000$, $n_1 = 2000$, $1 \leq K \leq 100$

Lagrange 形式		Euler 形式
OV モデル		Burgers 方程式
↑		↑
差分 OV モデル		差分 Burgers 方程式
↓		↓
超離散 OV モデル		超離散 Burgers 方程式
∪		‖
福井–石橋モデル	⊃	Burgers CA

図 9: OV 系列と Burgers 系列