九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

ブラウン写像について

野邊, 厚
大阪大学大学院基礎工学研究科

https://doi.org/10.15017/14278

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (6), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「**非線形波動の数理と物理**」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 6 (pp. 35-42)

ブラウン写像について

野邊 厚 (NOBE Atsushi)

（Received February 2, 2009）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

ブラウン写像について

大阪大学 大学院基礎工学研究科　野邊 厚（NOBE Atsushi）

概 要

Brown 写像とは凹 9 角形を不変曲線にもつ 2 次元区分線形写像であり，また周期 9 の再帰方程式という側面ももつ．本稿では，Brown 写像は二つの超離散 QRT 写像の合成とみなせることを示し，トロピカル幾何学を用いてその幾何学的背景を説明する．

1　はじめに

次の 2 次元区分線形写像 $\Phi : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ を考える．

$$\bar{x} = \xi(x, y) \qquad \bar{y} = \xi(y, \bar{x}) \tag{1.1}$$

ここで，$\xi(x, y)$ は次のような x, y のトロピカル多項式 [16] である．

$$\xi(x, y) := \max(-x + y, -x - y) = -x + |y|$$

写像 (1.1) は Brown によって導入されたので [1]，ここでは Brown 写像と呼ぶ．点列 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が Brown 写像を満たすとしよう：

$$P_{n+1} = \Phi(P_n) \qquad \text{for } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Brown 写像は次の二つの点で特徴的である．

命題 1 ([2, 4, 5])　1. 点列 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は周期 9 をもつ（Φ は周期 9 の再帰方程式 [5] である）．

2. 凹 9 角形からなる不変曲線をもつ（Φ は超離散 QRT 写像ではない[1]）．

2 節で述べるように，超離散 QRT 写像に対してはトロピカル楕円曲線を用いた幾何学的解釈が与えられており，超離散 QRT 写像は対応するトロピカル Jacobi 多様体上の平行移動に他ならないことが知られている [12, 13]．本稿では，Brown 写像を二つの超離散 QRT 写像に分解し，対応するトロピカル Jacobi 多様体（の類似物）上の平行移動に他ならないことを示す．このようなトロピカル幾何学的解釈から，Brown 写像は周期 9 の再帰方程式であることが自然に導かれる．さらに，超離散テータ関数を用いて，Brown 写像の初期値問題の一般解を構成する．

2　超離散 QRT 写像の幾何学

超離散 QRT 写像は 2 次元区分線形写像の 8 パラメータ族であり，各写像 $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ は次のように与えられる [15]．

$$\bar{x} = F_1(y) - F_3(y) - x \qquad \bar{y} = G_1(\bar{x}) - G_3(\bar{x}) - y \tag{2.1}$$

[1] QRT 写像でない可積分な 2 次元有理写像を HKY(Hirota-Kimura-Yahagi) 写像と呼ぶことがある [3, 7, 17]

ここで，F_i および G_i $(i=1,3)$ は 8 パラメータ α_{00}, α_{01}, α_{02}, α_{10}, α_{12}, α_{20}, α_{21}, $\alpha_{22} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ を含むトロピカル多項式である：

$$F_1(y) := \max(\alpha_{20}+2y, \alpha_{21}+y, \alpha_{22}) \qquad F_3(y) := \max(\alpha_{00}+2y, \alpha_{01}+y, \alpha_{02})$$
$$G_1(\bar{x}) := \max(\alpha_{02}+2\bar{x}, \alpha_{12}+\bar{x}, \alpha_{22}) \qquad G_3(\bar{x}) := \max(\alpha_{00}+2\bar{x}, \alpha_{10}+\bar{x}, \alpha_{20})$$

F_1，F_3 および $F_2(y) := \max(\alpha_{10}+2y, \alpha_{11}+y, \alpha_{12})$ を用いて，トロピカル多項式 $F(\boldsymbol{\alpha}; x, y)$ を次のように定義する．

$$F(\boldsymbol{\alpha}; x, y) := \max(F_1(y), F_2(y)+x, F_3(y)+2x)$$

ただし，$\boldsymbol{\alpha}$ は α_{ij} を $(i+1, j+1)$ 成分としてもつ 3×3 行列である．さらに $\boldsymbol{\alpha}_{-\infty} = \boldsymbol{\alpha}|_{\alpha_{11}=-\infty}$ とおく．超離散 QRT 写像 (2.1) は不変曲線

$$\Sigma_\kappa : \quad \kappa + x + y = F(\boldsymbol{\alpha}_{-\infty}; x, y) \tag{2.2}$$

の 1 パラメータ族 $\{\Sigma_\kappa\}_{\kappa\in\mathbb{R}}$ をもち，各不変曲線は高々凸 8 角形である [10, 12].

ここで，パラメータ $\mu \in \mathbb{R}$ を含むトロピカル多項式 $E_\mu(x, y)$ を次のように定める．

$$E_\mu(x, y) = \max(-\mu + F(\boldsymbol{\alpha}; x, y), F(\boldsymbol{\beta}; x, y))$$

ただし $\boldsymbol{\beta} = -\lambda + \boldsymbol{\alpha}|_{\alpha_{11}=\lambda}$ とおいた．さらに $\alpha_{11} < 0$，$\lambda > \alpha_{11}$，$\alpha_{00} = -\infty$ と仮定する．$E_\mu(x, y)$ で与えられるトロピカル曲線[2]を $\mathcal{T}(E_\mu(x, y))$ と表す．次が成り立つことに注意.

$$\mathcal{T}(E_\mu(x, y)) = \begin{cases} \mathcal{T}(F(\boldsymbol{\beta}; x, y)) & \text{for } \mu \geq \lambda \\ \mathcal{T}(F(\boldsymbol{\alpha}; x, y)) & \text{for } \mu \leq \alpha_{11} \end{cases}$$

仮定 $\alpha_{00} = -\infty$ より，$\mathcal{T}(E_\mu(x, y))$ は高々3 次のトロピカル曲線である [18]．パラメータをうまく選ぶと $\mathcal{T}(E_\mu(x, y))$ は滑らかかつ種数 1 をもつが [16, 18]，このような $\mathcal{T}(E_\mu(x, y))$ はトロピカル楕円曲線と呼ばれる [18]．Vigeland によりトロピカル楕円曲線は通常の楕円曲線と同様に加法群の構造をもつことが示されている [18].

さて，$\mathcal{T}(F(\boldsymbol{\alpha}; x, y))$ は種数 1 のトロピカル曲線であると仮定しよう[3]．このとき，任意の $\mu \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{T}(E_\mu(x, y))$ も種数 1 である．$\mathcal{T}(E_\mu(x, y))$ のペンシルを考えよう：

$$\{\mathcal{T}(E_\mu(x, y))\}_{\mu\in\mathbb{R}} \tag{2.3}$$

二つの曲線 $\mathcal{T}(F(\boldsymbol{\alpha}; x, y))$ および $\mathcal{T}(F(\boldsymbol{\beta}; x, y))$ は全て（高々7 本）の半直線を共有しており，それらがペンシル (2.3) の底点になる．$P = (x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の任意の点とする．行列 $\boldsymbol{\alpha}$ に含まれるパラメータのうち α_{11} のみをうまく選びなおして，$\mathcal{T}(F(\boldsymbol{\alpha}; x, y))$ を種数 1 に保ったまま，次が成り立つように出来る[4].

$$\alpha_{11} < x + y - F(\boldsymbol{\alpha}_{-\infty}; x, y) < \lambda$$

このとき，(2.3) の曲線で P を通るものが唯一つ定まるので，それを C とおく．

[2] $E_\mu(x, y)$ の微分不可能な点全体の集合 [16].
[3] 以下の議論に滑らかさは影響しないのでこのように仮定する．
[4] (2.1) は α_{11}, λ の値に依存しないことに注意.

図 1 に $\mathbb{P}^{1,trop} \times \mathbb{P}^{1,trop}$における[5]ペンシル (2.3) を示す．点線および破線はそれぞれ $\mathcal{T}\left(F(\boldsymbol{\alpha}; x, y)\right)$ および $\mathcal{T}\left(F(\boldsymbol{\beta}; x, y)\right)$ を，実線は P を通る曲線 C を表す．曲線 C の有限部分（C から全ての半直線を除いた部分）$\bar{C}$ は次式で与えられる．

$$\mu + x + y = F(\boldsymbol{\alpha}_{-\infty}; x, y)$$

これは超離散 QRT 写像 (2.1) の不変曲線 (2.2) において $\kappa = \mu$ としたものに他ならない．ゆえに，(2.1) の不変曲線族 $\{\Sigma_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{R}}$ はペンシル (2.3) の退化極限 $\alpha_{11}, -\lambda \to -\infty$ とみなすことが出来る．

C は高々7 本の半直線をもつが，その中に x 軸となす角 ϑ が $-\pi/2 < \vartheta < \pi/4$ なるものが唯一つ存在する．そのような半直線と $\bar{C}$ との交点である頂点を T とおく．同様に x 軸となす角 ϑ が $\pi/4 < \vartheta < \pi$ である半直線も唯一つ存在し，その半直線と $\bar{C}$ との交点である頂点を $\mathcal{O}$ とおく [12]（図 1）．

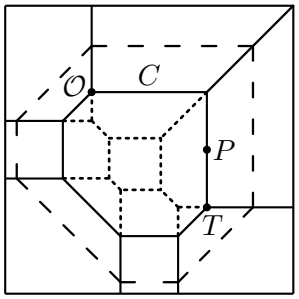

図 1: ペンシル (2.3).

いま，C は n 個の頂点を含むとしよう．$\mathcal{V}_1 := \mathcal{O} \in \bar{C}$ とおく．$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，反時計回りに見て $\mathcal{V}_i$ の隣にある頂点を $\mathcal{V}_{i+1}$ とおき，$\mathcal{V}_i$ と $\mathcal{V}_{i+1}$ とを結ぶ辺を $\mathcal{E}_i$ とおく（$\mathcal{V}_{n+1} := \mathcal{V}_1$）．また，$\varepsilon_i = 1/|\boldsymbol{v_i}|$ とおく．ただし $\boldsymbol{v_i}$ は互いに素な整数成分をもつ $\mathcal{E}_i$ の方向ベクトルであり $|\boldsymbol{v_i}|$ はその Euclid 長さである，このような準備のもと，$\bar{C}$ の全格子長 $\mathcal{L}$ およびトロピカル Jacobi 多様体 $J(\bar{C})$ をそれぞれ次のように定義する [6, 9].

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i |\mathcal{E}_i| \qquad\qquad J(\bar{C}) = \mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z}$$

さらに，Abel-Jacobi 写像 $\eta : \bar{C} \to J(\bar{C})$ を各頂点で次のように帰納的に定義し，各辺 $\mathcal{E}_i$ 上へ線形に拡張する．

$$\begin{cases} \eta(\mathcal{V}_1) = 0 \\ \eta(\mathcal{V}_{i+1}) = \eta(\mathcal{V}_i) + \varepsilon_i |\mathcal{E}_i| \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

$\bar{C}$ 上の 2 点 P, Q の距離 $d_C(P, Q)$ を次で定める．

$$d_C(P, Q) = \eta(Q) - \eta(P)$$

このとき，$\mathcal{O}$ を恒等元とし，$\bar{C}$ 上の点からなる群 $(\bar{C}, \mathcal{O})$ における加法 $+$ が d_C を用いて次のように与えられる．

$$d_C(\mathcal{O}, P + Q) = d_C(\mathcal{O}, P) + d_C(\mathcal{O}, Q)$$

次が成り立つ．

定理 1 ([12]) 超離散 QRT 写像 $P \mapsto \bar{P}$ (2.1) は群 $(\bar{C}, \mathcal{O})$ の加法である：

$$P + T = \bar{P}$$

系 1 ([12]) 超離散 QRT 写像 $P \mapsto \bar{P}$ (2.1) は Abel-Jacobi 写像 $\eta : \bar{C} \to J(\bar{C})$ によりトロピカル Jacobi 多様体 $J(\bar{C})$ 上で線形化される：

$$\eta(P) \mapsto \eta(\bar{P}) = \eta(P) + \eta(T)$$

[5] $\mathbb{P}^{1,trop}$ はトロピカル射影直線 [8, 9].

超離散 QRT 写像 $P \mapsto \bar{P}$ は，$\bar{C}$ とトロピカル直線 L_1^{trop} [6]，L_2^{trop} [7]との交叉を用いて幾何学的に実現できる [12, 13]（図 2）．

3 Brown 写像

3.1 不変曲線からの導出

前節で述べたように，超離散 QRT 写像 (2.1) は種数 1 のトロピカル曲線とトロピカル直線との交叉を用いて幾何学的に実現できる．すなわち，不変曲線から幾何学的に写像を構成できる．同様に，Brown 写像 (1.1) もその不変曲線から幾何学的に導出できる．$\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，次を満たす点 (x, y) の集合を Υ_κ とおく（図 3）．

$$\kappa = \min\left(H(x, y), H(y, x)\right) \tag{3.1}$$

ただし，$H(x, y)$ は次のようなトロピカル多項式である．

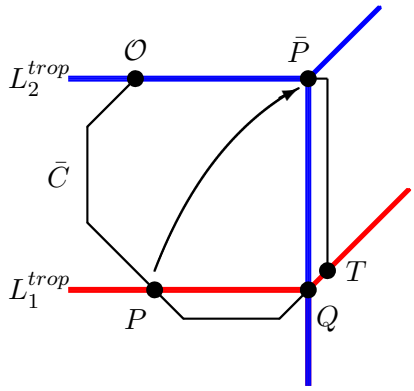

図 2: 超離散 QRT 写像 $P \mapsto \bar{P}$.

$$H(x, y) := \max(x, -y, -x + y, -x - y)$$

Υ_κ は凹 9 角形であり，その 1 パラメータ族 $\{\Upsilon_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ が Brown 写像の不変曲線族を与える [4].

$P = (x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の任意の点とする．このとき P を通る凹 9 角形 Υ_κ が唯一つ存在する．Υ_κ の頂点 $(\kappa, 2\kappa)$ を $\mathcal{V}_1$ とおき，続けて反時計回りに $\mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_9$ とおく（図 3）．また，頂点 $\mathcal{V}_i$ と $\mathcal{V}_{i+1}$ とを結ぶ辺を $\mathcal{E}_i$ とおく（$\mathcal{V}_{10} := \mathcal{V}_1$）．

点 P を通り x 軸に平行な直線を L_1 とおく．直線 L_1 は Υ_κ と 2 点で交わるので[8]，P と異なる交点を $Q = (\bar{x}, y)$ とおく（図 3）．このとき次が成り立つ [14].

$$\bar{x} = \xi(x, y)$$

同様に，点 Q を通り y 軸に平行な直線を L_2 とおく．直線 L_2 は Υ_κ と 2 点で交わるので，Q と異なる交点を $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ とおく（図 3）．Υ_κ は $y = x$ に関して対称なので次が成り立つ．

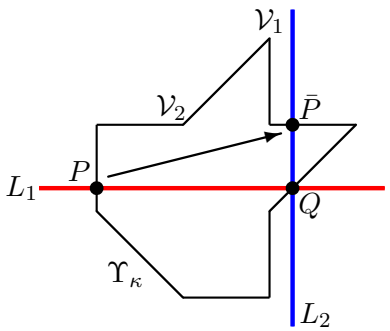

図 3: Brown 写像 $P \mapsto \bar{P}$.

$$\bar{y} = \xi(y, \bar{x})$$

したがって，$P = (x, y)$ から $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ への対応は Brown 写像 (1.1) に他ならない．

3.2 超離散 QRT 写像への分解

Brown 写像がその不変曲線から幾何学的に構成できる理由は，Brown 写像が二つの超離散 QRT 写像に分解されるからに他ならない．以下でその分解の様子について説明する．

[6] 2 点 P，T を通るトロピカル直線として一意に定まる．
[7] 2 点 Q，$\mathcal{O}$ を通るトロピカル直線として一意に定まる．ただし，Q は $\bar{C}$ と L_1^{trop} の 3 番目の交点．
[8] 一般に 2 点で交わるとは限らないが，そうでない場合も 2 点で交わる場合に帰着できる [14].

$\kappa \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．次のパラメータ行列 $\boldsymbol{\alpha}$ に対するトロピカル多項式 $E_\kappa(x,y)$ で与えられるトロピカル曲線を Γ_κ とおく．Γ_κ は次数 3，種数 1 のトロピカル曲線である．

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

また，直線 $y = x$ に関して Γ_κ と対称なトロピカル曲線を $\check{\Gamma}_\kappa$ とおく[9]．$\check{\Gamma}_\kappa$ も次数 3，種数 1 のトロピカル曲線である．Γ_κ および $\check{\Gamma}_\kappa$ の有限部分 $\bar{\Gamma}_\kappa$ および $\bar{\check{\Gamma}}_\kappa$ はそれぞれ次の式で与えられる．

$$\bar{\Gamma}_\kappa : \quad \kappa = H(x,y) \qquad \bar{\check{\Gamma}}_\kappa : \quad \kappa = H(y,x)$$

一方，(3.2) に対応する超離散 QRT 写像 $\Psi : (x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$ は次の通り．

$$\bar{x} = \xi(x,y) \qquad \bar{y} = -y + \max(\bar{x}, 0) \tag{3.3}$$

(3.3) の不変曲線 Σ_κ は $\bar{\Gamma}_\kappa$ に一致する．また，(3.3) は周期 7 の再帰方程式である [10]．同様に，${}^t\boldsymbol{\alpha}$ に対応する超離散 QRT 写像 $\check{\Psi} : (x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$ は次の通りであり

$$\bar{x} = -x + \max(y, 0) \qquad \bar{y} = \xi(y, \bar{x}) \tag{3.4}$$

その不変曲線 $\check{\Sigma}_\kappa$ は $\bar{\check{\Gamma}}_\kappa$ に一致する．(3.4) も周期 7 の再帰方程式である．

P，Q，$\bar{P}$，L_1，L_2 を上と同様におく．このとき，点 P を通るトロピカル曲線 $\Gamma_{\kappa'}$ が一意に定まる[10]．点 P および $\mathcal{V}_6 = (\kappa', -\kappa')$ を通るトロピカル直線 L_1^{trop} は $\bar{\Gamma}_{\kappa'}$ ともう一点 Q' で交わる（図 4）．この交叉により $\bar{\Gamma}_{\kappa'}$ 上の写像 $P \mapsto Q'$ が定まるが，超離散 QRT 写像に関する一般論より，それは (3.3) の x 成分に他ならない．

一方，Q' は $\bar{\check{\Gamma}}_{\kappa''}$ 上の点とみなせる[11]ので，$\bar{\check{\Gamma}}_{\kappa''}$ と Q' および $\mathcal{V}_3 = (-\kappa'', \kappa'')$ を通るトロピカル直線 L_2^{trop} との交叉により，$\bar{\check{\Gamma}}_{\kappa''}$ 上の写像 $Q' \mapsto \bar{P}'$ が定まる．この写像は (3.4) の y 成分に他ならない．

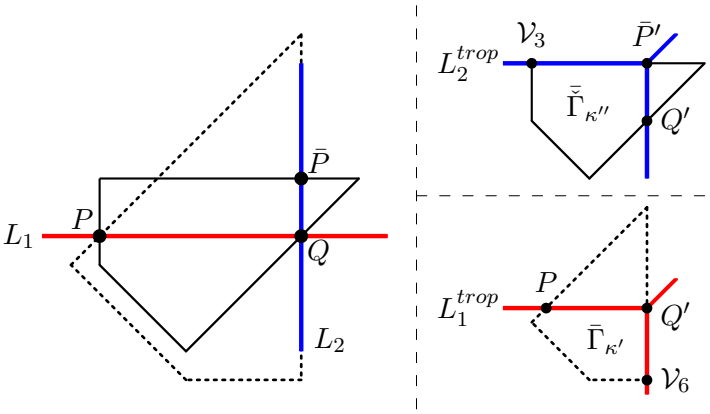

図 4: Brown 写像の分解．

このようにして得られた点 Q' および $\bar{P}'$ はそれぞれ Q および $\bar{P}$ に他ならないことが示される [14]．したがって，Brown 写像 Φ は，直線 $y = x$ に関して対称な二つのトロピカル曲線上でそれぞれ定義された二つの超離散 QRT 写像 Ψ および $\check{\Psi}$ を用いて次のように分解されることが示された．

$$\Phi = \check{\Psi} \circ \check{\Pi} \circ \Pi \circ \Psi$$

ただし $\Pi : (x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$ および $\check{\Pi} : (x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$ はそれぞれ $\bar{\Gamma}_{\kappa'}$ および $\bar{\check{\Gamma}}_{\kappa''}$ 上の対合である．

$$\Pi : \begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = -y + \max(0, \bar{x}) \end{cases} \qquad \check{\Pi} : \begin{cases} \bar{x} = -x + \max(0, y) \\ \bar{y} = y \end{cases} \tag{3.5}$$

[9] $\check{\Gamma}_\kappa$ は ${}^t\boldsymbol{\alpha}$ に対するトロピカル多項式 $E_\kappa(x,y)$ で与えられるトロピカル曲線．
[10] κ' は必ずしも κ と一致しない．
[11] κ'' は必ずしも κ' と一致しない．

3.3 トロピカル Jacobi 多様体

種数 1 のトロピカル曲線 Γ_κ および $\check{\Gamma}_\kappa$ の加法の恒等元をそれぞれ $\mathcal{O} := \mathcal{V}_1$ および $\check{\mathcal{O}} := \mathcal{V}_3$ とする．また，$T := \mathcal{V}_6$ および $\check{T} := \mathcal{V}_8$ とおく．2 節で示した方法にしたがって Abel-Jacobi 写像 $\eta : \bar{\Gamma}_\kappa \to J(\bar{\Gamma}_\kappa) = \mathbb{R}/7\kappa\mathbb{Z}$ および $\check{\eta} : \bar{\check{\Gamma}}_\kappa \to J(\bar{\check{\Gamma}}_\kappa) = \mathbb{R}/7\kappa\mathbb{Z}$ を構成する．このとき，超離散 QRT 写像 (3.3) および (3.4) はそれぞれトロピカル Jacobi 多様体 $J(\bar{\Gamma}_\kappa)$ および $J(\bar{\check{\Gamma}}_\kappa)$ 上の平行移動とみなせる．分解 (3.5) を用いて，Brown 写像 (1.1) を $J(\bar{\Gamma}_\kappa)$ および $J(\bar{\check{\Gamma}}_\kappa)$ 上で再構成する．

凹 9 角形 Υ_κ の全格子長 $\mathcal{L}$ を次のように定める．

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{9} \varepsilon_i |\mathcal{E}_i| = 9\kappa$$

また，$J(\Upsilon_\kappa) := \mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z} = \mathbb{R}/9\kappa\mathbb{Z}$ とおく．さらに，写像 $\nu : \Upsilon_\kappa \to J(\Upsilon_\kappa)$ を各頂点 $\mathcal{V}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ で次のように定め，各辺 $\mathcal{E}_i (i = 1, 2, \ldots, 9)$ 上へ線形に拡張する．

$$\begin{cases} \nu(\mathcal{O}) = \eta(\mathcal{O}) = 0 \\ \nu(\mathcal{V}_{i+1}) = \nu(\mathcal{V}_i) + \eta(\mathcal{V}_{i+1}) - \eta(\mathcal{V}_i) & \text{if } \mathcal{E}_i \in \bar{\Gamma}_\kappa \\ \nu(\mathcal{V}_{i+1}) = \nu(\mathcal{V}_i) + \check{\eta}(\mathcal{V}_{i+1}) - \check{\eta}(\mathcal{V}_i) & \text{if } \mathcal{E}_i \in \bar{\check{\Gamma}}_\kappa \end{cases} \tag{3.6}$$

ただし，添え字は mod 9 で考える．この写像は集合 Υ_κ から集合 $J(\Upsilon_\kappa)$ への全単射である．

次の区分線形写像 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えよう．

$$\phi(x) = \max_{n \in \mathbb{Z}} \left(\min\left(2x - 5n, x + 2n + 1\right), \min\left(2x - 5n - 3, x + 2n + 2\right) \right)$$

この写像は準周期性 $\phi(x + 7) = \phi(x) + 9$ をもつ．区分線形写像 $\psi, \check{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定める．

$$\psi(x) := \kappa\phi\left(\frac{x}{\kappa'} - 1\right) + \kappa \qquad \check{\psi}(x) := \kappa\phi\left(\frac{x}{\kappa''} - 5\right) + 8\kappa$$

これらはそれぞれ集合間の全単射 $\psi : J(\bar{\Gamma}_{\kappa'}) \to J(\Upsilon_\kappa)$ および $\check{\psi} : J(\bar{\check{\Gamma}}_{\kappa''}) \to J(\Upsilon_\kappa)$ であり，次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccccc} J(\bar{\Gamma}_{\kappa'}) & \xrightarrow{\psi} & J(\Upsilon_\kappa) & \xleftarrow{\check{\psi}} & J(\bar{\check{\Gamma}}_{\kappa''}) \\ \uparrow{\scriptstyle \eta} & & \uparrow{\scriptstyle \nu} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\eta}} \\ \bar{\Gamma}_{\kappa'} & \xleftarrow{\iota} & \Upsilon_\kappa & \xrightarrow{\check{\iota}} & \bar{\check{\Gamma}}_{\kappa''} \end{array}$$

ここで，ι および $\check{\iota}$ は自然な点の同一視である．このとき次の命題が成り立つ．

命題 2 ([14]) Brown 写像 $P \mapsto \bar{P}$ (1.1) は写像 $\nu : \Upsilon_\kappa \to J(\Upsilon_\kappa)$ (3.6) により $J(\Upsilon_\kappa)$ 上で線形化される：

$$\nu(P) \mapsto \nu(\bar{P}) = \nu(P) + 5\kappa \tag{3.7}$$

命題 2 から，任意の点の (1.1) における周期が次のように計算できる．

$$\frac{\mathcal{L}}{\gcd\left(\mathcal{L}, 5\kappa\right)} = \frac{9\kappa}{\gcd\left(9\kappa, 5\kappa\right)} = 9$$

すなわち命題 1 が得られる．

3.4 初期値問題の一般解

Brown 写像の初期値問題の一般解を構成するため，超離散楕円テータ関数を導入する [11]：

$$\Theta(u;\theta) := -\theta\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \theta\max_{n\in\mathbb{Z}}\left(2nu-n-n^2\right)$$

$\Theta(u;\theta)$ は楕円テータ関数 $\vartheta_{01}(z,\tau)$ の超離散化であり，振幅 $\theta/4$ をもつ周期 1 の周期関数である．$\Theta(u;\theta)$ を用いて次のように区分線形関数 $\Xi(u;\alpha,\beta,\gamma,\theta)$ を定義する．

$$\Xi(u;\alpha,\beta,\gamma,\theta) := \left\{\Theta\left(\frac{u}{\alpha};\theta\right)-\Theta\left(\frac{u-\beta}{\alpha};\theta\right)\right\}-\left\{\Theta\left(\frac{u-\gamma}{\alpha};\theta\right)-\Theta\left(\frac{u-\beta-\gamma}{\alpha};\theta\right)\right\}$$

$\alpha\geq\beta+\gamma$ および $\beta\geq\gamma>0$ と仮定すると，$\Xi(u;\alpha,\beta,\gamma,\theta)$ は振幅 $2\gamma\theta/\alpha$ をもつ周期 α の周期関数である．超離散 QRT 写像の一般解は $\Xi(u;\alpha,\beta,\gamma,\theta)$ により与えられる [12].

$P_0=(x_0,y_0)$，$\kappa=\min\left(H(x_0,y_0),H(y_0,x_0)\right)$ とおく．また，$u_n:=\nu(P_0)-3\kappa+5\kappa n$ とおく．このとき初期値 P_0 をもつ Brown 写像の一般解 $P_n=(x_n,y_n)$ は次のように与えられる（図 5）.

$$x_n=\Omega(u_n):=\max\left(\Xi\left(u_n;9\kappa,6\kappa,2\kappa,\frac{9}{2}\kappa\right),\Xi\left(u_n-\kappa;9\kappa,3\kappa,3\kappa,\frac{9}{2}\kappa\right)\right)$$
$$y_n=\Omega(u_n-2\kappa)$$

4 まとめ

凹 9 角形を不変曲線にもつ 2 次元区分線形写像である Brown 写像は二つの超離散 QRT 写像の合成とみなせることを示した．超離散 QRT 写像はトロピカル楕円曲線の加法の定める力学系なので，このような同一視を通して，Brown 写像をトロピカル Jacobi 多様体（の類似物）上の平行移動と解釈できる．このような解釈に立てば，Brown 写像の再帰性や初期値問題の一般解が自然に導かれる．

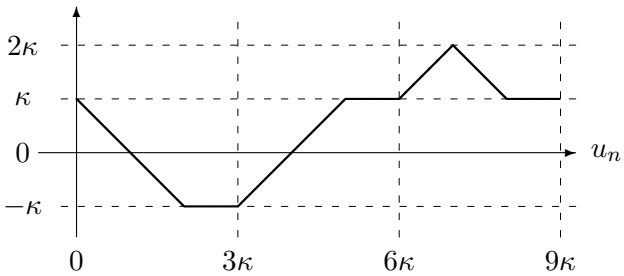

図 5: $\Omega(u_n)$.

参考文献

[1] Brown M: Amer. Math. Monthly **92** (1985) 218.

[2] Graham R L, Knuth D E and Patashnik O: Concrete mathematics : a foundation for computer science. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1989).

[3] Hirota R, Kimura K and Yahagi H: J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 10377.

[4] 広田良吾，高橋大輔: 差分と超離散 共立出版 (2003).

[5] Hirota R and Yahagi H: J. Phys. Soc. Jpn. **71** (2002) 2867.

[6] Inoue R and Takenawa T: Int. Math. Res. Notices (2008) Vol. 2008, article ID rnn019.

[7] Joshi N, Grammaticos B, Tamizhmani T and Ramani A: Lett. Math. Phys. **78** (2006) 27.

[8] Kajiwara T: Tropical toric varieties *Preprint* (2007).

[9] Mikhalkin G and Zharkov I: Tropical curves, their Jacobians and theta functions *Preprint* math.AG/0612267 (2006).

[10] Nobe A: Theor. Appl. Mec. Japan **52** (2003) 229.

[11] Nobe A: J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) L335.

[12] Nobe A: J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 125205.

[13] 野邊厚: 応用力学研究所研究集会報告 No.19ME-S2 (2008) Article No.6.

[14] Nobe A: On the Brown map *Preprint* (2009).

[15] Quispel G R W, Capel H W and Scully J: J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 2491.

[16] Richter-Gebert J, Sturmfels B and Theobald T: First Steps in Tropical Geometry *Preprint* math.AG/0306366 (2003).

[17] Tsuda T, Grammaticos B, Ramani A and Takenawa T: Lett. Math. Phys. **82** (2007) 39.

[18] Vigeland M D: The group law on a tropical elliptic curve *Preprint* math.AG/0411485 (2004).