一階線形偏微分方程式の解法に基づく差分化と超離散

岩尾, 昌央
早稲田大学理工学術院

https://doi.org/10.15017/14285

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (13), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 13 (pp. 86-91)

一階線形偏微分方程式の解法に基づく差分化と超離散

岩尾 昌央 (IWAO Masataka)

(Received January 30, 2009)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

一階線形偏微分方程式の解法に基づく差分化と超離散

早稲田大学理工学術院　岩尾昌央　(IWAO Masataka)

概　要　本稿では，ある古典ハミルトン系に対し差分化と超離散化を行う．ここでは，正準方程式の一般解を保つ差分化を行なう．差分方程式の形を決定する条件は，一階の線形偏微分方程式に帰着される．この偏微分方程式の一般解は，一つの任意関数を含む初等関数を用いて記述される．その初等関数の形は差分方程式の形を与え，一方でその任意関数は差分間隔の任意性を与える．この任意関数により，時間連続極限と超離散極限の，両極限の可能性が決定される．

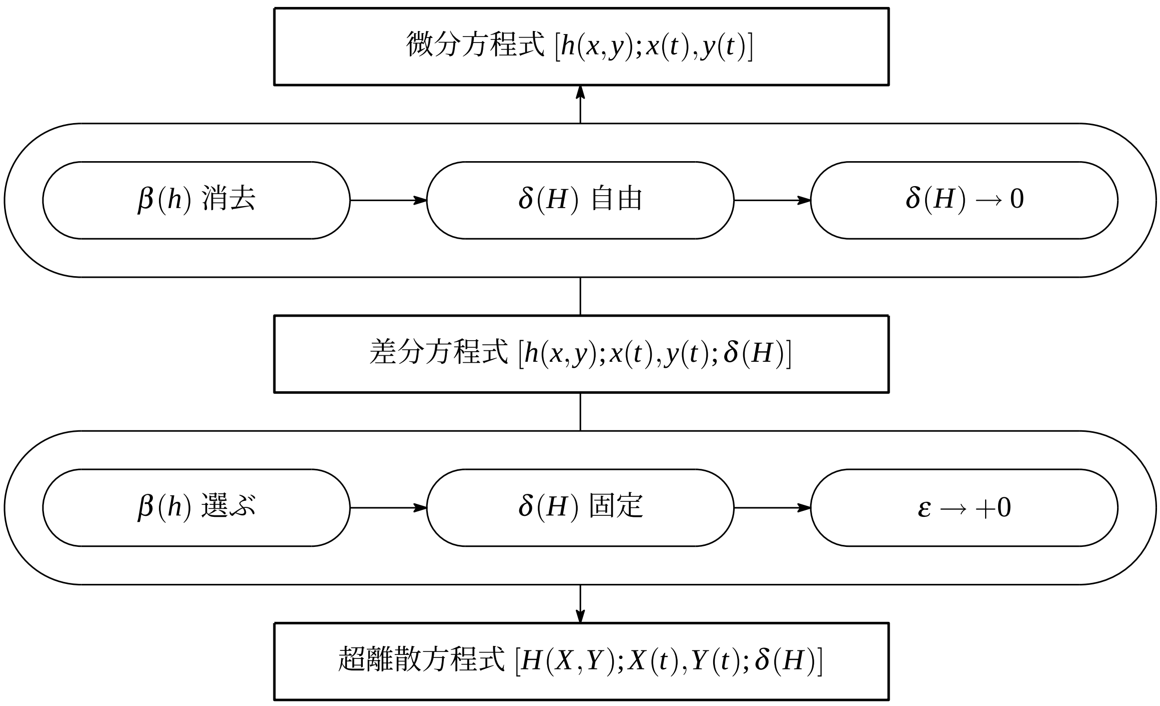
1　はじめに

超離散化の手法は，文献 [1] で確立されて以来，現在も理論・応用の各面で進展が続く．本稿の目的は，有限自由度のハミルトン系において差分化と超離散化を厳密に適用するための一つの理論的枠組みを，簡素な例を提示して解説する事である．本稿では，文献 [4] におけるハミルトニアンを一般化した

$$H(X,Y) := \varepsilon\log(1+a\exp[mX/\varepsilon])+\varepsilon\log(1+b\exp[nY/\varepsilon]), \tag{1.1}$$

について，正準方程式の時間差分化と超離散化を行う．ここで ε, a, b は正値の任意定数とする．また m, n は非零の任意定数とする. この例に対しては，理論的な枠組み全体について，各箇所を初等的記述により解説できる．従って本稿の目的に最も適格な例と思われる．

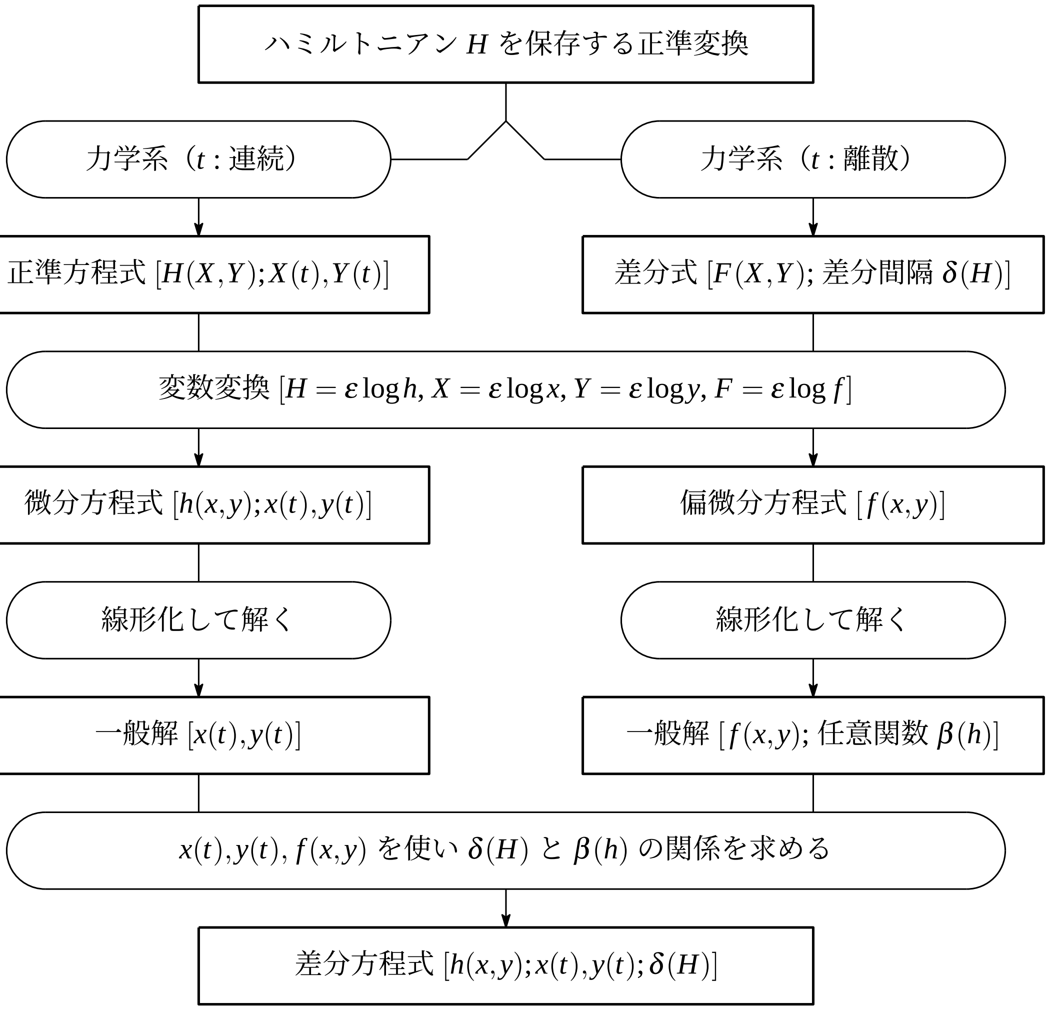
まず超離散化については，基本的に文献 [1] の手法を踏襲し，次のような図式を考える：



図中，上方向の矢印は時間連続極限を表し，下方向の矢印は超離散極限を表す．各矢印の途中に長丸で囲い込まれている記述は，各極限のために必要な情報であり，‘$\delta(H)$’ および ‘$\beta(h)$’ はそれ

ぞれ，差分化の過程で現れる「差分間隔」および「任意関数」である．また，各方程式の記述に必要な変数について，それぞれ角括弧内に付記されている．

差分化に関しては，文献 [2] および [3] に採用された「一般解を保存する差分化」を，さらに洗練して適用する．全体の流れは下図のようになる：



図中，長丸の囲い込み記述は，矢印の途中に現れており，その矢印の意味する内容を表す．

解説は図中の矢印の流れに従うので，本節を適宜参照されたい．まず時間差分化を行う．

2 差分化

良く知られている様に，正準方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial Y}, \\[2ex] \dfrac{dY}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial X}. \end{cases} \tag{2.1}$$

は，時間 t を連続変数として H を保存する力学系であり，無限小時間発展は正準変換と見なせる．

一方で，連続力学系 (2.1) の一般解を保存する時間差分化を行う．すなわち，任意の時間差分間隔に対して，連続力学系 (2.1) における一般解を表す関数が厳密解となっている離散力学系を求める．

このため写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(X,Y) \\ G(X,Y) \end{bmatrix}.$$

を考え，これに「H を保つ正準変換」という条件を与える：

$$\begin{cases} H(F,G) = H(X,Y), \\ \\ \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{\partial H(X,Y)}{\partial Y}, \quad \dfrac{dY}{dt} = -\dfrac{\partial H(X,Y)}{\partial X}, \\ \\ \dfrac{dF}{dt} = \dfrac{\partial H(F,G)}{\partial G}, \quad \dfrac{dG}{dt} = -\dfrac{\partial H(F,G)}{\partial F}. \end{cases}$$

この写像に対して，次の形の差分式を考える：

$$\begin{bmatrix} X(t+\delta) \\ Y(t+\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(X(t),Y(t)) \\ G(X(t),Y(t)) \end{bmatrix},$$

ここで差分間隔 $\delta = \delta(H)$ は，H の値に依存する関数とする．すなわち，差分間隔は各解軌道ごとに異なる事を想定する．

差分方程式を決定するには,「H を保つ正準変換」の条件を満たす F,G の組を，全て求めればよい．(以下，前節の図における右側の分岐を参照)

具体的にハミルトニアン (1.1) を代入すると，この条件は変数変換

$$\begin{cases} H(X,Y) &= \varepsilon \log h(x,y), \\ X(t) &= \varepsilon \log x(t), \\ Y(t) &= \varepsilon \log y(t), \\ F(X,Y) &= \varepsilon \log f(x,y), \\ G(X,Y) &= \varepsilon \log g(x,y). \end{cases} \tag{2.2}$$

により

$$\begin{cases} (1+af^m)(1+bg^n) = (1+ax^m)(1+by^n), \\ bnxy^n(1+ax^m)\dfrac{\partial f}{\partial x} - amx^m y(1+by^n)\dfrac{\partial f}{\partial y} = bnfg^n(1+af^m), \end{cases}$$

となる．これらから，f で閉じた一本の偏微分方程式が得られる：

$$bnxy^n(1+ax^m)\frac{\partial f}{\partial x} - amx^m y(1+by^n)\frac{\partial f}{\partial y} = nf(ax^m + by^n + abx^m y^n - af^m). \tag{2.3}$$

以上によって，差分方程式を求める問題が，偏微分方程式 (2.3) を解く問題に帰着された．

方程式 (2.3) を解くために，変数変換 $f^m = x^m w^{-1}$ を行なう：

$$bnxy^n(1+ax^m)\frac{\partial w}{\partial x} - amx^m y(1+by^n)\frac{\partial w}{\partial y} = -amnx^m(w-1).$$

これはラグランジェの一階線形偏微分方程式であり，解法が知られている：

1. 補助方程式を考える：

$$\frac{dx}{bnxy^n(1+ax^m)} = \frac{dy}{-amx^m y(1+by^n)} = \frac{dw}{-amnx^m(w-1)},$$

2. ２つの独立解が得られる：

$$
\begin{aligned}
&(1+ax^m)(1+by^n) = (h=)c_1,\\
&(w-1)(y^{-n}+b) = c_2.
\end{aligned}
$$

3. ２つ目の独立解で，c_2 を h に依存する任意関数 $\alpha(h)$ に置き換えると，w について陽的な一般解が得られる：

$$
w = 1 + \frac{\alpha(h)y^n}{1+by^n},
$$

f と g の対称性のため $\alpha(h) = \beta(h)b$ として β を導入すると，上の解と式 $h(f,g) = h(x,y)$ から

$$
\begin{cases}
\dfrac{x^m}{f^m} = 1 + \dfrac{\beta(h)by^n}{1+by^n},\\[2ex]
\dfrac{g^n}{y^n} = 1 + \dfrac{\beta(h)af^m}{1+af^m},
\end{cases}
$$

が得られる．従って，差分方程式は次の形になる：

$$
\begin{cases}
\dfrac{x(t)^m}{x(t+\delta)^m} = 1 + \dfrac{\beta by(t)^n}{1+by(t)^n},\\[2ex]
\dfrac{y(t+\delta)^n}{y(t)^n} = 1 + \dfrac{\beta ax(t+\delta)^m}{1+ax(t+\delta)^m},
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

ここで $\beta = \beta(h)$ は h に依存する任意関数であり, $\delta = \delta(H)$ は H に依存する差分間隔である．

方程式 (2.4) を，変数変換 (2.2) で元の変数 (X,Y) に戻した差分方程式（式の記述は略す）は，明らかに次の性質を持つ：

- $\beta = \beta(h)$ を，関数として一つ任意に固定して与えると，対応する関数 $\delta = \delta(H)$ を少なくとも一つは選べて，正準方程式 (2.1) の一般解がその差分方程式を満たすようにできる．

- 正準方程式 (2.1) と一般解を共有するような，時間発展の陽的な離散力学系は全て，その差分方程式の形にすることができる．

3　正準方程式の一般解の代入

そこで次に，差分間隔 $\delta = \delta(H)$ と任意関数 $\beta = \beta(h)$ との対応関係を調べるために，正準方程式 (2.1) を解く.（以下，第１節の図における左側の分岐を参照）

方程式 (2.1) は，具体的にハミルトニアン (1.1) を与えると，変数変換 (2.2) によって

$$
\begin{cases}
\varepsilon\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{bnxy^n}{1+by^n},\\[2ex]
\varepsilon\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{amx^m y}{1+ax^m},
\end{cases}
$$

となる．変数変換 $x^m = u, y^n = v$ を行い，さらに v を消去すると，積分定数 c を導入して

$$
\varepsilon\frac{du}{dt} = u(mn+c+cau),
$$

となる．これはロジスティック方程式であり，一般解の構成法は良く知られている．これにより

$$\begin{cases} x^m &= \dfrac{(1-h)C\exp\left[\frac{mn}{\varepsilon}\left(1-\frac{1}{h}\right)t\right]}{b-aC\exp\left[\frac{mn}{\varepsilon}\left(1-\frac{1}{h}\right)t\right]}, \\ y^n &= \dfrac{(h-1)}{b-haC\exp\left[\frac{mn}{\varepsilon}\left(1-\frac{1}{h}\right)t\right]}, \end{cases}$$

が得られる．ここで C は任意定数である．

なお，ロジスティック方程式の一般解を保つ差分化については既に知られているが，仮にその結果を用いて，今考えている正準方程式の一般解を保つ差分方程式を得られたとしても，それは結局，前節に求めた差分方程式の形になる．これは前節の最後に述べた性質のうち，２つ目の非常に強い性質による．

さて，上の一般解を差分方程式 (2.4) に代入すると，前節の最後に述べた性質のうち１つ目の性質により，差分間隔 $\delta=\delta(H)$ と任意関数 $\beta=\beta(h)$ の間の関係式が求まる．これを実行すると

$$\delta=\frac{\varepsilon}{mn}\left(\frac{h}{1-h}\right)\log\left(1+\left(1-\frac{1}{h}\right)\beta\right), \tag{3.1}$$

が得られる．差分方程式 (2.4) に関係式 (3.1) を付与する事により，離散時間発展の解軌道が厳密に正準方程式の解軌道上に現れるだけでなく，時間変数のスケールも厳密に一致する事になる．

4　２つの極限

まず正準方程式を再現するには，関係式 (3.1) を β について解き，方程式 (2.4) に代入する．即ち，もともと第２節において任意に取る事の出来た β を，第３節で得られた関係式 (3.1) を付与する事によって消去する．関係式 (3.1) によると，β の取り方によって δ は任意の値を取り得る．よって β の代入消去後に，方程式 (2.4) における δ は任意に動かせる事になるが，その際に一般解は不変に保たれる．従って，任意の初期条件において $\delta\to 0$ が近づき方によらず，微分方程式が得られる．これを変数変換 (2.2) で元の変数に戻せば，正準方程式が再現される．（式の記述は略す）

次に超離散極限を考える．準備として，差分方程式 (2.4) における (δ,β) の関係式 (3.1) に対し，時間発展を逆に辿る $(-\delta,\gamma)$ に対する関係式

$$-\delta=\frac{\varepsilon}{mn}\left(\frac{h}{1-h}\right)\log\left(1+\left(1-\frac{1}{h}\right)\gamma\right), \tag{4.1}$$

を考える．関係式 (3.1) および (4.1) を連立させると，

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{h}-1. \tag{4.2}$$

が得られる．この式は差分方程式 (2.4) の時間反転対称性を表している．これを用いて関係式 (3.1) を簡単な形に書き直す．

$$\lambda:=\log\left(\frac{-\gamma}{\beta}\right) \tag{4.3}$$

と置くと，

$$\delta(H)=\frac{\varepsilon}{mn}\left(\frac{\lambda e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}\right)(-\beta). \tag{4.4}$$

が得られる．以上の準備のもとで，差分方程式 (2.4) における $\beta=\beta(h)$ を「定数関数」と仮定し，場合分けにより超離散極限の可能性を調べる．（定数関数ではない時にも，超離散極限が取れる場合があるが，ここでは触れない．）

- $\beta > -1$: $\varepsilon \to +0$ で $\lim \varepsilon \log($ 方程式の右辺 $) = 0$. よって超離散極限は自明な時間発展.
- $\beta < -1$: $\varepsilon \to +0$ で $\lim \varepsilon \log($ 方程式の右辺 $)$ が存在しない.
- $\beta = -1$: $\varepsilon \to +0$ で $\lim \varepsilon \log($ 方程式の右辺 $)$ が存在．超離散極限は非自明な時間発展.

さて，$\beta = -1$ と固定して，超離散極限 $\varepsilon \to +0$ を取ることを考える：

1. $\beta = -1$ を時間発展対称性の式 (4.2) に代入して，$\gamma = h$ を得る．これらを式 (4.3) に代入して，$\lambda = \log(h) = H/\varepsilon$ を得る．以上を式 (4.4) に代入すると
$$\delta(H) = \frac{\varepsilon}{mn}\left(\frac{(H/\varepsilon)e^{H/\varepsilon}}{e^{H/\varepsilon}-1}\right),$$
が得られる.

2. $\varepsilon \to +0$ の極限で,
$$\delta(H) = \frac{\varepsilon}{mn}\left(\frac{(H/\varepsilon)e^{H/\varepsilon}}{e^{H/\varepsilon}-1}\right) \to \frac{1}{mn}\max(0,H), \tag{4.5}$$
となる．この公式の示し方は文献 [1] にある通り，文献 [1] の超離散極限の公式
$$\varepsilon \log(1+\exp[X/\varepsilon]) \to \max(0,X), \tag{4.6}$$
と同様である．式 (4.5),(4.6) より，式 (2.4) の超離散極限が得られる.（式の記述は略す）

5 まとめ・展望

ある古典的ハミルトン系に対して，差分化と超離散化を行なった．一般解を保つ差分化を行い，関連する偏微分方程式の解法に従って現れる任意関数の扱いを考察することにより，時間連続極限と超離散極限が如何にして成立するのか，解説した.

楕円曲線と関連するハミルトン系として，自由度１の場合，文献 [3] 等がある．この文献では，同様の偏微分方程式に対して特殊解が与えられているが，一般解を与える事が研究課題として残されている.

また，高い有限自由度の場合にも同様の枠組みが適用可能な，未知の超離散化可能な離散力学系があると考えられる．論文として未発表であるが，筆者は，有限ステップでの周期性を持つ超離散化可能な離散力学系の例が，非常に豊富に存在している事を見出している．これらは高自由度ハミルトン系の差分化と関係していると考える．今後詳細に調査したい.

参考文献

[1] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma: “From Soliton Equations to Integrable Cellular Automaton through a Limiting Procedure”, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 3247.

[2] M. Iwao and D. Takahashi: “Ultradiscrete Hamiltonian Systems”, Glasgow Math. J. A **47** (2005) 87.

[3] M. Iwao: “Analysis of Ultradiscrete Hamiltonian Systems with Lattice Polygons”, J. Phys. Soc. Jpn. **74** (2005) 3167.

[4] 岩尾昌央: “時間差分間隔の規格化と超離散化”，九州大学応用力学研究所研究集会報告; http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/fluid/meeting/18ME-S5/content.html (2007).