Sawada-Kotera 方程式の超離散化

広田, 良吾
早稲田大学名誉教授

https://doi.org/10.15017/14284

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (12), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「**非線形波動の数理と物理**」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 12 (pp. 76-85)

Sawada-Kotera 方程式の超離散化

広田 良吾 (HIROTA Ryogo)

（Received February 2, 2009）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

Sawada-Kotera 方程式の超離散化

早稲田大学名誉教授
広田　良吾 (HIROTA Ryogo)

九大応力研、Nov.7,2008

Abstract

現在までに超離散化されたソリトン方程式、KdV 方程式や戸田方程式などはすべてＡ型の方程式である。一方、Sawada-Kotera 方程式はＢ型に属し "負の問題" のため超離散化が難しい。
"負の問題" の一つの解決法を示す。

1 Introduction

時間・空間とも連続な Sawada-Kotera 方程式は次の双線形方程式で記述される。

$$D_x(D_t + D_x^5)f \cdot f = 0, \tag{1}$$

この式は従属変数変換

$$u = 2(\log f)_{xx}$$

により、次の非線形波動方程式に変換される。

$$u_t + 15(u^3 + uu_{xx})_x + u_{xxxxx} = 0$$

Sawada-Kotera 方程式の一つの拡張として、KdV+Sawada-Kotera 方程式がある。

$$D_x(D_t + aD_x^3 + bD_x^5)f \cdot f = 0.$$

この式は変数変換　$u = 2(\log f)_{xx}$ により、次の非線形波動方程式に変換される。

$$u_t + a[6uu_x + u_{xxx}] + b[15(u^3 + uu_{xx})_x + u_{xxxxx}] = 0$$

この方程式はパラメータ a, b の値によって共鳴現象を示す。

1.1　空間変数の差分化

先ず双線形方程式の差分化を行う。3-ソリトン解の有無を判定条件にして試行錯誤を繰り返し、最終的に次式を得る。

$$\sinh(\frac{1}{2}D_n)[D_t + 2a\sinh(D_n) + 2b\sinh(2D_n)]f_n \cdot f_n = 0.$$

この式を非線形波動方程式に変換する。先ず従属変数の変換 $f_n = \exp(\phi_n)$ によって

$$\begin{aligned}&\{\frac{d}{dt}(\phi_{n+1/2} - \phi_{n-1/2})\}\exp(\phi_{n+1/2} + \phi_{n-1/2})\\&\quad -a\exp(\phi_{n+1/2} + \phi_{n-1/2}) + (a-b)\exp(\phi_{n+3/2} + \phi_{n-3/2})\\&\qquad +b\exp(\phi_{n+5/2} + \phi_{n-5/2}) = 0\end{aligned}$$

を得る。次に変換 $s_n = \phi_{n+1/2} - \phi_{n-1/2}$ によって上式は

$$\begin{aligned}&\frac{ds_n}{dt} - a + (a-b)\exp(s_{n+1} - s_{n-1})\\&\qquad +b\exp(s_{n+2} + s_{n+1} - s_{n-1} - s_{n-2}) = 0\end{aligned}$$

と表される。さらに変換 $U_n = s_{n+1/2} - s_{n-1/2}$ を重ねると上式は

$$\begin{aligned}&\frac{dU_n}{dt} + (a-b)[\exp(U_{n+1} + U_n) - \exp(U_n + U_{n-1})]\\&\quad +b[\exp(U_{n+2} + 2U_{n+1} + 2U_n + U_{n-1}) - \exp(U_{n+1} + 2U_n + 2U_{n-1} + U_{n-2})] = 0.\end{aligned}$$

が得られる。この式は変換 $u_n = \exp(U_n) = \frac{f_{n+1}f_{n-1}}{f_n^2}$ によって最終的に

次の非線形波動方程式に変換される。

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{1}{u_n} = (a-b)(u_{n+1} - u_{n-1})\\&\qquad +bu_{n+1}u_nu_{n-1}(u_{n+1}u_{n+2} - u_{n-1}u_{n-2})\end{aligned}$$

全部で 4 回の変換を使ったが、一つ一つは直感的で単純である。
しかしこの直感的方法は次の時間・空間が差分化された双線形方程式には使えそうにない。
たとえ差分化できても “負の項 ”が多くて超離散化はできそうにない。

新しい変換法が必要になる。

1.2　可積分な非線形差分方程式

可積分な非線形差分方程式として次の A 型が知られている。

$$[z_1 \exp(D_1) + z_2 \exp(D_2) + z_3 \exp(D_3)] f \cdot f = 0.$$

この式は $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ のときソリトン解がある。

もう一つ可積分な非線形差分方程式として次の B 型が知られている。

$$[z_1 \exp(D_1) + z_2 \exp(D_2) + z_3 \exp(D_3) + z_4 \exp(D_4)] f \cdot f = 0,$$

ただし $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 0$ である。
この式は $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ のときソリトン解がある。

1.3　KdV+Sawada-Kotera 方程式の差分化

結果を先に書くと双線形形式の差分化は

$$\begin{aligned}&\sinh(\frac{1}{2}D_n)[\frac{1}{\delta}\sinh(\frac{1}{2}\delta D_t)\\ &\quad +a\ \sinh(D_n + \frac{1}{2}\delta D_t) + b\ \sinh(2D_n + \frac{1}{2}\delta D_t)] f \cdot f = 0\end{aligned}$$

となる。ここで δ は時間差分間隔である。この双線形方程式は次の公式により

$$\begin{aligned}2\sinh(\frac{1}{2}D_n)\sinh(\frac{1}{2}\delta D_t) &= \cosh(\frac{1}{2}\delta D_t + \frac{1}{2}D_n) - \cosh(\frac{1}{2}\delta D_t - \frac{1}{2}D_n),\\ 2\sinh(\frac{1}{2}D_n)\sinh(D_n + \frac{1}{2}\delta D_t) &= \cosh(\frac{1}{2}\delta D_t + \frac{3}{2}D_n) - \cosh(\frac{1}{2}\delta D_t + \frac{1}{2}D_n),\\ 2\sinh(\frac{1}{2}D_n)\sinh(2D_n + \frac{1}{2}\delta D_t) &= \cosh(\frac{1}{2}\delta D_t + \frac{5}{2}D_n) - \cosh(\frac{1}{2}\delta D_t + \frac{3}{2}D_n),\end{aligned}$$

次式に書き直され、B型に等しい。

$$f_n^{m+1} f_{n+1}^m = z_1 f_{n+1}^{m+1} f_n^m + z_3 f_{n+2}^{m+1} f_{n-1}^m + z_4 f_{n+3}^{m+1} f_{n-2}^m.$$

ただし $t = m\delta, z_1 = 1 - a\delta, z_3 = (a-b)\delta, z_4 = b\delta$ である。

2　双線形形式の変換

双線形形式を陽的差分スキームをもつ非線形差分方程式に変換する。

まずB型の双線形方程式

$$[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f=0$$

を書き換えて

$$z_2\exp(D_2)f\cdot f=[z_1\exp(D_1)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f$$

とする。符号は適当に書き換えられるのでここでは無視する。

双線形形式の変換例として KdV+Sawada-Kotera 方程式

$$\begin{aligned}&\exp(\frac{1}{2}D_m-\frac{1}{2}D_n)f\cdot f\\&=[z_1\exp(\frac{1}{2}D_m+\frac{1}{2}D_n)+z_3\exp(\frac{1}{2}D_m+\frac{3}{2}D_n)+z_4\exp(\frac{1}{2}D_m+\frac{5}{2}D_n)]f\cdot f\end{aligned}$$

を考える。この式は次式のように表現される。

$$f_n^{m+1}f_{n+1}^m=z_1f_{n+1}^{m+1}f_n^m+z_3f_{n+2}^{m+1}f_{n-1}^m+z_4f_{n+3}^{m+1}f_{n-2}^m.$$

上式全体を $f_{n+1}^{m+1}f_n^m$ で割り、次の従属変数を導入する。左から順番に

$$v_n^m=\frac{f_n^{m+1}f_{n+1}^m}{f_{n+1}^{m+1}f_n^m},\quad w_n^m=\frac{f_{n+2}^{m+1}f_{n-1}^m}{f_{n+1}^{m+1}f_n^m},\quad x_n^m=\frac{f_{n+3}^{m+1}f_{n-2}^m}{f_{n+1}^{m+1}f_n^m}.$$

と置く。これらの従属変数によって双線形方程式は次式に変換される。

$$v_n^m=z_1+z_3w_n^m+z_4x_n^m. \tag{2}$$

次に従属変数 v_n^m,w_n^m,x_n^m 間の関係式を求める。この目的のためにシフト演算子

$$p=\exp(\partial_m),\quad q=\exp(\partial_n)$$

を導入する。したがって任意の関数 g_n^m にたいして

$$p\,g_n^m=g_n^{m+1},\quad q\,g_n^m=g_{n+1}^m,\quad p^\alpha g_n^m=g_n^{m+\alpha},\quad q^\alpha g_n^m=g_{n+\alpha}^m.$$

である。シフト演算子を使うと従属変数変換

$$v_n^m=\frac{f_n^{m+1}f_{n+1}^m}{f_{n+1}^{m+1}f_n^m},\ w_n^m=\frac{f_{n+2}^{m+1}f_{n-1}^m}{f_{n+1}^{m+1}f_n^m},\ x_n^m=\frac{f_{n+3}^{m+1}f_{n-2}^m}{f_{n+1}^{m+1}f_n^m}.$$

は次式で表現される。

$$\begin{aligned}
\log v_n^m &= (p+q-pq-1)\log f_n^m = (p-1)(1-q)\log f_n^m, &(3)\\
\log w_n^m &= (pq^2+q^{-1}-pq-1)\log f_n^m = (q^{-1}-pq)(1-q)\log f_n^m, &(4)\\
\log x_n^m &= (pq^3+q^{-2}-pq-1)\log f_n^m = (q^{-2}-pq)(1-q^2)\log f_n^m. &(5)
\end{aligned}$$

式 (3) と (4) より、式

$$(p-1)\log w_n^m = (q^{-1}-pq)\log v_n^m,$$

を、一方、式 (3) と (5) より

$$(p-1)\log x_n^m = (q^{-2}-pq)(1+q)\log v_n^m,$$

を得る。これらの式は書き直すと

$$\frac{w_n^{m+1}}{w_n^m} = \frac{v_{n-1}^m}{v_{n+1}^{m+1}},$$
$$\frac{x_n^{m+1}}{x_n^m} = \frac{v_{n-1}^m v_{n-2}^m}{v_{n+1}^{m+1}v_{n+2}^{m+1}}.$$

となる。この 2 式に式 (2) を代入すると、w_n^m, x_n^m に対する次のような陽的差分スキームを得る。

$$\begin{aligned}
\frac{w_n^{m+1}}{w_n^m} &= \frac{z_1+z_3w_{n-1}^m+z_4x_{n-1}^m}{z_1+z_3w_{n+1}^{m+1}+z_4x_{n+1}^{m+1}},\\
\frac{x_n^{m+1}}{x_n^m} &= \frac{w_n^{m+1}}{w_n^m}\,\frac{z_1+z_3w_{n-2}^m+z_4x_{n-2}^m}{z_1+z_3w_{n+2}^{m+1}+z_4x_{n+2}^{m+1}}.
\end{aligned}$$

この差分スキームは、$z_1, z_3, z_4 \geq 0$ のとき超離散化が可能である。

KdV+Sawada-Kotera 方程式の場合は

$$z_1 = 1-a\delta, \quad z_3 = (a-b)\delta, \quad z_4 = b\delta$$

であるから、$1 \geq a\delta, a \geq b$ のとき超離散化方程式が得られる。
しかし、Sawada-Kotera 方程式 $(a=0)$ では $z_3 = -b\delta, z_4 = b\delta$ となり,“負の問題 ”が生じる。

3 Discrete Sawada-Kotera equation の超離散化

Discrete Sawada-Kotera equation ($b = 1$)

$$
\begin{aligned}
&\exp(\frac{1}{2}D_m - \frac{1}{2}D_n) f \cdot f \\
&= [\exp(\frac{1}{2}D_m + \frac{1}{2}D_n) - \delta \exp(\frac{1}{2}D_m + \frac{3}{2}D_n) + \delta \exp(\frac{1}{2}D_m + \frac{5}{2}D_n)] f \cdot f
\end{aligned}
$$

即ち

$$
f_n^{m+1} f_{n+1}^m = f_{n+1}^{m+1} f_n^m + \delta(f_{n+3}^{m+1} f_{n-2}^m - f_{n+2}^{m+1} f_{n-1}^m).
$$

を調べなおす。
2-ソリトン解は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
&f(m,n) = 1 + \exp[s_1(m,n)] + \exp[s_2(m,n)] + c_{12} \exp[s_1(m,n) + s_2(m,n)], \\
&s_i(m,n) = \omega_i m - k_i(n - n_i), \\
&\omega_i = \log\{[1 + \delta \exp(2k_i)]/[1 + \delta \exp(-2k_i)]\}, \text{ for } i = 1, 2, \\
&c_{12} = [\frac{\exp(k_1) - \exp(k_2)}{\exp(k_1 + k_2) - 1}]^2 [\frac{\exp(k_1) + \exp(k_2)}{\exp(k_1 + k_2) + 1}].
\end{aligned}
$$

$f(m,n)$ の各項は正値であるので、次の形に超離散化される。

$$
\begin{aligned}
&F(m,n) = \max(0, s_1(m,n), s_2(m,n), \hat{c}_{12} + s_1(m,n) + s_2(m,n)), \\
&s_i(m,n) = \hat{\omega}_i m - k_i(n - n_{i0}), \\
&\hat{\omega}_i = \max(0, 2k_i - 1) - \max(0, -2k_i - 1), \text{ for } i = 1, 2, \\
&\hat{c}_{12} = (3/2)[|k_1 - k_2| - |k_1 + k_2|].
\end{aligned}
$$

解が超離散化できる方程式は、方程式も超離散化できる。という個人的信念に従って,“**負の問題** ”を見直す。
超離散化パラメータ ϵ を導入して超離散化への過程を調べる。2-ソリトン解 $f(m,n)$ を書き直す。

$$
\begin{aligned}
f(m,n) = 1 &+ \exp[s_1(m,n)/\epsilon] + \exp[s_2(m,n)/\epsilon] \\
&+ \exp[(s_1(m,n) + s_2(m,n) + \hat{c}_{12})/\epsilon], \\
s_i(m,n) &= \hat{\omega}_i m - k_i(n - n_{i0}), \\
\hat{\omega}_i &= \epsilon \log\{[1 + \exp(2k_i - 1)/\epsilon]/[1 + \exp(-2k_i - 1)/\epsilon]\}, \text{ for } i = 1, 2, \\
\hat{c}_{12} &= \epsilon \log\{[\frac{\exp(k_1/\epsilon) - \exp(k_1/\epsilon)}{\exp[(k_1 + k_2)/\epsilon] - 1}]^2 [\frac{\exp(k_1/\epsilon) + \exp(k_1/\epsilon)}{\exp[(k_1 + k_2)/\epsilon] + 1}]\}
\end{aligned}
$$

この書き換えによって $f(m,n)$ は

1. $\epsilon = 1$ で差分方程式の解になり、

2. $\epsilon \to 0$ で $\hat{f}(m,n) = \epsilon \log f(m,n)$ は超離散解になる。

一方、双線形差分方程式は対数化すると

$$\epsilon \log[f_n^{m+1} f_{n+1}^m] = \epsilon \log[f_{n+1}^{m+1} f_n^m + \delta(f_{n+3}^{m+1} f_{n-2}^m - f_{n+2}^{m+1} f_{n-1}^m)]$$

である。ここで定義式

$$f_n^m = \exp(\hat{f}_n^m/\epsilon), \quad \delta = \exp(-1/\epsilon)$$

を使うと上式は次式になる。

$$\begin{aligned} \hat{f}_n^{m+1} + \hat{f}_{n+1}^m = \epsilon \log[&\exp(\hat{f}_{n+1}^{m+1} + \hat{f}_n^m)/\epsilon \\ &+ \exp(\hat{f}_{n+3}^{m+1} + \hat{f}_{n-2}^m - 1)/\epsilon - \exp(\hat{f}_{n+2}^{m+1} + \hat{f}_{n-1}^m - 1)/\epsilon]. \end{aligned}$$

この等式にソリトン解を代入する。$\epsilon = 1$ のときは確かに成立している。ϵ を小さくすると "負の問題" が起こって等式が成り立たなくなる筈である。
しかし $\epsilon = 0.05$ まで小さくしても何も起こらない。$\epsilon = 0$ の極限で不等式

$$\hat{f}_{n+3}^{m+1} + \hat{f}_{n-2}^m \geq \hat{f}_{n+2}^{m+1} + \hat{f}_{n-1}^m$$

が成立しているらしい。
この不等式の証明は後で検討することにして、この式を仮定して "負の項" を無視すると、Sawada-Kotera 方程式の超離散化は次式で与えられる。

$$\hat{f}_n^{m+1} + \hat{f}_{n+1}^m = \max(\hat{f}_{n+1}^{m+1} + \hat{f}_n^m, \hat{f}_{n+3}^{m+1} + \hat{f}_{n-2}^m - 1).$$

この式の解を調べる。次のような多種多様な解が発見された。

1. $\tau-$ 関数が見つかっている解

   (a) Soliton 解, 差分方程式のソリトン解を超離散化して得られる解に等しい

   (b) 静止解、同じ場所に静止して動かない解、

      i. Positive soliton, 高さが 1 以下の任意の形をもつ解。

      ii. Negative soliton. 大きさ（高さ）が負である任意の形をもつ解。

   (c) Twin soliton (双子解) 同じ大きさのソリトンが一部分重なってできる解。

2. $\tau-$ 関数が不明な解

   (a) Wiggler(ウィグラー）形を変えながら走るソリトン。過去に Double sine-Gordon 方程式の数値解として発見されている。

   (b) その他、Wiggler を大きくして複雑にしたような解。

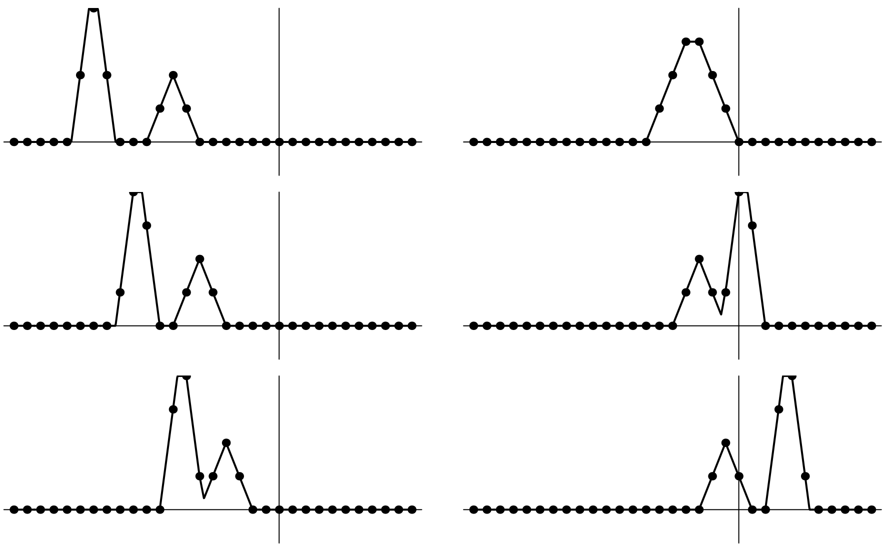

Fig 1. ソリトンの衝突: $k_1 = 1, k_2 = 3$.

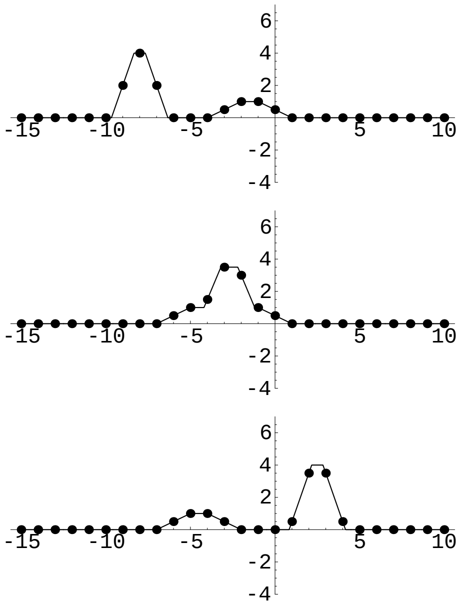
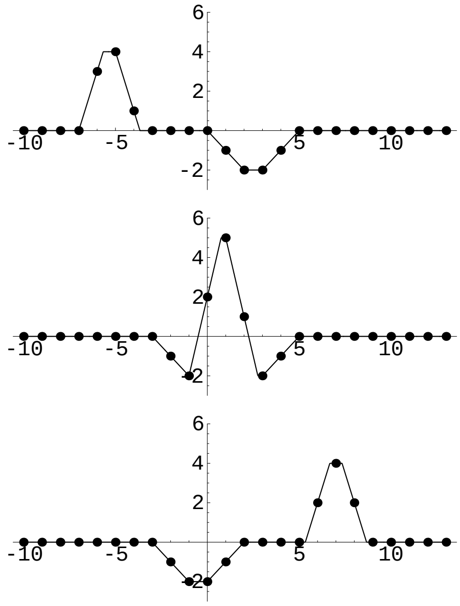

Fig 2a. ソリトンと正の静止ソリトンとの衝突.　Fig 2b. 負の静止ソリトンとの衝突.

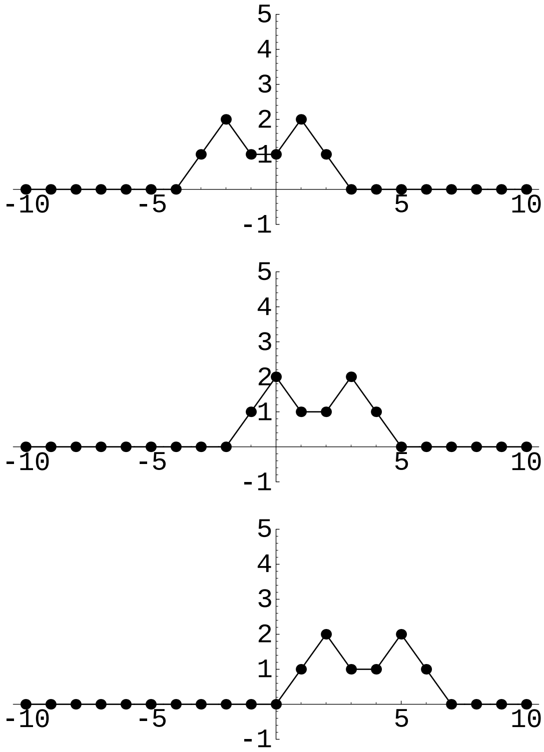
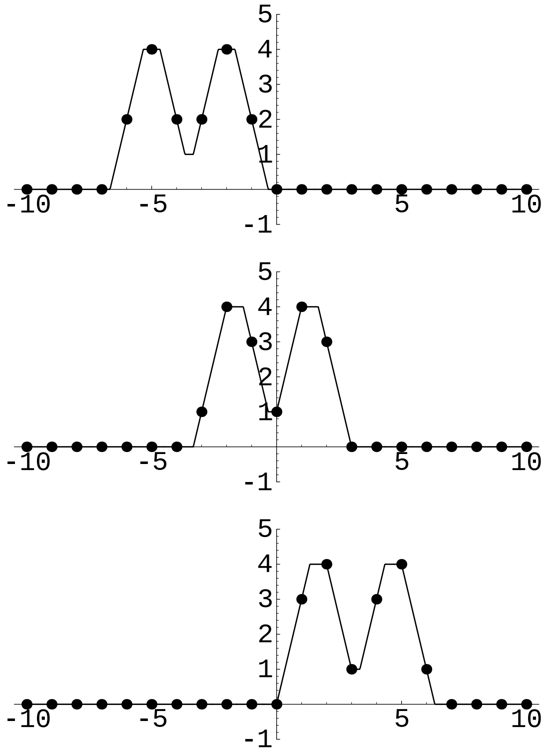

Fig 3a. 双子ソリトン、$k = 1$.　　Fig 3b. 双子ソリトン、$k = 3$.

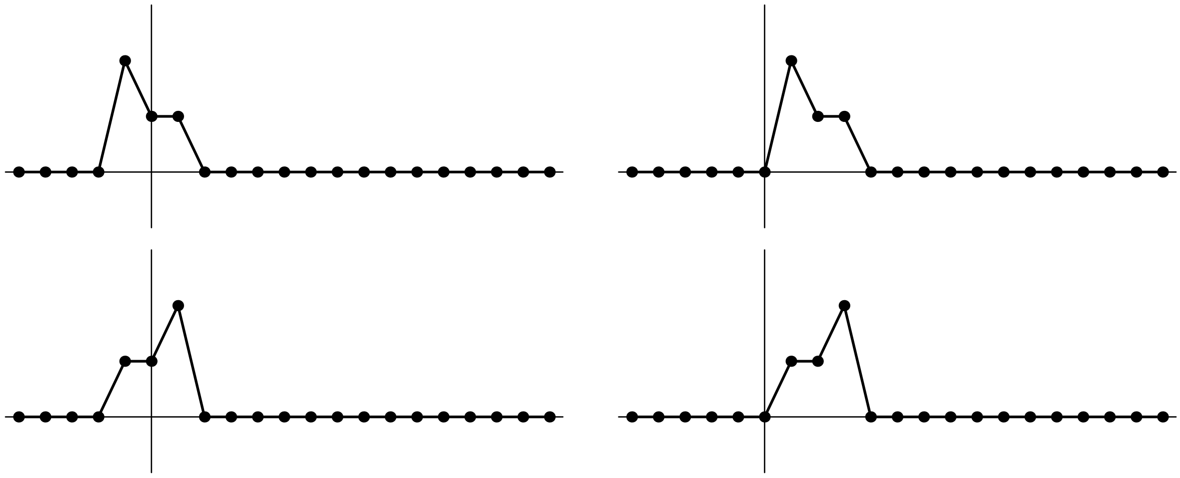

Fig 4. Wiggler(形を変えながら進むソリトン).

4 まとめ

Sawada-Kotera 方程式の超離散化に成功した。

1. シフト演算子を導入して 双線形形式を非線形差分方程式に変換した。

2. 不等式を使った “負の問題” の解決法を示した (不等式の証明は未完)。

3. 超離散 Sawada-Kotera 方程式には多種多様なソリトンが存在する。

4. Wiggler(形を変えながら進むソリトン) 解の $\tau-$ 関数は未だ発見できていない。

注１．1 月 31 日 2009 年現在、この不等式の証明は早稲田大学大学院（基幹理工　Ｄ２）長井秀友君によって完成している。

注２．1 月 31 日 2009 年現在、Wiggler 解の $\tau-$ 関数は早稲田大学大学院（基幹理工　Ｄ２）中村伸也君によって発見されている。