九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

A 型ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約とその退化構造

鈴木, 貴雄
神戸大学大学院理学研究科

藤, 健太
神戸大学大学院理学研究科

https://doi.org/10.15017/14289

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (17), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「**非線形波動の数理と物理**」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 17 (pp. 109-114)

A 型ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約とその退化構造

鈴木 貴雄 (SUZUKI Takao), 藤 健太 (FUJI Kenta)

（Received January 28, 2009）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

A 型ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約とその退化構造

神戸大学大学院 理学研究科　鈴木 貴雄　(Takao SUZUKI)
神戸大学大学院 理学研究科　藤 健太　(Kenta FUJI)

1　序文

既知の 4 階パンルヴェ型微分方程式として次の 3 つのもの[1]が存在する [NY, S];

$$\frac{dq_i}{ds}=\frac{\partial H^{\Delta}}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{ds}=-\frac{\partial H^{\Delta}}{\partial q_i}\quad (i=1,2;\Delta=A_4^{(1)},A_5^{(1)},D_6^{(1)}),$$

ただし

$$\begin{aligned}
H^{A_4^{(1)}}&=H_{\mathrm{IV}}(q_1,p_1;\alpha_2,\alpha_1)+H_{\mathrm{IV}}(q_2,p_2;\alpha_4,\alpha_1+\alpha_3)+2q_1p_1p_2,\\
H^{A_5^{(1)}}&=H_{\mathrm{V}}(q_1,p_1;\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5)+H_{\mathrm{V}}(q_2,p_2;\alpha_4,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5)\\
&\quad+\frac{2q_1p_1(q_2-1)p_2}{s},\\
H^{D_6^{(1)}}&=H_{\mathrm{VI}}(q_1,p_1;\alpha_1,\alpha_0,\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_6,\alpha_3+\alpha_5)+H_{\mathrm{VI}}(q_2,p_2;\alpha_1+\alpha_3,\alpha_0+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_6,\alpha_5)\\
&\quad+\frac{2(q_1-s)p_1q_2\{(q_2-1)p_2+\alpha_4\}}{s(s-1)}.
\end{aligned}$$

ここで, H_{IV}, H_{V}, H_{VI} は以下で与えられるパンルヴェ方程式のハミルトニアンである [IKSY];

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{IV}}(q,p;\alpha,\beta)&=qp(p-q-s)-\alpha q-\beta p,\\
sH_{\mathrm{V}}(q,p;\alpha,\beta,\gamma)&=q(q-1)p(p+s)+\alpha sq+\beta p-\gamma qp,\\
s(s-1)H_{\mathrm{VI}}(q,p;\alpha,\beta,\gamma,\delta)&=q(q-1)(q-s)p^2\\
&\quad-\{(\alpha-1)q(q-1)+\gamma q(q-s)+\delta(q-1)(q-s)\}p\\
&\quad+(1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)(1-\alpha+\beta-\gamma-\delta)q/4.
\end{aligned}$$

これらの方程式はそれぞれ, $A_4^{(1)}$, $A_5^{(1)}$, $D_6^{(1)}$ 型アフィン・リー代数との関係がドリンフェルト・ソコロフ階層の枠組みで明らかにされている [NY, FS]. 本稿では, A 型ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約を系統的に記述することで, 上記の 3 つの方程式を含む 4 階パンルヴェ型微分方程式のあるクラスを提出する.

ドリンフェルト・ソコロフ階層（以下 D-S 階層と記す）とは, KdV 階層[2]の任意のアフィン・リー代数への一般化である [DS]. D-S 階層からは相似簡約と呼ばれる簡約操作によって様々なパンルヴェ型微分方程式が導かれるが [AS, KIK, KK], この事実はパンルヴェ型微分方程式のアフィン・ワイル群対称性やシューア函数解といった性質の表現論的由来を明らかにしている.

D-S 階層はアフィン・リー代数のハイゼンベルグ部分代数によって特徴付けられる. ハイゼンベルグ部分代数は極大ベキ零な部分代数で, 一般に 1 つのリー代数に対して複数個存在し, 特に $A_n^{(1)}$ 型の場合には自然数 $n+1$ の分割と 1 対 1 に対応することが知られている. この観点から, A 型の D-S 階層とパンルヴェ方程式との既知の関係を整理したのが以下の表である[3]:

(2)	$(1,1)$	(3)	$(2,1)$	$(1,1,1)$	(4)	$(n+1)$
P_{II}	P_{IV}	P_{IV}	P_{V}	P_{VI}	P_{V}	$A_n^{(1)}$-Noumi-Yamada

[1]前の 2 つがいわゆる野海・山田系で, 一般には対称形式の形で知られている. ここでの表示は笹野祐輔氏によるものである.
[2]ここでは正確には mKdV 階層の一般化を考えている.
[3]表には記述していないが, $(1,1,\ldots,1)$ 分割からはガルニエ系が得られるらしい (cf. [KK]).

以上の背景を踏まえて, 我々は以下の分割に対応する D-S 階層の相似簡約について考察した[4];

$$(2,2),\quad (3,1),\quad (4,1),\quad (2,2,1),\quad (5,1),\quad (2,2,2),\quad (3,3).$$

これらの相似簡約から導かれるパンルヴェ型微分方程式は以下の通りである:

$(2,2)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(2,2,1)$	$(3,3)$	$(5,1)$
P_{VI}	$H^{A_4^{(1)}}$	$H^{A_5^{(1)}}$	CP_{VI}	CP_{VI}	$A_6^{(1)}$-Noumi-Yamada

上の表で CP_{VI} と表した方程式は, 次のハミルトニアンから定まるハミルトン系[5]である;

$$\begin{aligned} H &= H_{\mathrm{VI}}(q_1,p_1;\alpha_0,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4) + H_{\mathrm{VI}}(q_2,p_2;\beta_0,\beta_1,\beta_3,\beta_4) \\ &\quad + \frac{(q_1-s)p_1(q_2-s)p_2}{4s(s-1)} + \frac{q_1\{(q_1-s)p_1+\alpha_2\}q_2\{(q_2-s)p_2+\beta_2\}}{4s^2(s-1)}. \end{aligned}$$

また, 分割 $(2,2,2)$ からは 6 階のハミルトン系が得られている. ただし, この方程式と既存の方程式との関係は不明である[6].

2 ハイゼンベルグ部分代数

自然数 $n+1$ の分割 $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_s)$ を考える. ただし, $n_1\geq n_2\geq\ldots\geq n_s$ としておく. この $\mathbf{n}$ に対応した次のような行列の分割を考える;

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{bmatrix},$$

ただし, 各ブロック B_{ij} は $n_i\times n_j$ 行列である. $n_k>1$ を満たす全ての k に対して, 行列 Λ_k を次のように定める;

$$B_{kk}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ z & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\qquad B_{ii}=0\quad(i\neq k),\qquad B_{ij}=0\quad(i\neq j).$$

$\Lambda_k^{n_k+1}=z\Lambda_k$ となることを注意しておく. また, $n_k=1$ を満たす k に対しては $\Lambda_k=0$ と定める. この時, 全ての Λ_k と可換な対角行列全体の集合が

$$\mathcal{H}_{s-1}=\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}z^l\Lambda_{0,1}\oplus\cdots\oplus\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}z^l\Lambda_{0,s-1},$$

の形で決まり, 分割 $\mathbf{n}$ に対応する $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ のハイゼンベルグ部分代数[7]が

$$\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}\Lambda_1^l\oplus\cdots\oplus\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}\Lambda_s^l\oplus\mathcal{H}_{s-1},$$

[4]ハイゼンベルグ部分代数はワイル群の共役類と 1 対 1 に対応することが知られている [KP]. 我々はこの性質に着目し, ワイル群の共役類のうち性質の良いものを選んで, それに対応する DS 階層を系統的に調べた. 具体的には, 上記の分割は全てワイル群の共役類のうち "regular" と呼ばれるものと対応している [DF].

[5]これと $H^{D_6^{(1)}}$ によるハミルトン系とは等価であると思われる（期待している）が, 証明はまだ出来ていない.

[6]予想では 3 変数ガルニエ系だが, 積分によって 4 階の方程式に落ちる可能性もある.

[7]アフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}(A_n^{(1)})$ の中心元を 0 と特殊化したものが $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ と同型になる.

と定義される.

以下に具体例として, 分割 $(2,2)$ の場合を述べる. Λ_1, Λ_2 を

$$\Lambda_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \Lambda_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{array}\right],$$

と定めると, これらと可換な対角行列は $\Lambda_{0,1} = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$ の定数倍に限るので

$$\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\Lambda_1^l \oplus \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\Lambda_2^l \oplus \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}z^l\Lambda_{0,1},$$

が分割 $(2,2)$ に対応する $\widehat{\mathfrak{sl}}_4$ のハイゼンベルグ部分代数となる.

3 ドリンフェルト・ソコロフ階層とその相似簡約

ここでは D-S 階層及びその相似簡約の定式化を, 分割 $(2,2)$ の場合を例に挙げて簡単に説明する[8]. 行列 Λ_1, Λ_2, $\Lambda_{0,1}$ は前節で定義したものをそのまま用いる.

$W = W(t_1,t_2)$ を次のような "下三角" 行列とする[9];

$$W = o(z^{-2}) + z^{-1}\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix},$$

ただし, $*$ には適当な従属変数が入る. $W^{-1}\Lambda_1 W$, $W^{-1}\Lambda_2 W$ の "上三角" 部分をそれぞれ B_1, B_2 とする. これらの行列は具体的には次の形に書ける;

$$B_1 = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで, 4 次元列ベクトル $\psi = \psi(t_1,t_2)$ に対する次の線形微分方程式系を考える;

$$\frac{\partial\psi}{\partial t_1} = B_1\psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t_2} = B_2\psi, \quad 2z\frac{d\psi}{dz} = M\psi,$$

ただし

$$M = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + t_1B_1 + t_2B_2 + \rho\Lambda_{0,1},$$

ρ は定数パラメータとする. この線形方程式系の両立条件は次のように記述される;

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} - B_1, \frac{\partial}{\partial t_2} - B_2\right] = 0, \quad \left[2z\frac{d}{dz} - M, \frac{\partial}{\partial t_i} - B_i\right] = 0 \quad (i = 1,2).$$

本稿ではこれを D-S 階層の相似簡約と呼ぶことにする.

この相似簡約からパンルヴェ型微分方程式を導く際には, 時間変数を $t_2 = 1$ と特殊化し, その上で適当な正準座標を取って[10]ハミルトン系の形に書き直す. この時, z 微分と t_1 微分に関するザハロフ・シャバト方程式はパンルヴェ型微分方程式のラックス形式に帰着する.

[8]詳しく知りたい方は [FS, KIK, KK] などを参照して下さい.

[9]本来は無限個の時間変数に依存するが, ここでは t_1, t_2 以外の時間変数を全て 0 と規格化している.

[10]本研究における一番の山場がこの部分であるが, 頁数の都合上残念ながら割愛する.

4 主結果

4.1 分割 $(2,2)$ に対応するパンルヴェ型微分方程式のラックス行列

第 3 節で定めた行列 M は, 時間変数の変換 $s=t_1^2$ 及び適当なゲージ変換を施すことで, 最終的に次の形に書き換えられる;

$$M(2,2)=\begin{bmatrix} \kappa_0-\kappa_3 & q-s & q & 0 \\ -z & -\kappa_0+\kappa_1 & pq+\kappa_1-\kappa_3-2\rho & q \\ z & 0 & -\kappa_1+\kappa_2 & -q+1 \\ -pz & z & z & -\kappa_2+\kappa_3 \end{bmatrix}.$$

対角成分中の $\kappa_0,\ldots,\kappa_3$ は全て定数パラメータとなるが, これはザハロフ・シャバト方程式から自然に従う. この行列 $M(2,2)$ は P_{VI} のラックス形式を定める.

4.2 分割 $(2,2,1)$ に対応するパンルヴェ型微分方程式のラックス行列

ここでは D-S 階層を定式化するのに, 次の Λ_1 及び Λ_2 を選ぶ[11];

$$\Lambda_1=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&z&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \Lambda_2=\begin{bmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ z&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

最終的には次の行列が得られる;

$$M(2,2,1)=\begin{bmatrix} \kappa_0-\kappa_4 & -p_1 & -q_2 & 1 & 0 \\ 0 & -\kappa_0+\kappa_1 & s-q_1q_2 & q_1 & 0 \\ -q_1z & z & -\kappa_1+\kappa_2 & -p_2 & \varphi_{3,4} \\ (s^2-q_1q_2)z & q_2z & 0 & -\kappa_2+\kappa_3 & \varphi_4 \\ (s-q_1)z & z & 0 & 0 & -\kappa_3+\kappa_4 \end{bmatrix},$$

ただし

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= s(\kappa_0-\kappa_4+\rho_1+\rho_2)-(q_2-s)(q_1p_1-q_2p_2-\kappa_1+\kappa_3+\rho_1-\rho_2), \\ \varphi_{3,4} &= -q_1p_1+q_2p_2+\kappa_1-\kappa_3-\rho_1+\rho_2. \end{aligned}$$

4.3 分割 $(3,3)$ に対応するパンルヴェ型微分方程式のラックス行列

ここでは, 次の Λ_1 及び Λ_2 を選ぶ[12];

$$\Lambda_1=\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ z&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&z&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

[11] これは第 2 節の方法で作った行列に, 適当な行及び列の入れ替えを施したものである.
[12] これも先程と同様に適当な行及び列の入れ替えを施している.

最終的には次の行列が得られる;

$$M(3,3)=\begin{bmatrix} \kappa_0-\kappa_5 & -p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_0+\kappa_1 & q_1-q_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_1+\kappa_2 & -p_2 & \frac{1}{1-s} & \frac{1}{1-s} \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_2+\kappa_3 & \frac{q_2-s}{1-s} & \frac{q_2-1}{1-s} \\ (1-q_1)z & z & 0 & 0 & -\kappa_3+\kappa_4 & \varphi_5 \\ q_1 z & -z & 0 & 0 & 0 & -\kappa_4+\kappa_5 \end{bmatrix},$$

ただし

$$\varphi_5=(q_1-1)p_1+(q_2-1)p_2-\kappa_1+\kappa_2-\kappa_3+\kappa_5+3\rho.$$

4.4 分割 $(3,1)$ に対応するパンルヴェ型微分方程式のラックス行列

ここでは D-S 階層を定式化するのに, 次の Λ_1 及び Λ_1^2 を選ぶ[13];

$$\Lambda_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \Lambda_1^2=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

最終的には次の行列が得られる;

$$M(3,1)=\begin{bmatrix} \kappa_0-\kappa_3 & -p_2 & 1 & 0 \\ z & -\kappa_0+\kappa_1 & -q_1+q_2 & 1 \\ (p_2-q_2-3s)z & z & -\kappa_1+\kappa_2 & -p_1 \\ \varphi_0 z & q_1 z & 0 & -\kappa_2+\kappa_3 \end{bmatrix},$$

ただし

$$\varphi_0=q_1(p_1+p_2-q_2-3s)+\kappa_0-\kappa_3+3\rho.$$

4.5 分割 $(4,1)$ に対応するパンルヴェ型微分方程式のラックス行列

ここでは, 次の Λ_1, Λ_1^2 を選ぶ;

$$\Lambda_1=\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \Lambda_1^2=\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

最終的には次の行列が得られる;

$$M(4,1)=\begin{bmatrix} \kappa_0-\kappa_4 & 4s-p_1-p_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_0+\kappa_1 & -q_1 & 1 & 0 \\ z & 0 & -\kappa_1+\kappa_2 & -p_1 & 1 \\ (q_1-4)z & z & 0 & -\kappa_2+\kappa_3 & q_1-q_2 \\ \varphi_0 z & -p_2\, z & 0 & 0 & -\kappa_3+\kappa_4 \end{bmatrix},$$

ただし

$$\varphi_0=-q_2p_2+4p_2+\kappa_0-\kappa_4+4\rho.$$

[13] 上の 3 つとは取り方が異なるが, こちらの方がより KP 階層に近いとも言える.

4.6 分割 $(5,1)$ に対応するパンルヴェ型微分方程式のラックス行列

ここでは, 次の Λ_1, Λ_1^2 を選ぶ;

$$\Lambda_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \Lambda_1^2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

最終的には次の行列が得られる;

$$M(5,1) = \begin{bmatrix} \kappa_0 - \kappa_5 & -p_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_0 + \kappa_1 & -q_2 + q_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_1 + \kappa_2 & -p_2 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & -\kappa_2 + \kappa_3 & -q_1 + q_2 & 1 \\ (p_2 + p_3 - q_3 - 5s)z & z & 0 & 0 & -\kappa_3 + \kappa_4 & -p_1 \\ \varphi_0 z & q_1 z & 0 & 0 & 0 & -\kappa_4 + \kappa_5 \end{bmatrix},$$

ただし

$$\varphi_0 = q_1(p_1 + p_2 + p_3 - q_3 - 5s) + \kappa_0 - \kappa_5 + 5\rho.$$

参考文献

[AS] M. J. Ablowitz and H. Segur; Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1103-1106.

[DF] F. Delduc and L. Fehér, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 5843-5882.

[DS] V. G. Drinfel'd and V. V. Sokolov, J. Sov. Math. **30** (1985) 1975-2036.

[FS] K. Fuji and T. Suzuki; Int. Math. Res. Not., Vol. 2008, Article ID rnm129, 21 pages.

[IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida; Aspects of Mathematics **E16** (Vieweg, 1991).

[KIK] T. Kikuchi, T. Ikeda and S. Kakei; J. Phys. A: Math. Gen., **36** (2003) 11465-11480.

[KK] S. Kakei and T. Kikuchi; Int. Math. Res. Not. **78** (2004) 4181-4209; Lett. Math. Phys. **79** (2007) 221-234.

[KP] V. G. Kac and D. Peterson, in Symposium on Anomalies, Geometry ans Topology, ed. W. A. Baedeen and A. R. White, (World Scientific, 1985) 276-298.

[NY] M. Noumi and Y. Yamada; Funkcial. Ekvac. **41** (1998) 483-503.

[S] Y. Sasano; RIMS Koukyuroku **1473** (2006) 143-163.