

非分散連立方程式ソリトンの有効相互作用

角島, 浩
富山大学工学部

紺野, 公明
日本大学理工学部

<https://doi.org/10.15017/14274>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 20ME-S7 (2), 2009-02. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7
「非線形波動の数理と物理」(研究代表者 矢嶋 徹)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.20ME-S7
Mathematics and Physics in Nonlinear Waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2008

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 2 (pp. 9-14)

非分散連立方程式ソリトンの 有効相互作用

角島 浩 (KAKUHATA Hiroshi),
紺野 公明 (KONNO Kimiaki)

(Received January 30, 2009)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
February, 2009

非分散連立方程式ソリトンの有効相互作用

富山大学工学部学部 角 畠 浩 (Hiroshi KAKUHATA)
日本大学理工学部 紺野公明 (Kimiaki KONNO)

概 要 この講演では、非分散連立方程式の厳密な2ソリトン解のピークを漸近的に求めて、ソリトンを広がりのないソリトン粒子と見なした。このソリトン粒子の間に働く漸近的な effective force と有効ポテンシャルを求めた。

1 はじめに

ソリトンは粒子のように振る舞う波であり衝突しても壊れないがその軌道が変化することはよく知られている [1]。我々は非分散連立方程式や KdV 方程式を例としてそれらの2ソリトン解を用いて、2つのソリトンの間に働く effective force を求め、ソリトン衝突を説明することを試みてきた [2]。そこでは個々のソリトンとその広がり程度で1個の広がりを持つ粒子と見なし、ソリトン場の各点に作用する力を考え、ソリトンに働く合力をソリトンのピークの周りにソリトンの大きさにわたる積分で求めることによりこの問題を考察してきた。この講演では連立非分散方程式を用いてソリトンのピークの位置を厳密な2ソリトン解から求め、ピークの位置を点粒子である「ソリトン粒子」と考えてソリトンに働く effective force を求め、有効ポテンシャルを計算した。以下では、連立非分散方程式のソリトン解とソリトン相互作用を簡単にレビューし、2ソリトン解の漸近的なピークの位置を求めて、effective force と有効ポテンシャルを計算する。最後にまとめを述べた。

2 連立非分散方程式のソリトン解とソリトン相互作用

連立非分散方程式は3次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^3 中である外部磁場と相互作用する内部電流を持つストリングを表し、以下の形で与えられる [3, 4]。

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Y - \partial_\sigma^2 Y &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)Y, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y,\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで、 (X, Y, Z) は \mathbf{R}^3 中のストリングの位置ベクトル、 τ は時間、 σ はストリングに沿うパラメータである。この方程式は、双線形変換

$$\begin{aligned}X &= \operatorname{Re} \left(\frac{Q}{F} \right), \quad Y = \operatorname{Im} \left(\frac{Q}{F} \right), \\ Z &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \log F,\end{aligned}\tag{2.2}$$

により、双線形方程式

$$\begin{aligned}(D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q^* &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}Q^*Q &= 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

に変換する。双線形方程式 (2.3) から 1 ソリトン解

$$F = 1 + b^2 e^{\eta + \eta^*}, \quad Q = e^\eta, \quad (2.4)$$

を求めることができる。ここで、位相と係数は

$$\eta = k\sigma + \omega\tau + \delta + i\theta, \quad b = \frac{1}{2(\omega^* + \omega - k^* - k)}, \quad (2.5)$$

である。ただし、 k は複素波数、 ω は複素振動数で分散関係

$$\omega^2 - k^2 = -1, \quad (2.6)$$

を満足し、 δ と θ はそれぞれ並進と回転に関する実数の初期位相である。 \mathbf{R}^3 中では、位相速度 v と角速度 Ω を導入して、位相 η を $\eta = \xi + i\zeta$, $\xi = \gamma(\sigma - v\tau) + \delta$, $\zeta = \Omega(\tau - v\sigma) + \theta$ とすれば、

$$\begin{aligned} X &= A \cos \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Y &= A \sin \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \xi, \end{aligned} \quad (2.7)$$

が \mathbf{R}^3 空間のソリトン解となる。ここで、 Z_0 は任意の定数であり、因子 γ と振幅 A は

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}, \quad A = 2\gamma(1 + v), \quad (2.8)$$

である。この解は \mathbf{R}^3 空間中を角速度 Ω で回転しながら、位相速度 v で伝播するソリトンを表す。2 ソリトン解は

$$\begin{aligned} Q &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + c_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2} + c_2^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*}, \\ F &= 1 + b_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^*} + b_{12}^2 e^{\eta_1^* + \eta_2} + b_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_2^*} + b_2^2 e^{\eta_2 + \eta_2^*} + d_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^*}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

である。係数は

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2(\omega_n^* + \omega_n - k_n^* - k_n)} \quad (n = 1, 2), \quad b_{12} = \frac{1}{2(\omega_1 + \omega_2^* - k_1 - k_2^*)}, \\ c_1 &= 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)b_1 b_{12}^*, \quad c_2 = 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)b_2 b_{12}, \\ d_{12} &= 4|\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2|^2 b_1 b_2 |b_{12}|^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

であり、位相と分散関係はそれぞれ次式で与えられる。

$$\eta_n = k_n \sigma + \omega_n \tau + \delta_n + i\theta_n, \quad \omega_n^2 - k_n^2 = -1 \quad (n = 1, 2) \quad (2.11)$$

2 ソリトン解 (2.9) により、この 2 つのソリトンの相互作用の様子を示そう。ここでは回転が無く位相速度の大きさが同じで逆向きの正面衝突のみを考える。回転しない場合の平面内での基本的な相互作用パターンは、(1). 相対位相速度が小さいときには重ならず弾くように相互作用する (図 1 左)、(2). 相対位相速度が大きいときには小さいソリトンが大きいソリトンの中を回る (図 1 中)、(3). 振幅が正と負の場合には小さいソリトンが一時的に消失し、大きなソリトンの振幅が増大する (図 1 右)。2 つのソリトンループが同一平面にないときでも相互作用の様子はおおむね同じである [3]。

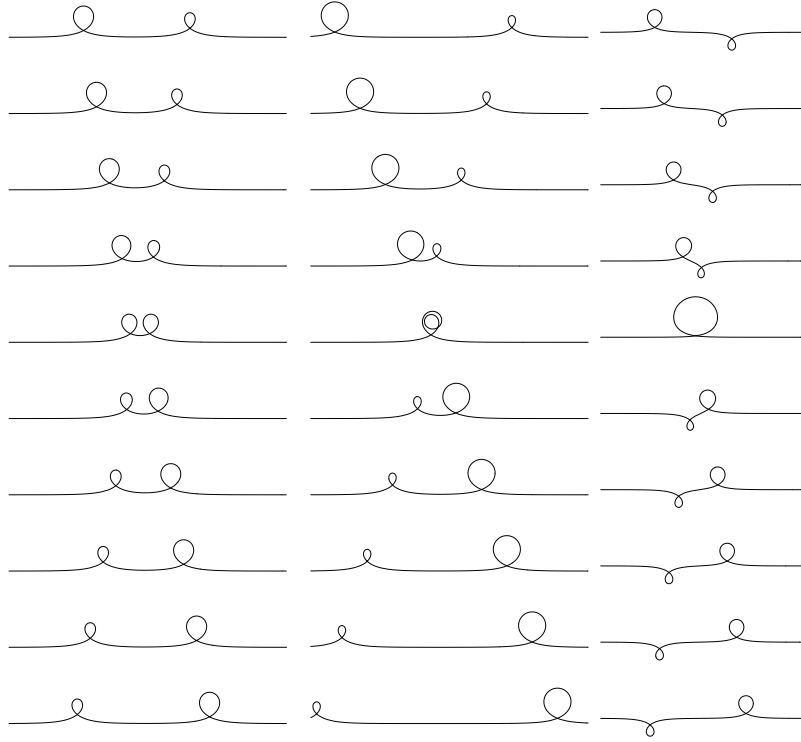


図 1: $v = 0.12$ $v = 0.24$ $v = 0.12$

3 ソリトンの軌道

図 1 を見るとソリトンの軌道が変化している。この変化の様子を見るためにはソリトンの軌道を求める必要がある。左から右に向かう大きなソリトン (soliton-1) の速度を $v_1 = v$ ($v > 0$) , 右から左に向かう小さなソリトン (soliton-2) の速度を $v_2 = -v$ とすれば ,

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 &= \sqrt{\frac{1}{1-v^2}} = \gamma, \\ A_1 &= 2\gamma(1+v), \quad A_2 = 2\gamma(1-v), \\ \eta_1 &= \gamma(\sigma - v\tau) + \delta_1, \quad \eta_2 = \gamma(\sigma + v\tau) + \delta_2, \\ \xi_1 &= \theta_1, \quad \xi_2 = \theta_2, \end{aligned}$$

となるので , 初期位相 δ_n と θ_n の適当な選択により , 式 (2.9) の従属変数 F は

$$F = \beta(\tau) + \cosh 2\gamma\sigma,$$

と非常にシンプルな形になる。ここで

$$\beta = \cosh 2\gamma v\tau + (1-v^2) \cos \theta_{12},$$

および θ_{12} は初期位相の差 $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ である。

ソリトン粒子の位置をソリトンのピークの位置とすれば , それらは方程式

$$\partial_\sigma^2 Z = 0, \quad (\partial_\sigma^3 Z > 0) \tag{3.1}$$

から求めることができる。すなわち，

$$v[-\beta \cosh 2\gamma\sigma + v^2(\cosh^2 2\gamma\sigma - 2)] \sinh 2\gamma v\tau - (\beta^2 - v^2\beta \cosh 2\gamma\sigma - 2v^4) \sinh \gamma\sigma = 0$$

を解けばよい。この超越方程式は $2\gamma\sigma$ の双曲線関数を指数関数で表せば， $e^{2\gamma\sigma}$ の4次方程式

$$v^2(v \sinh 2\gamma v\tau - \beta)e^{8\gamma\sigma} - 2(v\beta \sinh 2\gamma v\tau + \beta^2 - 2v^4)e^{6\gamma\sigma} - 6v^3 \sinh 2\gamma v\tau e^{4\gamma\sigma} - 2(v\beta \sinh 2\gamma v\tau - \beta^2 + 2v^4)e^{2\gamma\sigma} + v^2(v \sinh 2\gamma v\tau - \beta) = 0$$

になる。この方程式は厳密解を求めることができるが，残念ながら非常に複雑なので，ソリトン同士が十分に離れている場合を考察し，漸近解を求めることにする。

まず，衝突前の， $\tau \rightarrow -\infty$ の場合を考察する。それぞれのソリトンのピークは soliton-1 付近で

$$\sigma_1 \approx v\tau$$

soliton-2 付近で

$$\sigma_2 \approx -v\tau$$

と振る舞うので，主導次数項と次主導次数項を拾うと， $\tau \rightarrow -\infty$ での soliton-1 と soliton-2 の位置をそれぞれ

$$\begin{aligned} e^{2\gamma\sigma_1} &\approx \frac{v^2[1 + 2(1-v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}{1 + 2(1-v)(2+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}}, \\ e^{2\gamma\sigma_2} &\approx \frac{[1 + 2(2-v)(1+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]}{v^2[1 + 2(1+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

と求めることができる。同様に，衝突後の $\tau \rightarrow +\infty$ の場合を考察すると，やはり soliton-1 付近で

$$\sigma_1 \approx v\tau$$

soliton-2 付近で

$$\sigma_2 \approx -v\tau$$

であることに注意して，主導次数項と次主導次数項を拾うと， $\tau \rightarrow +\infty$ での2つのソリトン粒子の位置

$$\begin{aligned} e^{2\gamma\sigma_1} &\approx \frac{1 + 2(1-v)(2+v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1-v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}, \\ e^{2\gamma\sigma_2} &\approx \frac{v^2[1 + 2(1+v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 2(1+v)(2-v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

を得ることができる。

4 ソリトンの有効相互作用

ソリトン粒子の漸近的な挙動が判ったので，ソリトン粒子の運動方程式を求めるため，ソリトンの \mathbb{R}^3 空間での相対座標 $r = Z_2 - Z_1$ と質量を定義しておく。ここで， Z_n は \mathbb{R}^3 空間でのソリトン粒子の位置で

$$Z_n = \sigma_n + Z_0 + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln F|_{\sigma=\sigma_n}, \quad n = 1, 2, \quad (4.1)$$

である。相対座標は衝突前では，(3.2) から

$$r = -2v\tau + \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{1 + 4 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}} - \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 - 4\gamma, \quad (4.2)$$

衝突後では，(3.3) から

$$r = -2v\tau + \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}} + \frac{1}{2\gamma} \ln v^4 + 4\gamma, \quad (4.3)$$

である。ここで，両式の第 3 項および第 4 項は初期位相に関わる因子である。ソリトンの運動量の z 成分はそれぞれ

$$P_{z1} = 2A_1v, \quad P_{z2} = -2A_2v$$

で与えられる。ここで

$$A_1 = 2\gamma(1 + v), \quad A_2 = 2\gamma(1 - v)$$

である。質量の定義としては $\partial P/\partial v$ のような定義 [5] も可能であるが，どちらも mv の形をしているので v の係数を質量と考えれば，

$$m_1 = 2A_1 = 4\gamma(1 + v), \quad m_2 = 2A_2 = 4\gamma(1 - v)$$

を得る。

これらを用いるとソリトン粒子の運動方程式は衝突前に

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{16(1 - v^2) \cos \theta_{12}}{e^{-2\gamma v\tau} + 8(3 - v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (4.4)$$

衝突後には，

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{-16(1 - v^2) \cos \theta_{12}}{e^{2\gamma v\tau} + 8(3 - v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (4.5)$$

になる。これらの計算では，分母や分子に現れる高次の項を無視した。従って，衝突の前後で， $\cos \theta_{12} > 0$ の場合には，斥力が働き， $\cos \theta_{12} < 0$ の場合には，引力が働き， $\cos \theta_{12} = 0$ の場合には力が働かないことがわかる。すなわち，回転しない場合には位相速度に関係なく正の振幅同士では斥力が働き，特に，相対位相速度が遅い場合には斥力によりソリトン同士が停止しするが (図 1 左)，その後，斥力によって離れて行くと考えることができる。相対位相速度が大きいときには停止にまでは至らず大きいソリトンの内部に突入してしまう (図 1 中)。正と負の振幅では引力で加速され激しく衝突する (図 1 右) と解釈できる。これらからこの方法でソリトンの相互作用を少なくとも定性的あるいは半定量的に説明できるといえる。

ソリトン粒子の運動方程式から時間 τ を消去し，相対座標で記述するため， $e^{\pm 2\gamma v\tau}$ について (4.2) と (4.3) を解こうとすると 3 次方程式になり解が複雑になる。そのためここでは (4.2) と (4.3) の右辺第 2 項を無視する最低次の近似を行う。この近似において，相対座標は衝突前では $r \approx -2v\tau - \frac{2}{\gamma} \ln v - 4\gamma$ なので運動方程式は

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} \approx \frac{16(1 - v^2) \cos \theta_{12}}{\exp \gamma(r + \frac{2}{\gamma} \ln v + 4\gamma) + 8(3 - v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (4.6)$$

衝突後では, $r \approx -2v\tau + \frac{2}{\gamma} \ln v + 4\gamma$ で

$$\mu \frac{d^2 r}{d\tau^2} \approx \frac{-16(1-v^2) \cos \theta_{12}}{\exp \gamma(-r + \frac{2}{\gamma} \ln v + 4\gamma) + 8(3-v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (4.7)$$

である。これらの右辺を積分すれば, 有効ポテンシャルは衝突の前後で, それぞれ,

$$V(r) = -\frac{2(1-v^2)}{\gamma(3-v^2)} \ln \frac{\exp \gamma(r + \frac{2}{\gamma} \ln v + 4\gamma)}{\exp \gamma(r + \frac{2}{\gamma} \ln v + 4\gamma) + 8(3-v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (4.8)$$

$$V(r) = -\frac{2(1-v^2)}{\gamma(3-v^2)} \ln \frac{\exp \gamma(-r + \frac{2}{\gamma} \ln v + 4\gamma)}{\exp \gamma(-r + \frac{2}{\gamma} \ln v + 4\gamma) + 8(3-v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (4.9)$$

になる。従って, 有効ポテンシャルは十分遠いところでは指数関数的に 0 に近づくのを除けば, 漸近的には線形ポテンシャルである。

5 まとめ

非分散連立方程式の 2 ソリトン解を用いて, ソリトンの位置をソリトンのピークの位置として点粒子と見なし, ソリトン粒子に働く effective force とその有効ポテンシャルの漸近形を求めた。これらのソリトン粒子間には, $\cos \theta_{12} > 0$ の場合に, 斥力が働き, $\cos \theta_{12} < 0$ の場合には, 引力が働き, $\cos \theta_{12} = 0$ の場合には力が働かないことを示した。これは以前の結果 [2] と一致している。なお, 求めた有効ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{2(1-v^2)}{\gamma(3-v^2)} \ln \frac{\exp \gamma(\frac{2}{\gamma} \ln v + 4\gamma) \cosh \gamma r}{\exp \gamma(\frac{2}{\gamma} \ln v + 4\gamma) \cosh \gamma r + 4(3-v^2) \cos \theta_{12}}, \quad (5.1)$$

の形に統一することができる。これは全ての r で成立しそうに見えるが, $\cos \theta_{12} < 0$ ならば必ず特異性が存在する。これらの特異性に対応しそうな現象は小さな soliton-2 が一時的に消失する現象を除いて観測されない。しかもこの現象は $\theta_{12} = \pi$ 付近の狭い範囲でしか観測されないし, ソリトンの消失が特異性と関係するのかどうかは不明である。従って求めた有効ポテンシャルはあくまでも漸近的なものである。

参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.
- [2] 角畠浩, 紺野公明, 「ソリトンの有効相互作用」, 数理解析研究所講究録 1543 「波動現象の数理と応用」, p.181, 京都大学数理解析研究所, 2007 年
- [3] H. Kakuata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [4] H.Kakuata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.
- [5] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1993.