q-Painlev'{e} 方程式の対称化

梶原, 健司
九州大学大学院数理学研究院

中園, 信孝
九州大学大学院数理学府

津田, 照久
九州大学大学院数理学研究院

https://doi.org/10.15017/14276

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (4), 2009-02. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 4 (pp. 21-28)

q-Painlevé 方程式の対称化

梶原 健司 (KAJIWARA Kenji), 中園 信孝 (Nakazono Nobutaka), 津田 照久 (TSUDA Teruhisa)

（Received February 5, 2009）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

q-Painlevé 方程式の対称化

梶原 健司　(Kenji Kajiwara)　九州大学大学院数理学研究院
中園 信孝　(Nobutaka Nakazono)　九州大学大学院数理学府
津田 照久　(Teruhisa Tsuda)　九州大学大学院数理学研究院

概要

q-Painlevé 方程式は一般に連立 1 階差分方程式の形で与えられているが，ある特殊化によって単独 2 階差分方程式の形に帰着する．得られた方程式については，超幾何解などの特殊解の構造が元の方程式と異なるなど奇妙な現象が知られている．この特殊化は QRT 系においてパラメータを記述する行列を対称行列に取ることに対応することから，「対称化」と呼ぶ．本報告では Weyl 群対称性の立場から判明した対称化の意味，および方程式の超幾何解の系列について報告する．

1　はじめに

離散 Painlevé 方程式の中でも standard discrete Painlevé II と呼ばれる方程式

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an+b)x_n + c}{1 - x_n^2} \tag{1}$$

はもっとも早くから研究されていた方程式の一つである [22, 23]．(1) は特異点閉じ込めテストを用いて可積分性を保ったまま

$$Y_{n+1} + Y_n = \frac{(2an+b)X_n + c + d}{1 - X_n^2}, \quad X_{n+1} + X_n = \frac{(a(2n+1)+b)Y_{n+1} + c - d}{1 - Y_{n+1}^2} \tag{2}$$

と拡張することができる．ただし，$X_n = x_{2n}, Y_n = x_{2n-1}$ である．(2) は可積分な 2 階定数係数非線形常差分方程式の族である Quispel-Roberts-Thompson(QRT) 系の用語を流用して *asymmetric* discrete Painlevé II 方程式と呼ばれ，(1) も *symmetric* discrete Painlevé II 方程式と呼ばれることがある [13]．パラメータの特殊化で (2) のような 1 階連立方程式から (1) のような単独 2 階方程式を得る操作は，QRT 系でパラメータを特徴付ける行列を対称行列に取る操作に対応する．本稿ではこの操作を「対称化」と呼ぶことにする．

(2) は $A_3^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群対称性を持ち，Painlevé V 方程式の Bäcklund 変換を記述する差分方程式と見なすことができることが知られている [15, 20]．従って，合流型超幾何函数で記述される超幾何解 [14, 19] や Laguerre 多項式を要素とする普遍指標型の行列式で記述される有理解 [15, 16] がある．方程式の上では (2) で単純に $d = 0$ とすれば (1) が得られるが，特殊解のレベルではどうだろうか．(1) には次の特殊解が知られている．

超幾何解：[5, 11]

$$x_n = \frac{2}{z}\frac{\tau_{N+1}^{n+1}\tau_N^n}{\tau_{N+1}^n\tau_N^{n+1}} - 1, \quad \tau_N^n = \det(H_{n+i+2j-2})_{i,j=1,\ldots,N}, \quad H_{n+1} - zH_n + nH_{n-1} = 0, \tag{3}$$

$$a = \frac{8}{z^2}, \quad b = \frac{4(1+2N)}{z^2}, \quad c = -\frac{4(1+2N)}{z^2}, \quad N = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

有理解： [5, 12]

$$x_n = \frac{\sigma_{N+1}^{n+1}\sigma_N^{n+1}}{\sigma_{N+1}^n\sigma_N^n} - 1, \quad \sigma_N^n = \det\left(L_{N-2i+j+1}^{(n)}\right)_{i,j=1,\ldots,N}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(n)}(z)\lambda^k = (1-\lambda)^{-n-1}e^{-\frac{z\lambda}{1-\lambda}}, \quad L_k^{(n)}(z) = 0\ (k<0), \tag{5}$$

$$a = \frac{2}{z}, \quad b = \frac{2}{z}, \quad c = -\frac{2(N+1)}{z}, \quad N = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

有理解についてはパラメータの特殊化が直接 (2) の有理解から (1) のそれを与えることが示されているが [15]，超幾何解の対応はそう単純ではないように見える．というのは，H_n は本質的に放物柱 (parabolic cylinder) 函数であり，

Painlevé Ⅳ 方程式の超幾何解として現れる函数だからである．さらに行列式の構造を見てみると，(3) において H_n の添字が行方向には 1 ずつシフトするのに対し，列方向には 2 ずつシフトするという非対称性があり，Painlevé Ⅳ 方程式の超幾何解に現れる Hankel 行列式とは異なる [28]．超幾何解を記述する行列式のこのような非対称構造は他の 2 階単独の離散 Painlevé 方程式の多くに共通して見られるが [3, 10, 18]，それ以外の可積分系で見られない．本稿では，このような謎めいた構造の背後のメカニズムを考察する．

歴史的に，離散 Painlevé 方程式はまず (1) のように単独 2 階差分方程式の中から探索，同定され，その後に特異点閉じ込めテストで (2) のような 1 階連立方程式の形に拡張された．対称化によって，解を記述する超幾何函数として元の解と異なるものが現れるならば，他の離散 Painlevé 方程式の対称化についても超幾何解を調べておくことは重要である．本稿の前半では Sakai 理論 [26] で分類された q-Painlevé 方程式について，対称化によって得られる方程式のもっとも簡単な超幾何解 (Riccati 解) のリストを提示する．後半では，対称化によって元の方程式とは異なる超幾何函数が解として現れるメカニズムを $(A_2+A_1)^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群対称性を持つ q-Painlevé Ⅲ 方程式を例に説明する．

2　q-Painlevé 方程式の対称化と超幾何解

2.1　対称化：$(A_2+A_1)^{(1)}$ 型を例として

本節では $(A_2+A_1)^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群対称性を持つ q-Painlevé Ⅲ 方程式 (q-$\mathrm{P_{III}}$)

$$\overline{g}g = qc^2\frac{1+tf}{(t+f)f},\quad \overline{f}f = qc^2\frac{1+a_2t\overline{g}}{(a_2t+\overline{g})\overline{g}},\tag{7}$$

$$\overline{t}=qt,\quad \underline{t}=q^{-1}t,\quad f=f(t),\quad \overline{f}=f(\overline{t}),\quad \underline{f}=f(\underline{t})\tag{8}$$

を取り上げて，対称化の手続きと対称化された方程式の超幾何解を構成を具体的に示す．(7) のパラメータ a_2 と従属変数 f, g を

$$a_2=q^{\frac{1}{2}},\quad f(t)=X(t),\quad g(t)=X(q^{-\frac{1}{2}}t)\tag{9}$$

と矛盾なく特殊化することができ，それによって単独の 2 階常差分方程式

$$\widetilde{X}\underset{\sim}{X} = p^2c^2\frac{1+tX}{(t+X)X},\tag{10}$$

$$p=q^{\frac{1}{2}},\quad \tilde{t}=pt,\quad \underset{\sim}{t}=p^{-1}t,\quad X=X(t),\quad \widetilde{X}=X(\tilde{t}),\quad \underset{\sim}{X}=X(\underset{\sim}{t})\tag{11}$$

が得られる (対称化)．(10) は連続極限で Painlevé Ⅱ 方程式に帰着することが知られている [18] ので，ここでは q-Painlevé Ⅱ 方程式 (q-$\mathrm{P_{II}}$) と呼ぶ．

次に (10) のもっとも簡単な超幾何解を構成する．その前に，q-超幾何函数の定義を与えておく．

定義　q-超幾何函数 ${}_s\varphi_r$ は

$${}_s\varphi_r\left(\begin{matrix}a_1,\cdots,a_s\\ b_1,\cdots,b_r\end{matrix};q,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\cdots,a_s;q)_n}{(b_1,\cdots,b_r;q)_n(q;q)_n}\left[(-1)^nq^{\binom{n}{2}}\right]^{1+r-s}z^n,\tag{12}$$

$$(a;q)_n=(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}),\quad (a_1,\cdots,a_r;q)_n=(a_1;q)_n\cdots(a_r;q)_n\tag{13}$$

で定義される [1]．特に $s=r+1$ で条件

$$qa_1=a_2b_1=\cdots=a_{r+1}b_r,\quad a_2=a_1^{\frac{1}{2}},\quad a_3=-qa_1^{\frac{1}{2}}\tag{14}$$

を満たすときには very-well-poised と呼び，${}_{r+1}W_r$ と書く：

$${}_{r+1}W_r(a_1;a_4,\cdots,a_{r+1};q,z)={}_{r+1}\varphi_r\left(\begin{matrix}a_1,a_1^{\frac{1}{2}}q,-a_1^{\frac{1}{2}}q,a_4,\cdots,a_{r+1}\\ a_1^{\frac{1}{2}},-a_1^{\frac{1}{2}},a_1a_4^{-1}q,\cdots,a_1a_{r+1}^{-1}q\end{matrix};q,z\right).\tag{15}$$

さて，(10) は $c=1$ のとき Riccati 方程式

$$\widetilde{X} = -p\frac{1+tX}{X} \tag{16}$$

への分解を許容し，

$$X = -t\frac{G}{\underset{\sim}{G}} \tag{17}$$

とおくことによって 2 階線形差分方程式

$$\widetilde{G} - G + t^{-2}\underset{\sim}{G} = 0 \tag{18}$$

が得られる．この方程式の解として次の函数が得られる．ただし，A, B は任意定数である．

$$G = (-p^{\frac{1}{2}}t, -p^{\frac{1}{2}}t^{-1}; p)_\infty \left\{ Ae^{\frac{\pi i}{2}\frac{\log t}{\log p}}\ {}_1\varphi_1\left(\begin{matrix}0\\-p\end{matrix}; p, -ip^{\frac{3}{2}}t\right) + Be^{-\frac{\pi i}{2}\frac{\log t}{\log p}}\ {}_1\varphi_1\left(\begin{matrix}0\\-p\end{matrix}; p, ip^{\frac{3}{2}}t\right)\right\}. \tag{19}$$

2.2 超幾何解のリスト

Sakai 理論では q-Painlevé 方程式の系列

$$E_8^{(1)} \longrightarrow E_7^{(1)} \longrightarrow E_6^{(1)} \longrightarrow D_5^{(1)} \longrightarrow A_4^{(1)} \longrightarrow (A_2+A_1)^{(1)} \longrightarrow (A_1+A_1')^{(1)} \tag{20}$$

が知られており，もっとも簡単な超幾何解のリストが [7, 8] で得られている．ここで，q-Painlevé 方程式のラベルはアフィン・ワイル群対称性の型であり，矢印は極限操作によって左から右のものが得られることを意味する．本節では前節で説明した $(A_2+A_1)^{(1)}$ 型と，方程式がもともと単独 2 階方程式である $(A_1+A_1')^{(1)}$ 型を除いた 5 通りの q-Painlevé 方程式について，対称化された方程式とその超幾何解のリストを提示する．なお，以下のリストで A, B は任意定数であり，$q=p^2$ である．

■ $A_4^{(1)}$ **型**　(q-P_{V}) [27]

$$(\overline{g}f-1)(gf-1) = t^2\frac{(f+a_1)(f+a_1^{-1})}{f+a_2t}, \quad (gf-1)(g\underline{f}-1) = q^{-1}t^2\frac{(g+a_1)(g+a_1^{-1})}{g+a_3t}. \tag{21}$$

対称化の条件

$$a_3 = q^{-\frac{1}{2}}a_2. \tag{22}$$

対称化された方程式 (連続極限で Painlevé IV 方程式に帰着 [27])

$$(\widetilde{X}X-1)(X\underset{\sim}{X}-1) = t^2\frac{(X+a_1)(X+a_1^{-1})}{X+a_2t}. \tag{23}$$

超幾何解　(パラメータが $a_1 = p^{-1}a_2^2$ のとき)

$$X = (1-a_2^{-1}t)\frac{G}{\overline{G}}, \tag{24}$$

$$G = A\ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}a_2^2, 0\\-p\end{matrix}; p, a_2^{-1}\tilde{t}\right) + B\,(-1)^{\frac{\log t}{\log p}}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}-a_2^2, 0\\-p\end{matrix}; p, a_2^{-1}\tilde{t}\right). \tag{25}$$

■ $D_5^{(1)}$ **型**　(q-P_{VI})[4, 7, 8, 25]

$$\overline{g}g = \frac{(f-a_1q^{\frac{1}{2}}t)(f-a_1^{-1}q^{\frac{1}{2}}t)}{(f-a_2)(f-a_2^{-1})}, \quad f\underline{f} = \frac{(g-a_3t)(g-a_3^{-1}t)}{(g-a_4)(g-a_4^{-1})}. \tag{26}$$

対称化の条件

$$a_3 = a_1, \quad a_4 = a_2. \tag{27}$$

対称化された方程式 (連続極限で Painlevé Ⅲ 方程式に帰着 [23, 10])

$$\widetilde{X}\underset{\sim}{X} = \frac{(X - a_1\tilde{t})(X - a_1^{-1}\tilde{t})}{(X - a_2)(X - a_2^{-1})}. \tag{28}$$

超幾何解 $(a_2 = p^{-\frac{1}{2}}a_1)$

$$X = p^{-\frac{1}{2}}a_1 \frac{G(a_1, t)}{G(p^{-\frac{1}{2}}a_1, t)}, \tag{29}$$

$$G(a_1, t) = A(-p/a_1^2; p)_\infty\, {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}0, 0\\ -\frac{p}{a_1^2}\end{matrix}; p, p^{\frac{1}{2}}\tilde{t}\right) + Ba_1^3(-a_1^2p; p)_\infty(-a_1^2)^{\frac{\log t}{\log p}}\, {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}0, 0\\ -a_1^2p\end{matrix}; p, p^{\frac{1}{2}}\tilde{t}\right). \tag{30}$$

■ $E_6^{(1)}$ **型** [7, 8, 17, 24]

$$\begin{cases} (\overline{g}f - 1)(gf - 1) = t^2 \dfrac{(f - b_1)(f - b_2)(f - b_3)(f - b_4)}{(f - b_5t)(f - b_5^{-1}t)}, \\ (gf - 1)(g\underline{f} - 1) = q^{-1}t^2 \dfrac{(g - b_1^{-1})(g - b_2^{-1})(g - b_3^{-1})(g - b_4^{-1})}{(g - b_6s)(g - b_6^{-1}s)}, \end{cases} \tag{31}$$

$$b_1b_2b_3b_4 = 1. \tag{32}$$

対称化の条件

$$b_1b_2 = 1, \quad b_3b_4 = 1, \quad b_5b_6 = 1. \tag{33}$$

対称化された方程式 (連続極限で Painlevé V 方程式に帰着 [23])

$$(\widetilde{X}X - 1)(X\underset{\sim}{X} - 1) = t^2 \frac{(X - b_1)(X - b_1^{-1})(X - b_3)(X - b_3^{-1})}{(X - b_5t)(X - b_5^{-1}t)}. \tag{34}$$

超幾何解 $(b_5^2 = pb_1b_3)$

$$X = (b_1^{-1}t - b_5^{-1})\frac{\widetilde{G}}{G} + b_5t, \tag{35}$$

$$G = A\, b_5^{\frac{\log t}{\log p}}\, {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}\frac{b_5^2}{b_1}, -\frac{1}{b_1}\\ -p\end{matrix}; p, \frac{b_1}{b_5}\tilde{t}\right) + B\,(-b_5)^{\frac{\log t}{\log p}}\, {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}-\frac{b_5^2}{b_1}, \frac{1}{b_1}\\ -p\end{matrix}; p, \frac{b_1}{b_5}\tilde{t}\right). \tag{36}$$

■ $E_7^{(1)}$ **型** [7, 8, 17, 24]

$$\begin{cases} \dfrac{(\overline{g}f - \overline{t}t)(gf - t^2)}{(\overline{g}f - 1)(gf - 1)} = \dfrac{(f - b_1t)(f - b_2t)(f - b_3t)(f - b_4t)}{(f - b_5)(f - b_6)(f - b_7)(f - b_8)}, \\ \dfrac{(gf - t^2)(g\underline{f} - t\underline{t})}{(gf - 1)(g\underline{f} - 1)} = \dfrac{(g - b_1^{-1}t)(g - b_2^{-1}t)(g - b_3^{-1}t)(g - b_4^{-1}t)}{(g - b_5^{-1})(g - b_6^{-1})(g - b_7^{-1})(g - b_8^{-1})}, \end{cases} \tag{37}$$

$$b_1b_2b_3b_4 = q, \quad b_5b_6b_7b_8 = 1. \tag{38}$$

対称化の条件

$$b_1b_2 = q^{\frac{1}{2}}, \quad b_3b_4 = q^{\frac{1}{2}}, \quad b_5b_6 = 1, \quad b_7b_8 = 1. \tag{39}$$

対称化された方程式 (連続極限で Painlevé VI 方程式に帰着 [2])

$$\frac{(\widetilde{X}X-\tilde{t}^2)(X\underset{\sim}{X}-t^2)}{(\widetilde{X}X-1)(X\underset{\sim}{X}-1)}=\frac{(X-b_1t)(X-b_1^{-1}\tilde{t})(X-b_3t)(X-b_3^{-1}\tilde{t})}{(X-b_5)(X-b_5^{-1})(X-b_7)(X-b_7^{-1})}. \tag{40}$$

超幾何解　$(b_1b_3b_5b_7=1)$

$$\frac{b_1X-\tilde{t}}{X-b_5}=\frac{(b_3b_5\tilde{t}-1)}{(b_5^2-1)(\tilde{t}-b_3b_5)}\left[(b_1b_5\tilde{t}-1)\frac{\widetilde{G}}{G}+b_1\tilde{t}-b_5\right],\quad G=AG_1+BG_2, \tag{41}$$

$$G_1=\frac{(b_1b_5\tilde{t},-b_3\tilde{\tilde{t}};p)_\infty(b_1b_5b_3)^{\frac{\log t}{\log p}}}{(\frac{\tilde{\tilde{t}}}{b_1b_5},-\frac{1}{b_3}\tilde{t};p)_\infty}\,{}_8W_7\left(-b_3^2b_5;p^{\frac12}b_3,-p^{\frac12}b_3,-b_1b_3b_5,b_3b_5\tilde{t},\frac{b_3b_5}{\tilde{t}};p,\frac{p}{b_1b_3b_5}\right), \tag{42}$$

$$G_2=\frac{(\tilde{\tilde{t}}t,-\frac{p^{\frac12}}{b_1b_3b_5}\tilde{\tilde{t}},\frac{p^{\frac12}}{b_1b_3b_5}\tilde{\tilde{t}},\frac{1}{b_3}\tilde{\tilde{t}},\frac{1}{b_1}\tilde{\tilde{t}};p)_\infty(-b_5)^{\frac{\log t}{\log p}}}{(\frac{1}{b_1b_5}\tilde{\tilde{t}},p^{\frac12}\tilde{t},-p^{\frac12}\tilde{t},\frac{1}{b_3b_5}\tilde{\tilde{t}},\frac{1}{b_1b_3b_5}\tilde{\tilde{t}}^2;p)_\infty}\,{}_8W_7\left(\frac{1}{b_1b_3b_5}\tilde{\tilde{t}}t;\frac{1}{b_1b_5}\tilde{\tilde{t}},p^{\frac12}\tilde{t},-p^{\frac12}\tilde{t},\frac{1}{b_3b_5}\tilde{\tilde{t}},\frac{p}{b_1b_3b_5};p,-b_5\right). \tag{43}$$

■ $E_8^{(1)}$ 型 [7, 8, 17, 21, 24]

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{(\overline{g}st-f)(gst-f)-(\overline{s}^2t^2-1)(s^2t^2-1)}{(\overline{s}^{-1}t^{-1}\overline{g}-f)(s^{-1}t^{-1}g-f)-(1-\overline{s}^{-2}t^{-2})(1-s^{-2}t^{-2})}\\
&\quad=\frac{f^4-m_1tf^3+(m_2t^2-3-t^8)f^2+(m_7t^7-m_3t^3+2m_1t)f+t^8-m_6t^6+m_4t^4-m_2t^2+1}{f^4-m_7t^{-1}f^3+(m_6t^{-2}-3-t^{-8})f^2+(m_1t^{-7}-m_5t^{-3}+2m_7t^{-1})f+t^{-8}-m_2t^{-6}+m_4t^{-4}-m_6t^{-2}+1},\\
&\frac{(fst-g)(\underline{f}s\underline{t}-g)-(s^2t^2-1)(s^2\underline{t}^2-1)}{(s^{-1}t^{-1}f-g)(s^{-1}\underline{t}^{-1}\underline{f}-g)-(1-s^{-2}t^{-2})(1-s^{-2}\underline{t}^{-2})}\\
&\quad=\frac{g^4-m_7sg^3+(m_6s^2-3-s^8)g^2+(m_1s^7-m_5s^3+2m_7s)g+s^8-m_2s^6+m_4s^4-m_6s^2+1}{g^4-m_1s^{-1}g^3+(m_2s^{-2}-3-s^{-8})g^2+(m_7s^{-7}-m_3s^{-3}+2m_1s^{-1})g+s^{-8}-m_6s^{-6}+m_4s^{-4}-m_2s^{-2}+1}.
\end{aligned}\right. \tag{44}$$

$$m_j:\ b_1,\cdots b_8\text{の } j \text{ 次の基本対称式},\quad b_1b_2\cdots b_8=1,\quad s=q^{-\frac12}t. \tag{45}$$

対称化の条件

$$m_i=m_{8-i}\quad(i=1,2,3)\quad\text{または}\quad b_{2j}b_{2j-1}=1\quad(j=1,2,3,4)\,. \tag{46}$$

対称化された方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{(\tilde{t}t\widetilde{X}-X)(t\underset{\sim}{t}\underset{\sim}{X}-X)-(\tilde{t}^2t^2-1)(t^2\underset{\sim}{t}^2-1)}{(\tilde{t}^{-1}t^{-1}\widetilde{X}-X)(t^{-1}\underset{\sim}{t}^{-1}\underset{\sim}{X}-X)-(\tilde{t}^{-2}t^{-2}-1)(t^{-2}\underset{\sim}{t}^{-2}-1)}\\
&\quad=\frac{X^4-m_1tX^3+(m_2t^2-3-t^8)X^2+(m_1t^7-m_3t^3+2m_1t)X+t^8-m_2t^6+m_4t^4-m_2t^2+1}{X^4-m_1t^{-1}X^3+(m_2t^{-2}-3-t^{-8})X^2+(m_1t^{-7}-m_3t^{-3}+2m_1t^{-1})X+t^{-8}-m_2t^{-6}+m_4t^{-4}-m_2t^{-2}+1}\ .
\end{aligned} \tag{47}$$

超幾何解　$(p^2b_1b_3b_5b_7=1)$

$$\frac{X-\beta_3}{X-\beta_1}=\frac{(\alpha_3-\alpha_5)(\beta_1-\beta_5)}{(\alpha_1-\alpha_5)(\beta_3-\beta_5)}\left[(\alpha_1-\alpha_3)\frac{\widetilde{G}}{G}+\alpha_3-\tilde{\beta}_1\right],\quad G=AG_1+BG_2, \tag{48}$$

$$G_1=\frac{(b_1b_3\tilde{t}^2,b_1b_5\tilde{t}^2,-\tilde{t}^2,\frac{\tilde{t}^2}{b_1b_3b_5};p^2)_\infty(-b_1)^{\frac{\log t}{\log p}}}{(-\tilde{t}^2,\frac{\tilde{t}^2}{b_1b_5},\frac{\tilde{t}^2}{b_1b_3},b_1b_3b_5\tilde{t}^2;p^2)_\infty}\,{}_8W_7\left(\frac{1}{p^2b_1b_3^2b_5^2};\frac{1}{b_5},\frac{1}{b_3},-\frac{1}{b_1b_3b_5},\frac{t^2}{b_3b_5},\frac{1}{b_3b_5\tilde{t}^2};p^2,-\frac{p^2}{b_1}\right), \tag{49}$$

$$G_2=\frac{(\tilde{t}^4,-b_3\tilde{\tilde{t}}^2,-b_5\tilde{\tilde{t}}^2,\frac{\tilde{\tilde{t}}^2}{b_1},-\frac{\tilde{t}^2}{b_1b_3b_5};p^2)_\infty b_1^{\frac{\log t}{\log p}}}{(-\tilde{t}^2,\frac{\tilde{t}^2}{b_1b_5},\frac{\tilde{t}^2}{b_1b_3},b_3b_5\tilde{\tilde{t}}^2,-\frac{\tilde{\tilde{t}}^2\tilde{t}^2}{b_1};p^2)_\infty}\,{}_8W_7\left(-\frac{\tilde{t}^4}{b_1};-\tilde{t}^2,\frac{\tilde{t}^2}{b_1b_5},\frac{\tilde{t}^2}{b_1b_3},b_3b_5\tilde{\tilde{t}}^2,-\frac{p^2}{b_1};p^2,b_1\right). \tag{50}$$

ただし，$\alpha_i=b_i\tilde{t}+\dfrac{1}{b_i\tilde{t}}$ ，$\beta_i=\dfrac{t}{b_i}+\dfrac{b_i}{t}$　$(i=1,\cdots,5)$ である．

3　アフィン・ワイル群の表現を用いた対称化の定式化: $\widetilde{W}(A_2+A_1)^{(1)}$

3.1　q-$\mathrm{P_{III}}$ と q-$\mathrm{P_{II}}$ の超幾何解

前章では q-Painlevé 方程式のもっとも簡単な超幾何解を構成したが，それらの解に Bäcklund 変換を施すことで，行列式で表示される解に拡張される．q-$\mathrm{P_{III}}$ (7) の超幾何解は次のように与えられる [6]：

$$f=-t\,\frac{\psi_{N+1}(t;qa_2)\psi_N(t;a_2)}{\psi_{N+1}(t;a_2)\psi_N(t;qa_2)},\quad g=ta_2^2\,\frac{\psi_{N+1}(t;a_2)\psi_N(t/q;qa_2)}{\psi_{N+1}(t/q;qa_2)\psi_N(t;a_2)},\quad c=q^{2N},\quad N=0,1,2,\ldots,\tag{51}$$

$$\psi_N(t;a_2)=\det\Big(F(q^{-i+j}t;a_2)\Big)_{i,j=1,\ldots,N},\quad \overline{F}+\left(t^2-\frac{q^2}{a_2^2}-1\right)F+\frac{q^2}{a_2^2}\underline{F}=0,\tag{52}$$

$$F=\frac{A}{(q^2a_2^{-2};q^2)_\infty}\,{}_1\varphi_1\left(\begin{matrix}0\\a_2^2\end{matrix};q^2,a_2^2t^2\right)+B\,(q^4a_2^{-2};q^2)_\infty(q^2a_2^{-2})^{\frac{\log t}{\log q}}\,{}_1\varphi_1\left(\begin{matrix}0\\q^4a_2^{-2}\end{matrix};q^2,q^2t^2\right).\tag{53}$$

同様に，q-$\mathrm{P_{II}}$ (10) の超幾何解は次のように与えられる [18]：

$$X=-tp^{2N}\frac{\phi_{N+1}(t)\phi_N(t/p)}{\phi_{N+1}(t/p)\phi_N(t)},\quad c=p^{4N},\quad N=0,1,2,\ldots,\tag{54}$$

$$\phi_N(t)=\det\Big(G(p^{-i+2j}t)\Big)_{i,j=1,\ldots,N},\quad \widetilde{G}-G+t^{-2}\underset{\sim}{G}=0,\tag{55}$$

$$G=(-p^{\frac12}t,-p^{\frac12}t^{-1};p)_\infty\left\{Ae^{\frac{\pi i}{2}\frac{\log t}{\log p}}\,{}_1\varphi_1\left(\begin{matrix}0\\-p\end{matrix};p,-ip^{\frac32}t\right)+Be^{-\frac{\pi i}{2}\frac{\log t}{\log p}}\,{}_1\varphi_1\left(\begin{matrix}0\\-p\end{matrix};p,ip^{\frac32}t\right)\right\}.\tag{56}$$

3.2　アフィン・ワイル群 $\widetilde{W}(A_2+A_1)^{(1)}$ の表現と対称化

q-$\mathrm{P_{III}}$ は $\widetilde{W}(A_2+A_1)^{(1)}$ の双有理表現の平行移動の作用から得られる [6, 9]．従属変数 f_i とパラメータ a_i $(i=0,1,2)$ に対する変換 s_0, s_1, s_2, π, w_0, w_1, r を次式で定義する：

$$s_i(a_j)=a_ja_i^{-a_{ij}},\ s_i(f_j)=f_j\left(\frac{a_i+f_i}{1+a_if_i}\right)^{u_{ij}},\ \pi(a_i)=a_{i+1},\ \pi(f_i)=f_{i+1},\tag{57}$$

$$w_0(a_i)=a_i,\ w_0(f_i)=\frac{a_ia_{i+1}(a_{i+2}a_i+a_{i+2}f_i+f_{i+2}f_i)}{f_{i+2}(a_ia_{i+1}+a_if_{i+1}+f_if_{i+1})},\tag{58}$$

$$w_1(a_i)=a_i,\ w_1(f_i)=\frac{1+a_if_i+a_ia_{i+1}f_if_{i+1}}{a_ia_{i+1}f_{i+1}(1+a_{i+2}f_{i+2}+a_{i+2}a_if_{i+2}f_i)},\tag{59}$$

$$r(a_i)=a_i,\ r(f_i)=\frac{1}{f_i},\quad i,j\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\tag{60}$$

$$(a_{ij})_{0\le i,j\le 2}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},\quad (u_{ij})_{0\le i,j\le 2}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.\tag{61}$$

これらの変換は基本関係式

$$s_i^2=1,\quad (s_is_{i+1})^3=1,\quad \pi^3=1,\quad \pi s_i=s_{i+1}\pi\quad (i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}),\quad w_0^2=w_1^2=r^2=1,\quad rw_0=w_1r\tag{62}$$

を満たし，$\langle s_0,s_1,s_2,\pi\rangle$ は $A_2^{(1)}$ 型の（拡大）アフィン・ワイル群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ を，また $\langle w_0,w_1,r\rangle$ は $A_1^{(1)}$ 型の（拡大）アフィン・ワイル群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ をそれぞれなす．$\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ の元と $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の元は可換であり，全体として $\widetilde{W}(A_2+A_1)^{(1)}$ となっている．また，$a_0a_1a_2=q$ は $\widetilde{W}(A_2+A_1)^{(1)}$ の作用に関して，$f_0f_1f_2=qc^2$ は $\widetilde{W}(A_2)^{(1)}$ の作用に関してそれぞれ不変であることを注意しておく．平行移動 T_1 を $T_1=\pi s_2s_1$ で定義すると T_1 の作用は，

$$T_1(f_1)f_1=qc^2\frac{1+a_0f_0}{f_0(a_0+f_0)},\quad T_1(f_0)f_0=qc^2\frac{1+a_2a_0T_1(f_1)}{T_1(f_1)(a_2a_0+T_1(f_1))},\tag{63}$$

$$T_1(a_0)=qa_0,\quad T_1(a_1)=q^{-1}a_1,\quad T_1(a_2)=a_2,\quad T_1(c)=c\tag{64}$$

となり，これは f_0 を f，f_1 を g，a_0 を t，T_1 を $\bar{\ }$ と対応させると q-P$_{\rm III}$ (7) と等価で，他の $\widetilde{W}(A_2+A_1)^{(1)}$ の作用は Bäcklund 変換とみなすことができる．特に $\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle w_0, w_1, r\rangle$ の平行移動 $T_4 = rw_0$ からは連続極限で q-Painlevé IV 方程式 [9] が得られることを注意しておきたい．

この枠組みにおいて対称化を考える鍵は

$$R_1 = \pi^2 s_1 \tag{65}$$

を導入することである．これは $R_1^2 = T_1$ を満たし，図 1 のように $a_2 = q^{\frac{1}{2}}$ を軸としてジグザクに動かす変換である．さらに条件 $a_2 = q^{\frac{1}{2}}$ を課すと，R_1 は図 2 のように $q^{\frac{1}{2}}$ ステップの平行移動となる．実際，f_i, a_i への作用を書き下すと

$$R_1(f_1) = f_0\,, \quad R_1(f_0)f_0 = qc^2\frac{1+a_0f_0}{f_1(a_0+f_0)}\,, \tag{66}$$

$$R_1(a_0) = q^{\frac{1}{2}}a_0, \quad R_1(a_1) = q^{-\frac{1}{2}}a_1, \quad R_1(c) = c, \quad a_0a_1 = q^{\frac{1}{2}} \tag{67}$$

であり，q-P$_{\rm II}$ (10) と等価である．また R_1 が平行移動となる条件と (7) を対称化するための条件 (9) も一致する．つまり q ステップの平行移動 T_1 に対して $q^{\frac{1}{2}}$ ステップの平行移動 R_1 を考えることが対称化に対応する．ただし図 1 図 2 は点ではなく座標の移動を表していることに注意 [28].

図 1

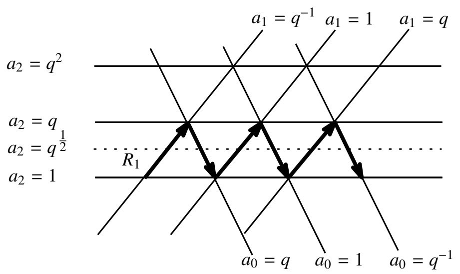
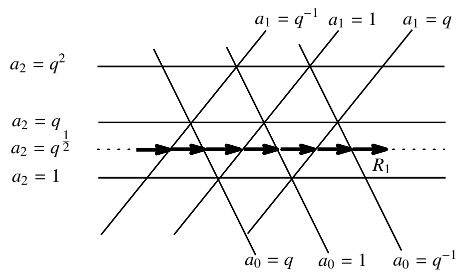


図 2



以上のことを用いて，対称化前後で得られる超幾何解が異なるという現象を考察する．$a_2 = q^{\frac{1}{2}}$ のとき (52) と (55) より q-P$_{\rm III}$ (7) と q-P$_{\rm II}$ (10) の超幾何解を記述する超幾何函数はそれぞれ

$$H(q^2a_0) + (q^{-3}a_0^{-2} + q^{-2}a_0^{-2} - 1)H(qa_0) + q^{-3}a_0^{-4}H(a_0) = 0,$$

$$G(qa_0) - G(q^{\frac{1}{2}}a_0) + q^{-1}a_0^{-2}G(a_0) = 0$$

を満たす．ただし，後の便宜上，q-P$_{\rm III}$ で現れる超幾何函数 F (53) に対して $F(t) = (t^2, q^2t^{-2}; q)_\infty^{-1}\,H(q^{-\frac{1}{2}}t)$ とおいた．これらは平行移動 T_1, R_1 を用いるとそれぞれ

$$\{T_1^2 + (q^{-3}a_0^{-2} + q^{-2}a_0^{-2} - 1)T_1 + q^{-3}a_0^{-4}\}H(a_0) = 0, \quad T_1(a_0) = qa_0, \tag{68}$$

$$(R_1^2 - R_1 + q^{-1}a_0^{-2})G(a_0) = 0, \quad R_1(a_0) = q^{\frac{1}{2}}a_0 \tag{69}$$

と書くことができる．ここで (68) の作用素は T_1 に関して 2 階の線形差分作用素だが，$T_1 = R_1^2$ より R_1 に関して 4 階の差分作用素である．この作用素は

$$T_1^2 + (q^{-3}a_0^{-2} + q^{-2}a_0^{-2} - 1)T_1 + q^{-3}a_0^{-4} = (R_1^2 + R_1 + q^{-2}a_0^{-2})(R_1^2 - R_1 + q^{-1}a_0^{-2}) \tag{70}$$

のように因数分解することができ，右辺の第二因子は (69) の作用素に他ならない．すなわち，G は H と異なる函数であるが同じ線形方程式の解となっている．半ステップの平行移動を導入することによって 2 階線形作用素が 4 階線形差分作用素と読み替えられ，その作用素の 2 階線形差分作用素への因数分解というメカニズムが異なる函数を与えていることになる．

なお，行列式の構造が異なるという現象も τ 函数のレベルでのアフィン・ワイル群の表現を用いて双線形方程式を考察することで説明することができ，そこでも半ステップの平行移動の導入に起因する双線形方程式の差異が鍵となるが，詳細は現在準備中の論文に譲りたい．

4 おわりに

本稿では q-Painlevé 方程式の対称化を考察し，Sakai 理論で得られている q-Painlevé 方程式の系列について，対称化した方程式のもっとも簡単な超幾何解を構成した．また，$(A_2+A_1)^{(1)}$ 型の方程式を例にして，アフィン・ワイル群対称性の表現を用いて対称化を定式化し，超幾何解が対称化前後で異なる理由を説明した．離散 Painlevé 方程式の時間発展はワイル群の平行移動部分群の作用によって得られるが，対称性の型は同じでも異なる方向への平行移動を考えると本稿で扱った方程式とは別の形の方程式が得られ，異なる対称化が考えられる．今後，加法的な場合も含む全ての離散 Painlevé 方程式について，さまざまな対称化を考察していきたい．

参考文献

[1] G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **35** (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

[2] B. Grammaticos and A. Ramani, arXiv:solv-int/991006v1.

[3] T. Hamamoto, K. Kajiwara and N.S. Witte, Int. Math. Res. Not. **2006**(2006) Article ID 84619.

[4] M. Jimbo and H. Sakai, Lett. Math. Phys. **38**(1996) 145-154.

[5] K. Kajiwara, in *Symmetries and integrability of difference equations*, eds. by P. Clarkson and F.W. Nijhoff, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 255(Cambridge University Press, Cambridge, 1999) 217-227.

[6] K. Kajiwara and K. Kimura, J. Nonlin. Math. Phys. **10** (2003) 86-102.

[7] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi,Y. Ohta, Y. Yamada, Int. Math. Res. Not. **47** (2004) 2497-2521.

[8] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi,Y. Ohta, Y. Yamada, Int. Math. Res. Not. **2005**(2005) 1439-1663.

[9] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, J. Phys. A.: Math. Gen. **34**(2001) 8563-8581.

[10] K. Kajiwara, Y. Ohta and J. Satsuma, J. Math. Phys. **36**(1995) 4162-4174.

[11] K. Kajiwara, Y. Ohta, J. Satsuma, B. Grammaticos and A. Ramani, J. Phys. A: Math. Gen. **27**(1994) 915-922.

[12] K. Kajiwara, K. Yamamoto and Y. Ohta, Phys. Lett. **A232**(1997) 173-182.

[13] M. D. Kruskal, K. M. Tamizhmani, B. Grammaticos, and A. Ramani, Regul. Chaotic Dyn.**5**(2000) 273-280.

[14] T. Masuda, Tohoku Math. J. **56**(2004) 467-490.

[15] 増田哲，太田泰広，梶原健司，数理解析研究所講究録 **1203**「パンルヴェ方程式の解析」(2001) 97-108.

[16] T. Masuda, Y. Ohta and K. Kajiwara, Nagoya J. Math. **168**(2002) 1-25

[17] M. Murata, H. Sakai and J. Yoneda, J. Math. Phys. **44** (2003) 1396-1414.

[18] 中尾真一郎, 梶原健司, 高橋大輔，九州大学応用力学研究所研究集会報告 9ME-S2「ソリトン理論の新展開」(1998) 125-130.

[19] K. Okamoto, Japan. J. Math.**13**(1987) 47-76.

[20] 太田泰広，数理解析研究所講究録 **1098**「離散可積分系の応用数理」(1999) 130-137.

[21] Y. Ohta, A. Ramani and B. Grammaticos, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 10523-10532.

[22] V. Periwal and D. Shevitz, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1326-1329.

[23] A. Ramani, B. Grammaticos and J.Hietarinta, Phys. Rev. Lett. **67**(1991) 1829-1832.

[24] A. Ramani, B. Grammaticos, T, Tamizhmani and K. M. Tamizhmani, Comput. Math. Appl.**42** (2001) 603-614.

[25] H. Sakai, Nonlinearity **11** (1998) 823-833.

[26] H. Sakai, Comm. Math. Phys. **220**(2001) 165-229.

[27] K. M. Tamizhmani, B. Grammaticos, A. S. Carstea and A. Ramani, Regul. Chaotic Dyn. **9**(2004) 13-20.

[28] 野海正俊, パンルヴェ方程式-対称性からの入門-, すうがくの風景 **4**, (朝倉書店, 2000).