九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

複数窓口の待ち行列における待ち時間と追い越しの頻度の研究

柳澤, 大地
東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻,（独）日本学術振興会特別研究員

須摩, 悠史
東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

木村, 紋子
東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

友枝, 明保
東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

他

https://doi.org/10.15017/14280

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (8), 2009-02. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「**非線形波動の数理と物理**」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 8 (pp. 48-53)

複数窓口の待ち行列における待ち時間と追い越しの頻度の研究

柳澤 大地 (YANAGISAWA Daichi), 須摩 悠史 (SUMA Yushi), 木村 紋子 (KIMURA Ayako), 友枝 明保 (TOMOEDA Akiyasu), 大塚 一路 (OHTSUKA Kazumichi), 西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiro)

(Received February 3, 2009)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

複数窓口の待ち行列における待ち時間と追い越しの頻度の研究

東大 工 航空宇宙, (独) 日本学術振興会 特別研究員 DC1　柳澤大地　(YANAGISAWA Daichi)
東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻　須摩悠史　(SUMA Yushi)
東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻　木村紋子　(KIMURA Ayako)
東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻　友枝明保　(TOMOEDA Akiyasu)
東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻　大塚一路　(OHTSUKA Kazumichi)
東大 工 航空宇宙, (独) 科学技術振興機構 さきがけ　西成活裕　(NISHINARI Katsuhiro)

概　要　本研究では，待ち行列理論に歩行距離の効果を導入し，複数窓口の待ち行列に並んでいる人の平均待ち時間と追い越しの頻度について理論解析とシミュレーションを行った．そして，平均待ち時間を小さくすることができる待ち行列システムの設計法を考案した．

1　はじめに

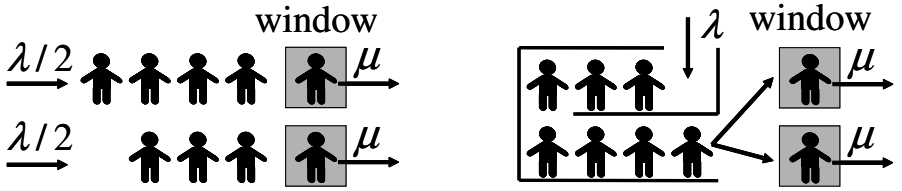
待ち行列理論は 20 世紀初めの Erlang の電話交換の研究 [1] に始まる．その後 Kendall の記法 [2] が考案され，Little の公式 [3] が証明されて，大きく発展してきた．現在では，インターネットやリソースマネジメント，交通流や歩行者流など数多くの場面で応用されている．

一方最近では，多粒子近似や流体力学，セルオートマトンを用いたモデルで交通流や人の群集運動の研究が活発に行われている [4]．特にセルオートマトンモデルは時間と空間が共に離散的であるため，計算時間が早くシミュレーションが行いやすいという利点がある．また群集運動のセルオートマトンモデルの一つである Floor Field モデルでは人の動きは確率過程となるため，理論的な計算も可能であり，災害時の推定総避難時間を計算して，それを短縮する方法が研究されている [5, 6].

サービス窓口がボトルネックとなるシステムで待ち行列理論を用いて平均待ち時間を計算することと，脱出口がボトルネックとなるシステムで Floor Field モデルを用いて総避難時間を計算することは非常に似ている．しかし，後者はセルで区切られた空間を考慮しているのに対し，前者はそれを考慮していない．

待ち行列理論から得られる結果の一つに「並列型」の待ち行列 ($M/M/1$ を複数集めたもの (以下 Parallel)) (Fig. 1 (a)) よりも,「フォーク型」の待ち行列 ($M/M/s$ (以下 N-Fork)) (Fig. 1 (b)) の方が待ち時間が短く効率がよいというものがある．しかし，この結果は待ち行列の先頭から窓口までの歩行距離という空間構造を考慮していない．窓口の数が非常に多く，窓口ごとの間隔も広い国際空港の入国審査場などでは，待ち行列の先頭の人が空いた窓口まで歩くのにかかる時間が待ち時間に無視することのできない影響を及ぼしている．そこで本研究では，セルオートマトンにより待ち行列の先頭から窓口までの距離を考え，そこを歩く時間の効果を取り入れることにより待ち行列理論を拡張して，歩行距離の効果を考慮したフォーク型待ち行列 (以下 D-Fork) (Fig. 2) の解析を行った．そしてその解析結果から，混み具合や窓口までの歩行時間とサービス時間の比によって Parallel と D-Fork の優劣が変化することを示した．また，Parallel と D-Fork を拡張したり，組み合わせたりした待ち行列システムも考え，状況に応じた適切な待ち行列形態を求めた．

N-Fork や D-Fork (以下 Fork) では早く来た順にサービスが受けられるという First Come, First Served (以下 FCFS) の原則が守られるといった，待ち行列理論の式から得られる結果以外のメリットもある．そのため Parallel などの場合に FCFS がどの程度守られないかについても計算を行った．



(a) Parallel ($M/M/1\times s$ ($s=2$)) (b) N-Fork ($M/M/s$ ($s=2$))

図 1: (a) Parallel 型待ち行列 ($s=2$) ($M/M/1\times 2$). (b) N-Fork 型待ち行列 ($s=2$) ($M/M/2$). $s\in\mathbf{N}$, $\lambda\geq 0, \mu\geq 0$ はそれぞれ窓口数，到着率，サービス率を表す.

2 窓口までの歩行距離を考慮した待ち行列モデル

2.1 歩行距離のモデル化

$M/M/1, M/M/s$ といった待ち行列モデルでは，窓口が空くと待ち行列の先頭の人は瞬時にその窓口に移動しサービスを受け始める．しかし実際は待ち行列の先頭から窓口まで移動するのに時間がかかるため，すぐにサービスを受けることができない．そこで本研究では，セルオートマトンを用いて Fig. 2 のように待ち行列の先頭から窓口までの距離をモデル化する [7]．従って，離散空間を扱うことになる．またシミュレーションを行うため，時間も離散時間を用いることにする．1 セルの長さを Δl，シミュレーションの 1 時間ステップを $\Delta t \ll 1$ と定める．

まずは簡単のため，待ち行列は一番端の窓口 1 (window 1) の前にあり，窓口番号が大きければ大きいほど待ち行列の先頭から離れていくようなシステム (以下 end) を考える．window と書かれたセルを窓口，それ以外のセルを通路，人が並んでいるセルになっていない部分を待ち行列と呼ぶことにする．λ, μ はそれぞれ待ち行列理論の平均到着率と平均サービス率である．$\Delta t \ll 1$ としてシミュレーションを行えば，1 ステップ当たり確率 $\lambda\Delta t$ で人が入って来て，それぞれの窓口から確率 $\mu\Delta t$ で出て行く．また，待ち行列の先頭から合流部までのセル数を a セル，合流部から窓口 1 までのセル数を b セル，窓口の間隔を k セル，一般に窓口番号 n ($1\leq n\leq s$) までのセル数を，

$$d_n = a + b + k(n-1) \tag{2.1}$$

セルと定める．窓口の総数を s とすると，Fig. 2 は $s=3, a=3, b=2, k=2$ の場合を表している．γ は平均移動率であり，人の歩く速さを v とすると，$\gamma = v/\Delta l$ と書け，人は 1 ステップに確率 $\gamma\Delta t$ で 1 セル移動する．

セルオートマトンとなっているのは，待ち行列の先頭から窓口までの通路のみであり，人が並んでいる待ち行列は空間構造を持たない．また窓口の状態として,「空き状態」と「稼動状態」を定義する．空き状態の窓口は，人が窓口まで辿り着いていなくても，待ち行列の先頭の人がその窓口に向かうことを決定した時点で稼動状態となる．稼動状態の窓口は，サービスを終了して人が退出すると空き状態となる．

2.2 歩行距離を考慮した平均サービス時間の導出

歩行時間とサービス時間の和を「通過時間」，その逆数を「通過率」と定義する．ここでは窓口が n 個稼動状態であるときの通過率を計算する．

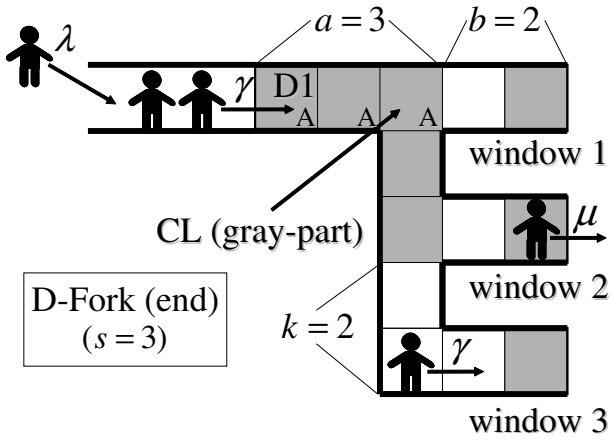


図 2: D-Fork 型待ち行列．領域 CL は複数の人が通過するので，自分が進もうとするセルに他の人がいて進めないことがある．特に A と書かれたセルはどの窓口に向かう場合でも通過する必要があるので，進めない可能性が最も高い領域である．

Fig. 2 の灰色部分 CL の人の密度は十分に小さく，自分が進むセルが別の人に占有されているために進めない状態 (以下 梗塞状態) がない仮定すると，窓口 n の通過時間の確率変数 T_n の期待値 $E(T_n)$ は (2.1) を用いて，

$$E(T_n) = \frac{1}{\mu} + \frac{d_n}{\gamma} = \frac{1}{\mu} + \frac{a+b+k(n-1)}{\gamma} \tag{2.2}$$

と書ける．このとき，n 個の窓口が稼動状態のときの平均通過時間は,

$$\overline{E(T_n)} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} E(T_l) = \frac{1}{\mu}[1+\alpha+\beta(n-1)] \tag{2.3}$$

となり，この逆数が平均通過率 $\hat{\mu}_n$ となる．ただし,

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{(a+b)\mu}{\gamma} \\ \beta = \dfrac{k\mu}{2\gamma} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{k}{\gamma}}{\frac{1}{\mu}} \end{cases} \tag{2.4}$$

であり，β は窓口間隔一つ分の歩行時間と，一番近い窓口の通過時間の比の半分である．$\alpha=\beta=0$ とすると，$\hat{\mu}_n=\mu$ となるので，$\hat{\mu}_n$ は歩行距離を考慮しない場合も含んでいる．

D-Fork の定常状態の状態方程式は，待ち行列システム内に n 人いる確率を P_n とすると,

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= \hat{\mu}_1 P_1 \\ \lambda P_{n-1} + (n+1)\hat{\mu}_{n+1}P_{n+1} &= (\lambda + n\hat{\mu}_n)P_n \qquad (1 \le n \le s-1) \\ \lambda P_{n-1} + s\hat{\mu}_s P_{n+1} &= (\lambda + s\hat{\mu}_s)P_n \qquad (n \ge s) \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．これは N-Fork $(M/M/s)$ の状態方程式のサービス率 μ を平均通過率 $\hat{\mu}_n$ に置き換えた形になっている．この状態方程式は N-Fork の場合と同様に解析的に解くことができて，P_0，P_n，全ての窓口が稼動状態な確率 $P_{n\ge s}$，平均待ち人数 L_q，平均待ち時間 W_q などを計算することができる [7].

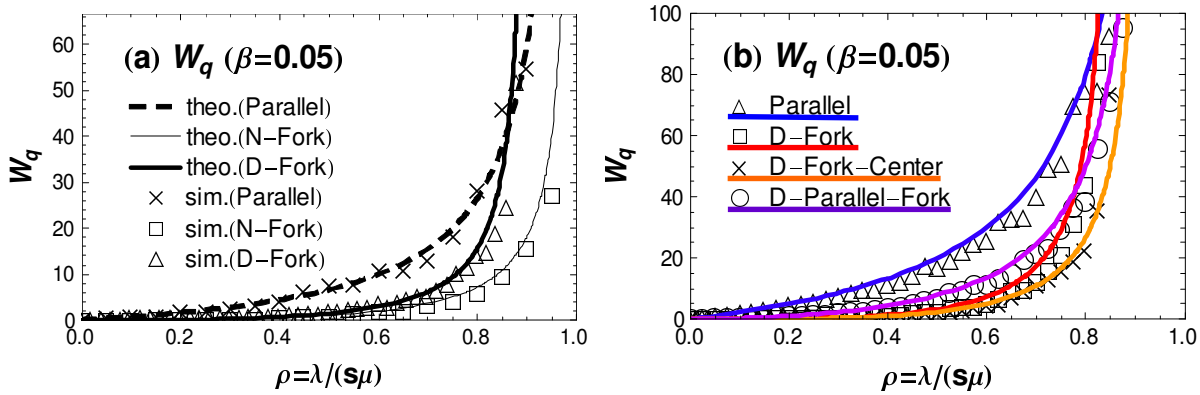


図 3: (a) Parallel, N-Fork, D-Fork の平均待ち時間 W_q の比較．(b) Parallel, D-Fork, D-Fork-Center, D-Parallel-Fork の平均待ち時間 W_q の比較．太線で表される理論解析の結果から，$\rho = 0.6$ では，Parallel の W_q が最大であり，D-Parallel-Fork, D-Fork, D-Fork-Center と小さくなっていくことが分かる．パラメータは，$s = 4, \alpha = 0, \beta = 0.05$ である．

3　平均待ち時間の比較

まずは Parallel, N-Fork, D-Fork のサービスを受け始めるまでの待ち時間 W_q を比較する．Fig. 3 (a) は W_q を混み具合 ρ $(= \lambda/s\mu)$ に対して描いたものである．図より，いかなる $0 \leq \rho < 1$ においても N-Fork は Parallel や D-Fork よりも W_q が小さいことが分かる．Parallel より小さくなるのは歩行距離を考慮しない待ち行列理論による $M/M/1$ と $M/M/s$ の比較から，D-Fork より小さくなるのは距離の効果を考慮していないことから説明できる．興味深いのは，Parallel と D-Fork を比較した場合である．Figure 3 (a) では破線と太線の交点が見られ，混み具合 ρ が小さいときは D-Fork の W_q が小さく，ρ が大きいときは Parallel の W_q が小さいことが分かる．Parallel の待ち時間が D-Fork に比べて長くなるのは，あまり混んでいないとき一つの列に二，三人の客が集まり，空いている窓口が生じるという現象によるものなので，混んでいるときに Parallel の効率の方がよくなるのは直感と一致している．

また Fig. 3 (b) は，待ち行列の先頭がシステムの中心にある D-Fork-Center (Fig. 4 (a)) と 4 つの窓口を 2 つずつの D-Fork に分けた D-Parallel-Fork (Fig. 4 (b)) の平均待ち時間も合わせて比較している．D-Fork-Center は D-Fork に比べて歩行距離の影響が小さくなっているため，D-Fork よりも ρ の全ての範囲で待ち時間が短いことが分かる．D-Parallel-Fork は，Parallel よりも小さい ρ で D-Fork と交点を持つことが分かる．また ρ が小さい範囲でも，D-Fork との待ち時間の差は小さい．従って，D-Parallel-Fork は Parallel よりも空いている状況に対応でき，D-Fork よりも混んでいる状況に対応できる，中間的なシステムといえる．

4　追い越し頻度の比較

待ち行列に並んで待っている人は当然待ち時間が短いことを望んでいるが，それを計測しているわけではないので多少待ち時間の長さが変化しただけでは気付かない．待ち時間の最小化は，待ち行列システムを管理する側にとってはシステムを効率よく運用するための重要な指標であるが，並んで待っている人は絶対的な待ち時間の多少の変化はあまり感じ取ることができないと思われる．それよりも，先に並んだ人が後から来た人に抜かれずに先にサービスを受けることができる FCFS の原則がどれだけ守られているかということが重要であると考えられる．そこで，ここでは

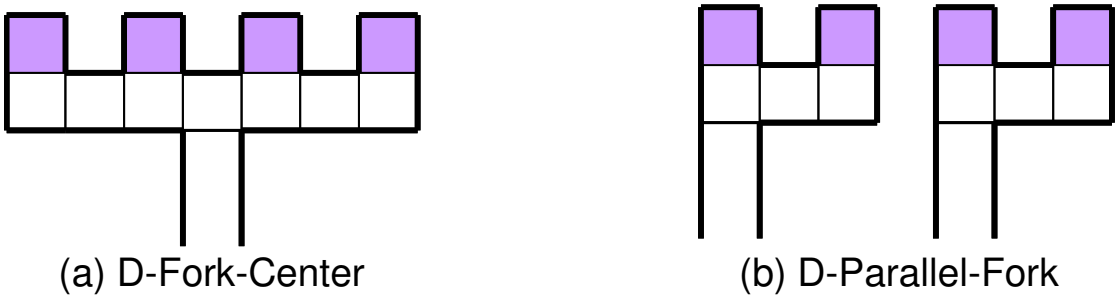


図 4: (a) D-Fork-Center 型の待ち行列 ($s = 4$). (b) D-Parallel-Fork 型の待ち行列 ($(s = 2) \times 2$).

待ち行列に到着した順番とサービスを受け始めるまでの順番の差の標準偏差 $U_{q(S.D.)}$ (追い越し頻度) を用いて FCFS の原則がどの程度破られるかを調べた．$U_{q(S.D.)}$ は，人番号 l の人が待ち行列に並んだ順番 i_l とサービスを受け始めた順番 j_l，そしてサービスを受け始めた人の累積人数 N_{sv} を用いて，

$$U_{q(S.D.)} = \sqrt{\frac{\sum_l (j_l - i_l)^2}{N_{sv}}} \tag{4.1}$$

と定義されるものである．これはすなわち入ってきた順番とサービスを受け始める順番のずれなので，FCFS の原則がどの程度守られないかを直接見ている指標である．

Figure 5 (a) を見ると，まず窓口を一つにまとめている D-Fork や D-Fork-Center では全く順序が乱されないことが分かる．そして，D-Parallel-Fork, Parallel と待ち行列が分割されていくほど，$U_{q(S.D.)}$ の値が大きくなっている．また ρ の増加に対して $U_{q(S.D.)}$ が増加しており，混んでいる場合は FCFS の原則が守られにくくなることも見てとれる．

平均待ち時間 W_q の考察では，混んでいる場合に待ち行列を分割した Parallel の方がよいことが分かったが，FCFS の原則を考慮すると，D-Fork などの方がよいことになる．平均待ち時間と FCFS の原則のトレードオフの基準を考察することは，今後の重要な課題であると考えられる．

5 効率のよい待ち行列形態

実際の待ち行列設計において，サービス時間や歩行時間，混み具合などが分かったときに，どのような待ち行列形態の効率がよいのか知ることができれば非常に役立つ．そこで窓口が四つの場合，ρ と β に対して W_q を最小にする待ち行列形態を Fig. 5 (b) に示す．Figure 5 (b) を見ると，ρ や β が小さい領域では四つの窓口を全てまとめて D-Fork とした方がよく，大きい領域であれば窓口を全て独立にして Parallel とした方がよく，間の領域では窓口を二つずつまとめて，D-Parallel-Fork を形成するのが有効だと分かる．

ここで一つ例を考えてみる．待ち行列の先頭から窓口までの距離を表すのに用いる 1 セルの大きさを 50 cm × 50 cm とする．窓口数 4，平均到着間隔 2.7 [s]，平均サービス時間 7.5 [s]，窓口間隔 2 [m]，人の平均歩行速度 1.35 [m/s] の場合の適切な待ち行列形態は，$\rho \cong 0.7$, $\beta \cong 0.1$ となるので，Fig. 5 (b) より，D-Parallel-Fork であることが分かる．

(2.4) より，β は窓口間隔を歩くのにかかる時間とサービス時間の比の半分を表す．つまり歩行時間に対して，窓口でのサービス時間が十分に大きければ，距離を考慮した場合でも D-Fork の方が効率がよいということである．銀行にある ATM はこの条件を満たしているので，Fork にしていることがデメリットとなっていることはないだろう．しかし窓口の間隔がどうしても広くなって

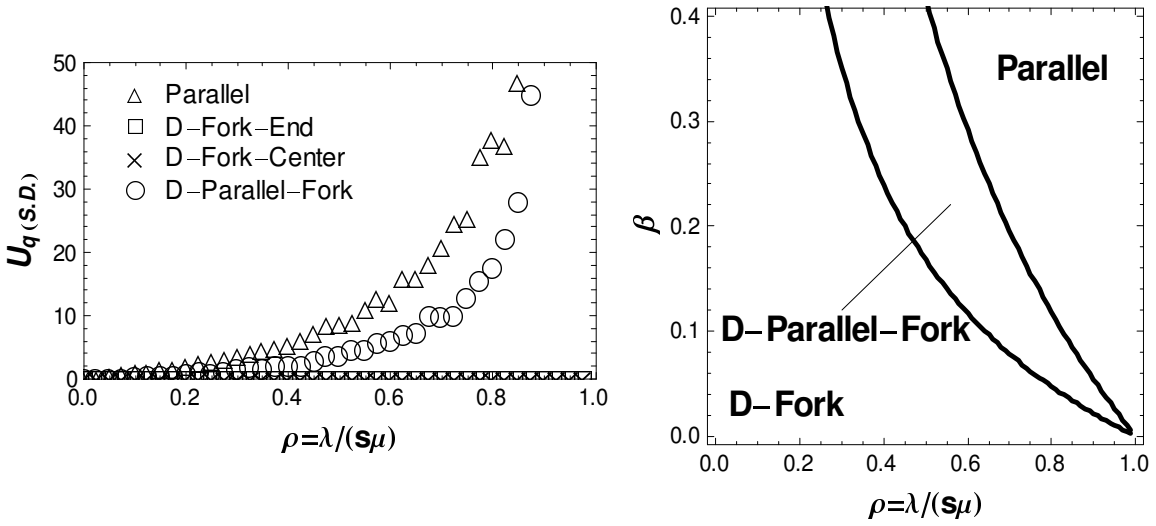


図 5: (a) Parallel, D-Fork, D-Fork-Center, D-Parallel-Fork の追い越し頻度 $U_{q(S.D.)}$ の比較. (b) ρ, β に応じた適切な待ち行列形態 (待ち行列の先頭が端にある場合).

しまうシステム，例えば国際空港の入国審査などはこの条件を満たしているとは言いにくい．そこで一つの Fork にまとめてしまうのでなく，D-Parallel-Fork の待ち行列を作るなどの対策が必要だと考えられる．

6 まとめ

本研究では，歩行時間の効果を取り入れた待ち行列モデルを考え理論解析とシミュレーションを行った．また，混み具合 ρ と，歩行時間とサービス時間の比 β によって有効な待ち行列形態が変化することを理論的に示した．現実の待ち行列システムの ρ と β の値が分かれば，この研究成果を用いて非常に効率のよい待ち行列システムを設計することができる．また先に待ち行列に並んだ人が先にサービスを受けることができるという First Come First Served の原則が，どの程度守られているのかとういことについても調べた．

参考文献

[1] A. K. Erlang, Nyt. Tidsskr. Mat. Ser. B, 20 (1909), 33-39.

[2] D. G. Kendall, Ann. Math. Statist., Vol.24, No.3 (1953), 338-354.

[3] J. C. D. Little, Operations Research, Vol. 9, No. 3 (1961), 383-387.

[4] D. Helbing, Rev. Mod. Phys., 73 (2001), 1067-1141.

[5] 柳澤 大地, 西成 活裕, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 17, No. 3 (2007), 277-290.

[6] D. Yanagisawa and K. Nishinari, Phys. Rev. E, 76 (2007), 061117 1 - 9.

[7] 柳澤 大地, 友枝 明保, 木村 紋子, 西成 活裕, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 18, No. 4 (2008), 507-534.