変形Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式から見たPainlev´{e} III 型方程式

菊地, 哲也
東京大学大学院数理科学研究科

https://doi.org/10.15017/14277

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (5), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 5 (pp. 29-34)

変形Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式から見たPainlevé III 型方程式

菊地 哲也 (KIKUCHI Tetsuya)

（Received February 3, 2009）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

変形 Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式から見た Painlevé III 型方程式

東大数理・特任研究員　菊地哲也　(KIKUCHI Tetsuya)

概　要　Painlevé III 型方程式を, 変形 Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式というソリトン方程式の相似簡約として構成する. ここで与える構成法により, Painlevé III 型方程式の持つ 2 つの $A_1^{(1)}$ 型 affine Weyl 群のの対称性が, 他の Painlevé 方程式たちと同様, Sato-Wilson 作用素への置換の作用として自然に構成されることを示す.

1　はじめに

Painlevé II 型から VI 型の, 5 つの方程式のパラメータに作用する Bäcklund 変換群は, 順に $A_1^{(1)}, A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, D_4^{(1)}$ 型の affine Weyl 群の構造を持つことが知られている. 一方, 様々なソリトン方程式の相似簡約として Painlevé 方程式が得られることが知られているが, 特に affine Lie 環の対称性を持つソリトン方程式 (Drinfel'd-Sokolov 階層) の相似簡約で得られる常微分方程式系には, affine Weyl 群の対称性が代数的に自然に構成できる. このように見ると野海・山田の $A_l^{(1)}$ 型高階パンルヴェ方程式系 [5] や, 藤・鈴木による $D_{2n+2}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式系 [1] が Painlevé II, IV, V, VI 型方程式の対称性が自然に記述できることがわかる. 本稿では, 筆者と筧三郎が論文 [3] において考察した "一般化された" Drinfel'd-Sokolov 階層 (微分型非線形 Schrödinger 方程式や結合型変形 KdV 方程式を含む) を, 戸田階層の時間変数 $\bar{t}$ にまで拡張して得られる偏微分方程式系に属す, 変形 Pohlmeyer-Lund-Regge (以下 PLR) 方程式から相似簡約で Painlevé III 型方程式が得られることを示し, 上に述べた他の Painlevé 方程式たちと同様な方法で affine Weyl 群対称性が記述できることを示す. 先に方程式の具体系を述べておく. 変形 PLR 方程式とは

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial \bar{t}_1} = -2\bar{q}e^{2\phi} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \bar{t}_1} = 2\bar{r}e^{-2\phi} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t_1} = 2qr \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \bar{t}_1} = -2\overline{qr} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial t_1} = -2qe^{-2\phi} \\ \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t_1} = 2re^{2\phi} \end{cases} \tag{1.1}$$

という方程式系である. ここで $t_1, \bar{t}_1$ が独立変数, $\phi, q, r, \bar{q}, \bar{r}$ が従属変数であり, この 6 式より

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \bar{t}_1} = 4(q\bar{r}e^{-2\phi} - \bar{q}re^{2\phi})$$

という, 戸田場の方程式に似た形の方程式が得られることもわかる. この方程式系は, 変形 KdV 方程式から KdV 方程式への Miura 変換と同様のゲージ変換により, PLR 方程式 [7], [4], [2] に変換される. また (1.1) の零曲率方程式による Lax 形式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1} - B_1, \frac{\partial}{\partial \bar{t}_1} - \bar{B}_1\right] = 0, \tag{1.2}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2qr & -2q \\ 0 & -2qr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2r & -1 \end{bmatrix}\zeta, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2\bar{q}e^{2\phi} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\zeta^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\bar{r}e^{-2\phi} & 0 \end{bmatrix}$$

となる. ここで ζ はスペクトルパラメータである. 論文 [2] で考察されている PLR は 8 つの従属変数をもち, Lax 形式もひとつの式では書ききれないので, この変形された方程式の方が対称性を自然に記述できる.

(変形されていない) PLR 方程式の相似簡約により Painlevé III 型方程式 (以下 PIII) が得られることは神保・三輪 [2] により示されているが, 変形 PLR からも同様の操作により PIII が得られる. 実際, 変形 PLR (1.1) は独立変数に対する $[t_1]=1, [\bar{t_1}]=-1$ という次数付けに関して同次方程式なので, 自己相似条件 $e^{\phi(\lambda t_1,\lambda^{-1}\bar{t_1})}=\lambda^{-\alpha+\beta}e^{\phi(t_1,\bar{t_1})}$,

$$\begin{cases} q(\lambda t_1,\lambda^{-1}\bar{t_1})=\lambda^{-2\alpha-1}q(t_1,\bar{t_1}) \\ r(\lambda t_1,\lambda^{-1}\bar{t_1})=\lambda^{2\alpha}r(t_1,\bar{t_1}) \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{q}(\lambda t_1,\lambda^{-1}\bar{t_1})=\lambda^{-2\beta}\bar{q}(t_1,\bar{t_1}) \\ \bar{r}(\lambda t_1,\lambda^{-1}\bar{t_1})=\lambda^{2\beta+1}\bar{r}(t_1,\bar{t_1}) \end{cases} \tag{1.3}$$

を課すことに意味がある (α,β はパラメータ). この自己相似条件のもとで次の零曲率方程式が成り立つ:

$$\left[\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}-A,\frac{\partial}{\partial t}-B\right]=0 \tag{1.4}$$

$$A=\begin{bmatrix} -t/2 & t\bar{q}e^{2\phi} \\ 0 & t/2 \end{bmatrix}\zeta^{-1}+\begin{bmatrix} \alpha+tqr & -tq \\ -t\bar{r}e^{-2\phi} & -\alpha-tqr \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} t/2 & 0 \\ tr & -t/2 \end{bmatrix}\zeta \tag{1.5}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1/2 & -\bar{q}e^{2\phi} \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}\zeta^{-1}+\begin{bmatrix} qr & -q \\ \bar{r}e^{-2\phi} & -qr \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ r & -1/2 \end{bmatrix}\zeta \tag{1.6}$$

ここで $\alpha+tqr=\beta-t\overline{qr}$ という関係がある. また, 独立変数 t は $t=t_1+\bar{t_1}$, よって $\partial_t=(\partial_{t_1}+\partial_{\bar{t_1}})/2$ である. この方程式を従属変数 $-\psi_1:=-q\bar{q}^{-1}e^{-2\phi}$, あるいは $\psi_2:=r\bar{r}^{-1}e^{2\phi}$ について整理すると Painlevé III 型方程式が得られる. こうして得られる対称性と Painlevé III の持つ 2 つの $A_1^{(1)}$ 型 affine Weyl 群対称性との関連を述べる.

2 ソリトン方程式の構成

従属変数を成分にもつ対角行列 $\Phi=\mathrm{diag}(\phi,-\phi)$, $W_i:=\mathrm{diag}(w_{i1},w_{i2})$, $\bar{W_i}:=\mathrm{diag}(\bar{w}_{i1},\bar{w}_{i2})$ $(i=1,2,\ldots)$ に $\Lambda:=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \zeta & 0 \end{bmatrix}$ のべきをかけて展開した行列

$$W:=I+W_1\Lambda^{-1}+W_2\Lambda^{-2}=\cdots+\begin{bmatrix} w_{41} & w_{31} \\ w_{52} & w_{42} \end{bmatrix}\zeta^{-2}+\begin{bmatrix} w_{21} & q \\ w_{32} & w_{22} \end{bmatrix}\zeta^{-1}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$\bar{W}:=e^{\Phi}(I+\bar{W_1}\Lambda+\bar{W_2}\Lambda^2+\cdots)=\begin{bmatrix} e^{\phi} & 0 \\ 0 & e^{-\phi} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & \bar{q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{w}_{21} & \bar{w}_{31} \\ \bar{r} & \bar{w}_{22} \end{bmatrix}\zeta+\cdots\right) \tag{2.2}$$

を Sato-Wilson 作用素とよぶ (行列 Λ を行列の添字に対する差分作用素とみなしてそのように呼ぶ). ここで, 後に方程式を書くときに必要な変数を $q:=w_{11}$, $r:=w_{12}$, $\bar{q}:=\bar{w}_{11}$, $\bar{r}:=\bar{w}_{12}$ と名づけた. $H_n:=\begin{bmatrix} \zeta^n & 0 \\ 0 & -\zeta^n \end{bmatrix}=H_0\Lambda^{2n}$ とおき, Lax operator $L,\bar{L}$ を

$$L:=WH_0W^{-1}=H_0+U_1\Lambda^{-1}+U_2\Lambda^{-2}+\cdots=\cdots+\begin{bmatrix} u_{21} & u_{11} \\ u_{32} & u_{22} \end{bmatrix}\zeta^{-1}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u_{12} & -1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$\bar{L}:=\bar{W}H_0\bar{W}^{-1}=H_0+\bar{U_1}\Lambda+\bar{U_2}\Lambda^2+U_3\Lambda^3+\cdots=\begin{bmatrix} 1 & \bar{u}_{11} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{u}_{21} & \bar{u}_{31} \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} \end{bmatrix}\zeta+\cdots \tag{2.4}$$

と定義する. 定義より u_{ij} は w_{ij} で, $\bar{u}_{ij}$ は $\bar{w}_{ij}$ と e^{ϕ} により記述できる. たとえば

$$\begin{cases} u_{11}=-2q \\ u_{12}=2r \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{u}_{11}=-2\bar{q}e^{2\phi} \\ \bar{u}_{12}=2\bar{r}e^{-2\phi} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{21}=-u_{22}=2qr, \\ \bar{u}_{21}=-\bar{u}_{22}=2\overline{qr} \end{cases}$$

などはすぐにわかる. さらに, B_n, $\bar{B}_n$ を次で定義する:

$$
\begin{aligned}
B_n &= (WH_nW^{-1})_{\geq 0} = (\zeta^n L)_{\geq 0} = H_0\Lambda^{2n} + U_1\Lambda^{2n-1} + \cdots + U_{2n-1}\Lambda + U_{2n},\\
\bar{B}_n &= (\bar{W}H_{-n}\bar{W}^{-1})_{<0} = (\zeta^{-n}\bar{L})_{<0} = H_0\Lambda^{-2n} + \bar{U}_1\Lambda^{-2n+1} + \cdots + \bar{U}_{2n-1}\Lambda^{-1}.
\end{aligned}
$$

ここで添字の $<0, \geq 0$ は, それぞれ Λ の負べき, 非負べきを取り出すという意味である (ζ のべきではない). また $H_n = \zeta^n H_0 = H_0\Lambda^{2n}$ で, H_n は Λ のべきで数えると $2n$ 次になるので, 最高次の項をあえて H_n と書かなかった. 以下, 本論で用いるのは $n=1$ のときのみなので具体的に成分表示しておく:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= H_0\Lambda^2 + U_1\Lambda + U_2 = \begin{bmatrix} 2qr & -2q \\ 0 & -2qr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2r & -1 \end{bmatrix}\zeta,\\
\bar{B}_1 &= H_0\Lambda^{-2} + \bar{U}_1\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2\bar{q}e^{2\phi} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\zeta^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\bar{r}e^{-2\phi} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

これらを用いて, 独立変数 $t = (t_1, t_2, \ldots)$, $\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots)$ による, 従属変数 W, $\bar{W}$ の時間発展を次の Sato-Wilson 方程式で定義する.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - WH_n = -B_n^c W \\
\dfrac{\partial W}{\partial \bar{t}_n} = \bar{B}_n W - WH_{-n}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{W}}{\partial t_n} = B_n \bar{W} - \bar{W}H_n \\
\dfrac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}_n} = \bar{B}_n \bar{W} - \bar{W}H_{-n} = -\bar{B}_n^c \bar{W}
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

ここで $B_n^c := (\zeta^n L)_{<0} = \zeta^n L - B_n$, $\bar{B}_n^c := (\zeta^{-n}\bar{L})_{\geq 0} = \zeta^{-n}\bar{L} - \bar{B}_n$ である. 特に (2.5) の第 1 式の $\Lambda^{-1}, \Lambda^{-2} = \zeta^{-1}I$ の係数を見ると

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial W_1}{\partial t_n} = -U_{2n+1} \\
\dfrac{\partial W_1}{\partial \bar{t}_n} = \bar{U}_{2n-1}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial W_2}{\partial t_n} = -U_{2n+2} - U_{2n+1}\Lambda^{-1}W_1\Lambda \\
\dfrac{\partial W_2}{\partial \bar{t}_n} = \bar{U}_{2n-2} + \bar{U}_{2n-1}\Lambda^{-1}W_1\Lambda \quad (\bar{U}_0 := H_0)
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

が得られ, 第 2 式の Λ^0 の係数を見ると

$$
\frac{\partial e^{\Phi}}{\partial t_n} = U_{2n}e^{\Phi}, \qquad \frac{\partial e^{\Phi}}{\partial \bar{t}_n} = -\bar{U}_{2n}e^{\Phi} \tag{2.7}
$$

となる. これと (2.6) の第 2 式をあわせて, $\bar{W} = e^{\Phi}\widetilde{W}$ と分解したときの $\widetilde{W} = I + \bar{W}_1\Lambda + \cdots$ の満たす方程式を書き下すと,

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \widetilde{W}}{\partial t_n} = e^{-\Phi}(B_n - U_{2n})e^{\Phi}\widetilde{W} \\
\dfrac{\partial \widetilde{W}}{\partial \bar{t}_n} = -e^{-\Phi}(\bar{B}_n^c - \bar{U}_{2n})e^{\Phi}\widetilde{W}
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

となる. 特に (2.8) の Λ, Λ^2 の係数を見ると次が得られる:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{W}_1}{\partial t_n} = e^{-\Phi}U_{2n-1}(\Lambda e^{\Phi}\Lambda^{-1}), \\
\dfrac{\partial \bar{W}_1}{\partial \bar{t}_n} = -e^{-\Phi}\bar{U}_{2n+1}(\Lambda e^{\Phi}\Lambda^{-1})
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{W}_2}{\partial t_n} = U_{2n-2} + e^{-\Phi}U_{2n-1}(\Lambda e^{\Phi}\bar{W}_1\Lambda^{-1}) \\
\dfrac{\partial \bar{W}_2}{\partial \bar{t}_n} = -\bar{U}_{2n+2} - e^{-\Phi}\bar{U}_{2n+1}(\Lambda e^{\Phi}\bar{W}_1\Lambda^{-1})
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

方程式系 (2.6), (2.7), (2.9) で $n=1$ の場合を成分で表せば変形 PLR 方程式 (1.1) となる. なお $n=2$ の場合の t_2 微分の方程式が微分型非線形 Schrödinger 方程式である [3].

また, 従属変数 $\tau_{-1},\tau_0,\tau_1,\rho_{-1},\rho_1,\rho_1$ を

$$e^{\phi}=\frac{\rho_0}{\tau_0},\quad q=-\frac{\tau_1}{\tau_0},\quad r=-\frac{\rho_{-1}}{\rho_0},\quad \bar{q}=-\frac{\rho_1}{\rho_0},\quad \bar{r}=-\frac{\tau_{-1}}{\tau_0}$$

と定義することにより次の双線形方程式系が得られる:

$$\begin{cases}D_{t_1}\rho_0\cdot\tau_0=2\rho_{-1}\tau_1\\ D_{t_1}\rho_0\cdot\rho_1=2\tau_0\tau_1\\ D_{t_1}\tau_{-1}\cdot\tau_0=2\rho_{-1}\rho_0\end{cases}\quad \begin{cases}D_{\bar{t}_1}\tau_0\cdot\rho_0=2\tau_{-1}\rho_1\\ D_{\bar{t}_1}\rho_{-1}\cdot\rho_0=2\tau_{-1}\tau_0\\ D_{\bar{t}_1}\tau_0\cdot\tau_1=2\rho_0\rho_1\end{cases}\quad \begin{cases}D_{t_1}D_{\bar{t}_1}\tau_0\cdot\tau_0=8\rho_{-1}\rho_1\\ D_{t_1}D_{\bar{t}_1}\tau_0\cdot\tau_1=4\tau_0\tau_1\\ D_{t_1}D_{\bar{t}_1}\tau_{-1}\cdot\tau_0=4\tau_{-1}\tau_0\end{cases}\quad \begin{cases}D_{t_1}D_{\bar{t}_1}\rho_0\cdot\rho_0=8\tau_{-1}\tau_1\\ D_{t_1}D_{\bar{t}_1}\rho_0\cdot\rho_1=4\rho_0\rho_1\\ D_{t_1}D_{\bar{t}_1}\rho_{-1}\cdot\rho_0=4\rho_{-1}\rho_0\end{cases}$$

3　自己相似条件と Painlevé III 型方程式

λ をパラメータとして $t_\lambda=(\lambda t_1,\lambda^2 t_2,\ldots)$, $\bar{t}_{\lambda^{-1}}=(\lambda^{-1}\bar{t}_1,\lambda^{-2}\bar{t}_2,\ldots)$ とおく. Sato-Wilson 方程式 (2.8) は, $W(\zeta;t,\bar{t})\to\lambda^{\alpha H_0}W(\lambda^{-1}\zeta;t_\lambda,\bar{t}_{\lambda^{-1}})\lambda^{-\alpha H_0}$, $\bar{W}(\zeta;t,\bar{t})\to\lambda^{\alpha H_0}\bar{W}(\lambda^{-1}\zeta;t_\lambda,\bar{t}_{\lambda^{-1}})\lambda^{-\beta H_0}$ という 1 パラメータ変形について不変なので,

$$W(\lambda\zeta;t,\bar{t})=\lambda^{\alpha H_0}W(\zeta;t_\lambda,\bar{t}_{\lambda^{-1}})\lambda^{-\alpha H_0},\qquad \bar{W}(\lambda\zeta;t,\bar{t})=\lambda^{\alpha H_0}\bar{W}(\zeta;t_\lambda,\bar{t}_{\lambda^{-1}})\lambda^{-\beta H_0}\tag{3.1}$$

という自己相似条件をおくことに意味がある. ここで α,β もパラメータである. 特に $\bar{W}$ の満たす条件は,

$$e^{\Phi(t,\bar{t})}=\lambda^{\alpha H_0}e^{\Phi(t_\lambda,\bar{t}_{\lambda^{-1}})}\lambda^{-\beta H_0},\qquad \widetilde{W}(\lambda\zeta;t,\bar{t})=\lambda^{\beta H_0}\widetilde{W}(\zeta;t_\lambda,\bar{t}_{\lambda^{-1}})\lambda^{-\beta H_0}\tag{3.2}$$

と分解され, パラメータ α,β について対称的な表示になる. (3.1), (3.2) を成分で表したものが (1.3) である. (3.1), (3.2) の両辺を λ で微分して $\lambda=1$ とおくと

$$\zeta\frac{dW}{d\zeta}=[\alpha H_0,W]+\sum_n nt_n\frac{\partial W}{\partial t_n}-\sum_n n\bar{t}_n\frac{\partial W}{\partial\bar{t}_n},\tag{3.3}$$

$$0=(\alpha H_0)e^{\Phi}+\sum_n nt_n\frac{\partial e^{\Phi}}{\partial t_n}-\sum_n n\bar{t}_n\frac{\partial e^{\Phi}}{\partial\bar{t}_n}-e^{\Phi}(\beta H_0)\tag{3.4}$$

$$\zeta\frac{d\widetilde{W}}{d\zeta}=[\beta H_0,\widetilde{W}]+\sum_n nt_n\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial t_n}-\sum_n n\bar{t}_n\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\bar{t}_n}\tag{3.5}$$

という方程式が得られる. 以下簡単のため $t_1,\bar{t}_1$ 以外の独立変数は 0 としてしまう. すると, (3.3), (3.4), (3.5) に Sato-Wilson 方程式を代入し, Λ に関する次数が -1, 0, 1 の項を成分であらわすと, (2.6), (2.7), (2.9) により $\alpha-\beta+2t_1qr+2\bar{t}_1\bar{q}\bar{r}=0$,

$$\begin{cases}t_1\dfrac{\partial q}{\partial t_1}=-(2\alpha+1)q-2\bar{t}_1\bar{q}e^{2\phi}\\ t_1\dfrac{\partial r}{\partial t_1}=2\alpha r+2\bar{t}_1\bar{r}e^{-2\phi}\end{cases}\qquad \begin{cases}\bar{t}_1\dfrac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{t}_1}=2\beta\bar{q}-2t_1qe^{-2\phi}\\ \bar{t}_1\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{t}_1}=-(2\beta+1)\bar{r}+2t_1re^{2\phi}\end{cases}\tag{3.6}$$

が得られる. そこで新しい独立変数 $t=t_1+\bar{t}_1$, $s=t_1-\bar{t}_1$ と従属変数

$$\varphi=qr=\frac{\rho_{-1}\tau_1}{\rho_0\tau_0},\quad \bar{\varphi}=\bar{q}\bar{r}=\frac{\tau_{-1}\rho_0}{\tau_0\rho_0},\quad \psi_1=\frac{q}{\bar{q}e^{2\phi}}=\frac{\tau_0\tau_1}{\rho_0\rho_1},\quad \psi_2=\frac{r}{\bar{r}e^{-2\phi}}=\frac{\rho_{-1}\rho_0}{\tau_{-1}\tau_0},\tag{3.7}$$

を用いて, 変形 PLR (1.1) と相似条件の方程式 (3.6) などを書き下した後 $s=0$ とおくと, 方程式

$$\begin{cases}\psi_1'=-2-\dfrac{4\alpha+1}{t}\psi_1+2\psi_1^2-4\varphi\psi_1\\ \psi_2'=2+\dfrac{4\alpha+1}{t}\psi_2-2\psi_2^2+4\varphi\psi_2\end{cases}\qquad \begin{cases}\left(\dfrac{\varphi}{\psi_1}\right)'=\dfrac{4\alpha}{t}\dfrac{\varphi}{\psi_1}-4\varphi+4\dfrac{\varphi^2}{\psi_1}+(\beta-\alpha)\dfrac{2}{t}\\ \left(\dfrac{\varphi}{\psi_2}\right)'=-\dfrac{4}{t}\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\varphi}{\psi_2}-4\varphi-4\dfrac{\varphi^2}{\psi_2}-(\beta-\alpha)\dfrac{2}{t}\end{cases}$$

が得られる. ここで $'$ は t についての微分を表わす. さらに $y=-\psi_1, z=t\varphi/\psi_1$ とおけば,

$$\begin{cases} ty' = 4zy^2 - 2ty^2 - (4\alpha+1)y + 2t = \dfrac{\partial H}{\partial z} \\ tz' = -4yz^2 + 4tyz + (4\alpha+1)z + 2(\beta-\alpha)t = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \end{cases} \tag{3.8}$$

$$H = 2y^2z^2 - 2ty^2z - (4\alpha+1)yz + 2tz - 2t(\beta-\alpha)y \tag{3.9}$$

という連立方程式が得られる. これは PIII のハミルトン形式である. なお, $y=\psi_2, z=t\varphi/\psi_2$ とおいても $H=2y^2z^2-2ty^2z+(4\alpha+1)yz+2tz+2t(\beta-\alpha)y$ に関する PIII のハミルトン形式が得られる.

4 波動関数と線形方程式

関数 $\Psi_0 = \Psi_0(\zeta; t, \bar{t})$ を

$$\Psi_0 = \Psi_0(\zeta; t, \bar{t}) = \exp H_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (t_n \zeta^n + \bar{t}_n \zeta^{-n}) \right) = \begin{bmatrix} e^{\Sigma(t_n\zeta^n + \bar{t}_n\zeta^{-n})} & 0 \\ 0 & e^{-\Sigma(t_n\zeta^n + \bar{t}_n\zeta^{-n})} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

とおき, これと Sato-Wilson 作用素 $W, \bar{W}$ を用いて波動関数 $\Psi, \bar{\Psi}$ を

$$\Psi(\zeta; \alpha, t, \bar{t}) = W \zeta^{H_0 \alpha} \Psi_0, \qquad \bar{\Psi}(\zeta; \beta, t, \bar{t}, y) := \bar{W} \zeta^{H_0 \beta} \Psi_0, \tag{4.2}$$

で定義する. Ψ_0 の満たす方程式 $\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial t_n} = H_n \Psi_0$, $\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial \bar{t}_n} = H_{-n}\Psi_0$ $(n=1,2,\ldots)$ と Sato-Wilson 方程式より, 波動関数は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_n} = B_n \Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{t}_n} = \bar{B}_n \Psi, \qquad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t_n} = B_n \Psi, \qquad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{t}_n} = \bar{B}_n \bar{\Psi} \tag{4.3}$$

をみたす. 変形 PLR の零曲率方程式 (1.2) はこの線形方程式の両立条件である. さらに $W, \bar{W}$ に自己相似条件を課したとき, $Y=\Psi, \bar{\Psi}$ は ζ に関する線形方程式 $\zeta \dfrac{dY}{d\zeta} = (\alpha H_0 + t_1 B_1 - \bar{t}_1 \bar{B}_1) Y$ を満たす. この係数行列 $A = \alpha H_0 + t_1 B_1 - \bar{t}_1 \bar{B}_1$ を独立変数 t, s で表し $s=0$ としたものが (1.5) である. また, この線形方程式のモノドロミー保存変形方程式の係数行列 B (1.6) も, 変数 t に関する微分方程式 $\dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{B_1 + \bar{B}_1}{2} Y$ の係数行列で $s=0$ とおけば得られる.

5 Affine Weyl 群対称性

最後に [3] に従って, Sato-Wilson 作用素への 2 つの affine Weyl 群作用を定義する. まず互換に対応する行列を, $S_0 = \begin{bmatrix} 0 & \zeta^{-1} \\ \zeta & 0 \end{bmatrix}$, $S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ と定義し, Sato-Wilson 作用素 $W, \bar{W}$ への 2 種類の作用 s_0, s_1, r_0, r_1 を次で定義する:

$$\begin{cases} s_0(W(\zeta; t, \bar{t})) = X_0 W(\zeta; -t, -\bar{t}) S_0 \\ s_1(W(\zeta; t, \bar{t})) = X_1 W(\zeta; -t, -\bar{t}) S_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} s_0(\bar{W}(\zeta; t, \bar{t}) = X_0 \bar{W}(\zeta; -t, -\bar{t}) \\ s_1(\bar{W}(\zeta; t, \bar{t}) = X_1 \bar{W}(\zeta; -t, -\bar{t}) \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} r_0(W(\zeta; t, \bar{t})) = G_0 W(\zeta; -t, -\bar{t}) \\ r_1(W(\zeta; t, \bar{t})) = G_1 W(\zeta; -t, -\bar{t}) \end{cases} \qquad \begin{cases} r_0(\bar{W}(\zeta; t, \bar{t}) = G_0 \bar{W}(\zeta; -t, -\bar{t}) S_0 \\ r_1(\bar{W}(\zeta; t, \bar{t}) = G_1 \bar{W}(\zeta; -t, -\bar{t}) S_1 \end{cases} \tag{5.2}$$

ここで

$$X_0=\begin{bmatrix}-1/q & 0\\ \zeta & -q\end{bmatrix},\quad X_1=\begin{bmatrix}-r & 1\\ 0 & -1/r\end{bmatrix},\quad G_0=\begin{bmatrix}1 & -\zeta^{-1}e^{2\phi}/\bar{r}\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad G_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -e^{-2\phi}/\bar{q} & 1\end{bmatrix} \tag{5.3}$$

である. すなわち, W や $\bar{W}$ の右から S_0,S_1 をかけると, これらが下三角 (Λ の負べきで展開できる) や上三角でなくなるため, G_i や X_i をかけることにより元にもどしているのである. また独立変数を -1 倍しているのは, 時間発展と両立させるためである. 定義より $s_0^2=s_1^2=r_0^2=r_1^2=\mathrm{id}$ をみたすことは明らかである. このうち r_i で定義される作用が, 本質的に野海・山田による affine Weyl 群作用の構成 [6] と一致している. この作用を (3.8) の従属変数に対して行えば次が得られる:

$$\begin{cases} s_0(t)=-t\\ s_0(\alpha)=-\alpha-1\\ s_0(\beta)=\beta\\ s_0(y)=-y\\ s_0(z)=z-\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{y}+\dfrac{t}{y^2}\end{cases}\qquad \begin{cases} s_1(t)=-t\\ s_1(\alpha)=-\alpha\\ s_1(\beta)=\beta\\ s_1(y)=y+\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\dfrac{1}{z}+\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)\dfrac{1}{t-z}\\ s_1(z)=t-z\end{cases}$$

$$\begin{cases} r_0(t)=-t\\ r_0(\alpha)=\alpha\\ r_0(\beta)=-\beta+1\\ r_0(y)=\dfrac{(\beta-\alpha+2yz)\{(\beta+\alpha+2yz)y+2t\}}{4z-(\beta+\alpha+1-2yz)(\beta-\alpha+2yz)}\\ r_0(z)=z-\dfrac{(2\beta+1)z}{\beta-\alpha+2yz}+\dfrac{4z^2}{(\beta-\alpha+2yz)^2}\end{cases}\qquad \begin{cases} r_1(t)=-t\\ r_1(\alpha)=\alpha\\ r_1(\beta)=-\beta\\ r_1(y)=-y\\ r_1(z)=t-z\end{cases}$$

参考文献

[1] K. Fuji, T. Suzuki: "Higher order Painlevé system of type $D^{(1)}_{2n+2}$ arising from integrable hierarchy", *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2008**, no. 1, Art. ID rnm 129, 21 pp.

[2] M. Jimbo, T. Miwa: "Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III", *Physica D* **4** (1981), 26–46.

[3] S. Kakei, T. Kikuchi: "Affine Lie group approach to a derivative nonlinear Schrödinger equation and its similarity reduction", *Int. Math. Res. Not.* **78** (2004), 4181–4209.

[4] F. Lund, T. Regge: "Unified approach to strings and vortices with soliton solutions", *Phys. Rev. D.* **14** (1976), 1524–1535.

[5] M. Noumi, Y. Yamada: "Higher order Painlevé equations of type $A^{(1)}_l$", *Funkcial. Ekvac.* **41** (1998), 483–503.

[6] 野海正俊 "パンルヴェ方程式一対称性からの入門一" 朝倉書店, 2000 年

[7] K. Pohlmeyer: "Integrable hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints", *Comm. math. Phys.* **46** (1976), 207–221.