九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

# 非ホロノミックな拘束を活用した劣駆動宇宙機の姿勢と位置の制御に関する研究

松野, 崇

https://doi.org/10.15017/1398374

出版情報：九州大学, 2013, 博士（工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：全文ファイル公表済

# 非ホロノミックな拘束を活用した劣駆動宇宙機の姿勢と位置の制御に関する研究

松野　崇

# 目次


1 章　背景と目的 ..... 3
1．1　背景 ..... 3
1．2　本研究の目的 ..... 5
1．3　本論文の構成 ..... 8
2 章　2 基のスラスターによる 2 次元劣駆動宇宙機の制御（推力可変） ..... 9
2．1　はじめに ..... 9
2．2　宇宙機のモデル ..... 11
2．3　制御系の設計 ..... 13
2.3.1　制御ストラテジー ..... 13
2.3.2　姿勢角に対する追従制御系（不変マニフォールドへの到達制御） ..... 15
2.3.3　$Y$ 方向座標に対する追従制御系（不変マニフォールドへの到達制御） ..... 16
2.3.4　目標状態への制御（不変マニフォールド到達後の制御） ..... 18
2．4　参照軌道の設計 ..... 19
2．5　数値シミュレーション ..... 22
2.5.1　初期条件と制御系パラメータの設定 ..... 22
2.5.2　シミュレーション結果 ..... 24
2．6　2 章のまとめと課題 ..... 27
3 章　2 基のスラスターによる 2 次元劣駆動宇宙機の制御（ON/OFF 入力） ..... 28
3．1　はじめに ..... 28
3．2　宇宙機のモデル（スラスター推力固定） ..... 29
3．3　トルクが釣り合う場合の制御系 ..... 31
3.3.1　制御ストラテジー ..... 31
3.3.2　制御系の設計 ..... 32
3.3.3　数値シミュレーション ..... 38
3．4　トルクが釣り合わない場合の制御系 ..... 43
3.4.1　制御ストラテジー ..... 43
3.4.2　マニフォールドの設計 ..... 43
3.4.3　マニフォールドへの到達則 ..... 45
3.4.4　数値シミュレーションによる検証 ..... 52
3．5　3 章まとめ ..... 57
4 章　3 次元劣駆動宇宙機の制御 ..... 58
4．1　はじめに ..... 58

4．2　宇宙機のモデル ..... 58
4.2.1　宇宙機の回転運動 ..... 58
4.2.2　宇宙機の並進運動 ..... 60
4．3　姿勢制御が可能なスラスター条件 ..... 61
4.3.1　直交する 3 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクが発生可能なケース ..... 62
4.3.2　直交する 2 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクが発生可能であり，かつ，第 3 軸回りのトルクが 0 となるケース ..... 63
4.3.3　直交する 2 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクが発生可能であり，これらのトルクに付随して第 3 軸回りに正のトルクが生じるケース ..... 64
4.3.4　4.3.3 項のシステムに対する制御系 ..... 67
4.3.5　数値シミュレーションによる検証 ..... 71
4.4　3 基のスラスターによる姿勢・位置の同時制御 ..... 76
4.4.1　制御系設計 ..... 77
4.4.2　制御系設計例（数値シミュレーション） ..... 87
4．5　4 章まとめ ..... 105
5 章　まとめと今後の課題 ..... 106
謝辞 ..... 109
参考文献 ..... 110

# 1章　背景と目的

## 1．1　背景

通信，測位，地球観測などの観点から，人工衛星の運用は現代社会において欠かせない．また，ボイジャー1 号，2 号によりこれまでにその詳細が不明であった天王星・海王星までその調査が及ぶことになり，着実に宇宙探査の領域が広がっている．これらの探査機はさらに太陽系の境界に迫っている．国内においても，近年では探査機“はやぶさ”の小惑星イトカワへのサンプルリターンミッションの成功が脚光を浴びた[1].

**Fig.1.1** Image of NASA’s Voyager-1 spacecraft (http://www.nasa.gov)

**Fig.1.2** Image of JAXA’s Hayabusa spacecraft (http://www.jaxa.jp)

宇宙機ではしばしばそのアクチュエータ数の冗長性が議論される．故障時のバックアップや多様なミッションへの対応を鑑み，現状（2013 年時点）では一つの宇宙機に 10 以上のスラスターやホイールが搭載されることも珍しくない．例えば，前述の宇宙探査機はやぶさは μ10 イオンエンジンと呼ばれるスラスターを 4 基備え，さらに軌道制御用も兼ねた姿勢制御スラスター12 基を備えている．加えて，はやぶさには姿勢制御装置として直交する 3 軸に任意のトルクが得られるように 3 基のリアクションホイールが搭載されていた．全ミッションを通してこれらのアクチュエータは故障が相次ぎ，最終的に地球に帰還を果たした際には 3 基のイオンエンジンスラスターと 1 基のリアクションホイールのみが生き残っていた[2]．この例からも分るように，宇宙ではアクチュエータが故障した際に復帰はほぼ不可能であるから，予備となるアクチュエータの数が宇宙機の長期運用を考えるうえで重要な要素となる．

一方で，宇宙機の軽量化という観点から，アクチュエータの数は少ないほど望ましい．制御するべき自由度に対して入力数が少ないことを劣駆動と呼ぶが，劣駆動な宇宙機に対する制御手法を確立することで，ミッションに必要なアクチュエータ数を低減しようとする試みがこれまでになされてきた．

劣駆動システムに対する制御では，システムの有する非線形性を積極的に活用する．外力が加わらない自由浮遊状態を仮定すれば，宇宙機の姿勢・並進運動に関する運動方程式は解析的に積分不可能な 2 階の微分方程式で表され，同時に宇宙機の拘束式となる．このような積分できない拘束式を非ホロノミックな拘束式と呼び，非ホロノミックな拘束をもつシステムは非ホロノミックシステムと呼ばれる．非ホロノミック拘束は，最終状態を拘束しないが，微分拘束式を通して状態に影響をおよぼすことはできる．そのため，システムの非線形性を積極的に活用することにより，入力の数以上の自由度を制御できる可能性をもつ[3,4].

これまでに，1 階の微分方程式が拘束式となる非ホロノミックな劣駆動システムに対してその特性を利用した制御方法が数多く提案されている[5-12]．このような 1 階の非ホロノミックな劣駆動システムの代表例としては 2 輪移動ロボットや浮遊宇宙ロボットが挙げられる．これらのシステムは対称 affine 系として表現できるが，Brockett の定理[3]により，滑らかな状態フィードバック制御系は存在しない．その制御は周期入力を活用したフィードフォワード制御[5]や切り替え制御[7-12]が主流となる．劣駆動であることに加え，最適性やモデル化誤差に対するロバスト性がその議論となることも多い[9,12].

前述のように 2 階の微分方程式が拘束式となる非ホロノミック劣駆動システムを本研究では取り扱うが，このようなシステムに対しては高次チェインドシステムと呼ばれる正準形式に変換する方法[13-16]や遺伝アルゴリズムのようなメタヒューリスティックな方法を用いた解軌道の導出法[17]が提案されている．また正準形への変換を必要としない切り替え制御の適用も報告されている[18]．1 階のシステムほどではないが，近年，2 階のシステムに対する報告例は増えつつある．

劣駆動な宇宙機の制御に対する検討例としては，2 個のリアクションホイール，またはCMG（Control Momentum Gyro）を用いて 3 軸の衛星の姿勢制御を行う研究[19-27]や， 2 つのスラスターを用いて 2 次元面内の位置と姿勢を同時に制御する研究[28]，ダンベル型衛星(Fig.1.3 参照)の軌道を制御する研究[29]等が挙げられる．特にリアクションホイールや CMG を用いた劣駆動宇宙機の姿勢制御に関しては数多く報告されており，入力拘束[24]やロバスト性[27]，エネルギ最適化[25,26]にまでその議論は及んでいる．なお，これらの報告はそのほとんどが理論研究に留まり，実証試験の報告は少ない．ほぼ唯一と言える実証試験は，小型衛星 μ-LabSat（Fig.1.4 参照）による月トラッキング姿勢制御実験である[27]．この実験ではスライディングモード制御[30]を活用した劣駆動宇宙機（2 個のリアクションホイールを備える）の姿勢制御手法が検証された．直接宇宙機の制御を狙ったものではないが，スラスターをアクチュエータに含む場合の検討として，山田ら[16]は Fig.1.5 のような 1 つのホイールと 1 つのスラスター（方向不可変）を有する浮遊移動体の面内の位置と姿勢を制御する手法を提案している．さらに，劣駆動なシステムではないが，Sidi ら[31]は 4 基の姿勢制御用スラスターによる 3 軸の姿勢制御の可能性について報告している．

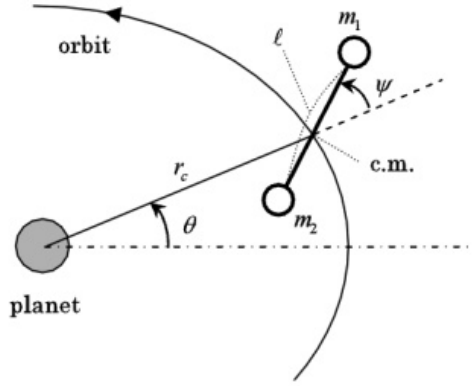



**Fig.1.3**　A dumbbell shaped satellite[29]

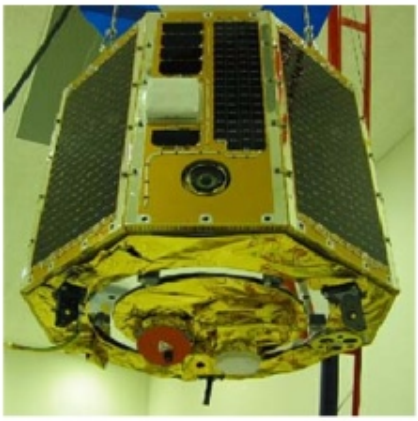


**Fig.1.4**　μ-LabSat [27]

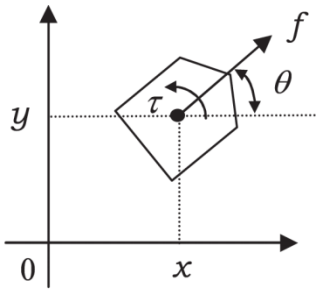



**Fig.1.5**　A free-floating planar rigid body driven by active force $f$ and torque $\tau$[16]

## 1．2　本研究の目的

本研究の目的は，究極的にいくつまでアクチュエータ数を低減できるかを明らかにし，劣駆動なアクチュエータによる宇宙機制御に対する基礎的な指針を与えることである．最少のアクチュエータによる制御手法を確立できれば，アクチュエータの少ないシンプルな構造の宇宙機の設計に繋がる．さらに，このような制御手法がバックアップとなることで現在運用中の宇宙機に対してもアクチュエータの冗長性をソフトウェア的に増すことができる．このようなソフトウェア的なアクチュエータの冗長性は，現在運用中の宇宙機の寿命の延長と実現可能なミッションの拡大に貢献する．

1.1 節に述べたように，リアクションホイール（または CMG）を用いた姿勢制御については数多くの研究がなされている．そこで，本研究では，アクチュエータが全てスラスターである劣駆動宇宙機に対して，姿勢と位置を同時に目標とする制御手法を検討する．こ

の検討をもとに，宇宙機の姿勢・位置の制御に必要な最少のスラスター数を明らかとする．

スラスターによる入力は回転運動と並進運動の双方に影響を及ぼす．これにより回転運動と並進運動は連成するが，その連成の作用をうまく利用すれば宇宙機の姿勢と位置の双方を制御できるメリットがある．このため，姿勢のみの議論となるリアクションホイールに比べてアクチュエータ数の低減が行い易い．また，リアクションホイールを用いる場合であっても，姿勢制御用としてスラスターが同時に用いられる場合が多い．これはリアクションホイールの回転数が上がり過ぎることを防ぐ “アンローディング”が必要なためである [2]．これらの観点から，スラスターのみを活用する制御システムにおいて極限までアクチュエータ数が低減されることは容易に想像できる．

ただし，スラスターのみを用いる劣駆動な宇宙機の姿勢と位置の制御には，これまでに提案された劣駆動システムに対する制御手法をそのまま適用することができない．これは，リアクションホイールや CMG と異なり，スラスターがある一方向にしか推力を発生することができないことに起因する．スラスターの方向が宇宙機の機体に対して可変でなければ，スラスターによる宇宙機の運動への入力は非負である Unilateral な拘束を有することになる．本研究で取り扱うような全てのアクチュエータがスラスターである場合，入力は全て Unilateral な拘束を有することになってしまう．このようなシステムは正準形式への変換が不可能である．これまでに提案された劣駆動なシステムに対する制御手法の多くは正準形をベースとしており，数少ない正準形をベースとしていない制御系も入力拘束の考慮は十分になされていない．したがって，スラスターをアクチュエータとする劣駆動な宇宙機に対しては新たな制御手法を検討する必要がある．

また，全ての入力が Unilateral な拘束を有する場合には，その可制御性を理論的に示すことさえ容易ではない．よって，既存の可制御性に関する定理から宇宙機の姿勢と位置の制御に必要な最少スラスター数を導くことも不可能である．Unilateral な入力拘束を有する非ホロノミックな劣駆動システムの可制御性に対しては，Goodwine の定理[32]がその十分条件を与える．Goodwine らは Sussman の定理[33]を拡張することでこの定理を導いた．この Goodwine の定理によれば，可制御である十分条件として，1 つ以上の Bilateral な入力（正・負双方の入力）が存在しなければならない．当然，Goodwine の定理は十分条件を与えるものであるから，これを満たさない場合であっても可制御となり得る．現に，文献[28]の報告では，数値シミュレーションによる検討を行い，開ループ制御によりスラスターをアクチュエータとする劣駆動宇宙機を所望の姿勢と位置とすることに成功している．

本研究では，文献[28]と同様に，あるスラスター数（スラスターの方向は宇宙機に固定）を仮定した自由浮遊の剛体宇宙機に対してその制御手法を検討し，数値シミュレーションにより宇宙機の姿勢と位置を任意の目標状態へ制御することが可能であることを示す．この検討の結果として，最終的には Fig.1.6 に示すような 3 基の推力可変なスラスターを有する宇宙機の姿勢と位置が同時に目標状態へ制御できることを明らかにする．

なお，最少数にまでは至らずとも，スラスターをアクチュエータとする劣駆動な宇宙機

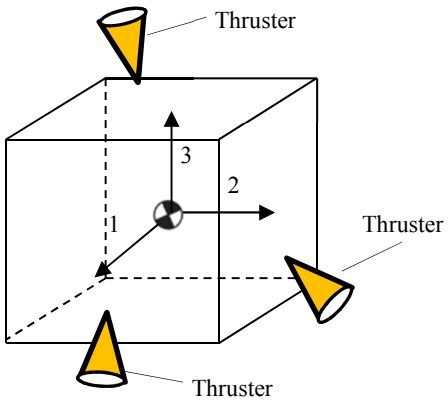
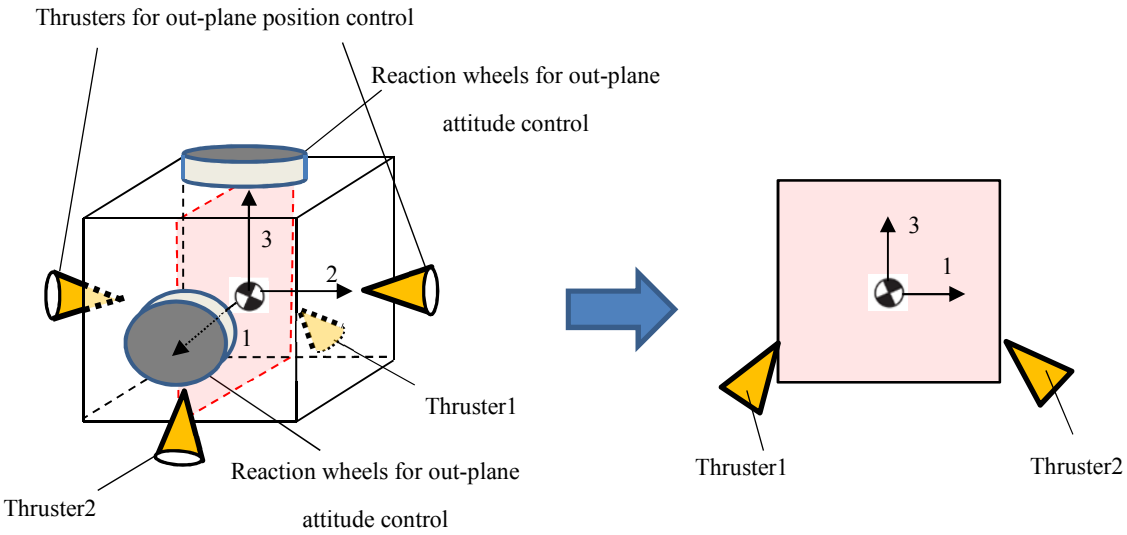



**Fig.1.6** Schematic image of a free floating spacecraft with three thrusters

に対する制御手法の研究はアクチュエータ数の低減や宇宙機寿命の向上に貢献する．アクチュエータ故障時のバックアップとしての観点からは，Fig.1.6 のような大部分のアクチュエータが故障した想定よりも，ある一部のアクチュエータの故障を想定する方が実際的であろう．そこで，本論文では最少スラスター宇宙機の検討に至る前に，Fig.1.7(b)に示すような 2 次元面内での宇宙機の姿勢・位置の制御を議論する．これは，例えば Fig.1.7(a)に示すような，ある面内についてのみ(Fig.1.7(a)では 1-3 軸平面)宇宙機が劣駆動となり，面外の姿勢と位置の制御に関しては十分な数のアクチュエータが生き残っている場合を想定している．本論文ではスラスター推力が可変である場合と ON/OFF 入力（固定値入力）である場合の制御手法をそれぞれ提案する．




(a) Three-dimensional model of a spacecraft

(b) Projection of the three dimensional a spacecraft on a 1-3 plane

**Fig.1.7** Schematic image of an under-actuated planar spacecraft

## 1．3　本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである．

まず，2 章にスラスター推力が可変である場合の 2 次元における劣駆動宇宙機の制御系を検討する．提案する制御系は，劣駆動システム対してその有効性が知られる不変マニフォールドを用いる切り替え制御[7,18]に参照軌道への追従制御の要素を加えたものである．追従制御を加えることで，宇宙機の質量と慣性モーメントのモデル化誤差に対するロバスト性を増すことができる．数値シミュレーションを行い，提案手法の有効性を示す．

続いて，3 章ではスラスターが ON/OFF 入力である場合の 2 次元における劣駆動宇宙機の制御系を検討する．ON/OFF 入力ではスラスター推力は特定の値，もしくは，0 の 2 通りしか取り得ない．このような入力拘束に対し，3 章では 2 章に示す不変マニフォールドを用いる制御系をさらに拡張したものを提案する．さらに，2 章と同様に数値シミュレーションにより制御系の有効性を示す．

4 章では 3 次元での劣駆動宇宙機の姿勢・位置制御について述べる．2 次元の場合に比べて制御するべき変数が大幅に増えることから，まず姿勢制御が可能な最少スラスター数が 3 基であること，および，姿勢制御が可能となるスラスターの位置・方向の条件を示す．さらに 3 つの不変マニフォールドを使った切り替え制御と開ループ制御を組み合わせた手法により姿勢と位置の同時制御が可能であることを述べる．数値シミュレーションにより制御手法の有効性を示す．

最後に，5 章において全体のまとめと今後の課題を述べる．

# 2 章　2 基のスラスターによる 2 次元劣駆動宇宙機の制御（推力可変）

## 2. 1　はじめに

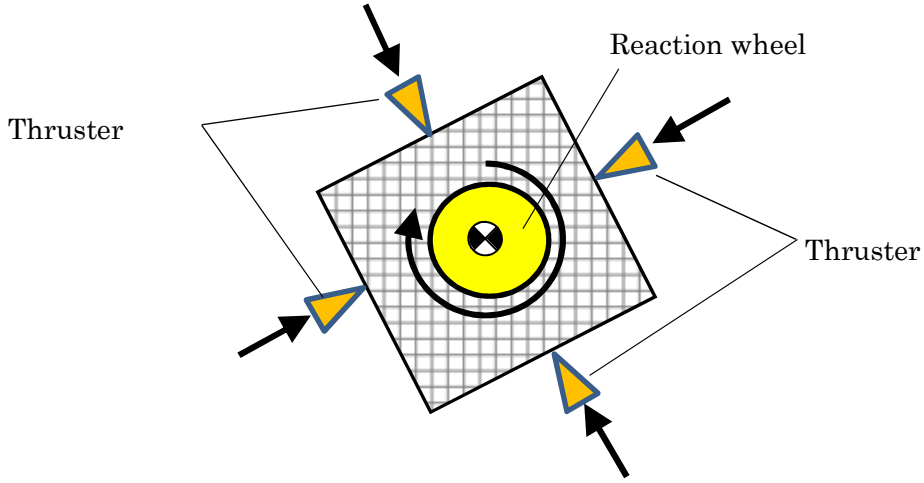
本章ではスラスター推力が正の範囲で可変である 2 次元劣駆動宇宙機の制御問題について検討する．1.2 節の Fig.1.7 に示したように，3 次元の宇宙機を 2 次元へ投影したと考えれば本章で示す 2 次元劣駆動宇宙機の制御手法は 3 次元問題の一部として適用できる．

スラスターの方向が可変でない場合，2 次元面内における宇宙機の位置・姿勢制御に対して従来の線形理論を適用可能とするには, Fig.2.1(a)に示すように位置制御用のスラスターが最低 4 基，姿勢制御用のリアクションホイールが最低 1 基（代わりに 2 基のスラスターとしてもよい）必要となる．4 基というスラスター数の根拠は，スラスター推力は正のみであることから，正と負双方の出力を行うために 1 つの自由度に対してスラスターが 2 基必要であることによる．これら 4 基のスラスターと 1 基のリアクションホイール（または 2 基のスラスター）で構成されるシステムに代わり，Fig.2.1(b)に示すような 2 基のスラスターで宇宙機の位置・姿勢制御を可能とする制御系を設計することが本章の趣旨となる．

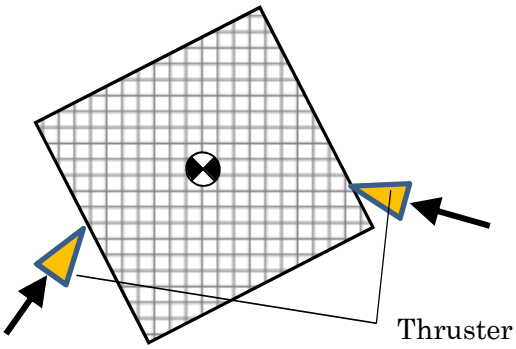
なお，現在の一般的な電気推進エンジンの推力は固定値であり，冒頭に述べたスラスター推力が正の範囲で可変であるという仮定は非現実的に思われるかもしれない．しかしながら，近年では Fig.2.2 に示すような比推力可変型プラズマ推進機（VASIMR）の研究開発が進んでおり[34-36]，近い将来にこのような推力が可変であるスラスターが実用化されることが予想される．

また，1 章にも述べたが，推力が可変である場合の 2 次元劣駆動宇宙機の制御手法としては，文献[28]における開ループ制御方法を挙げることができる．本章では，この開ループ制御手法を発展させた状態フィードバック制御を検討する[*1)]. 劣駆動システムに対する状態フィードバック制御の手法として，不変マニフォールドを用いる Khennouf[7]や石川ら[18]の方法が有効であるが，本論文で取り扱うスラスター出力が正のみとなる拘束を有する系に対してはこれらの手法をそのまま採用することができない．そこで，不変マニフォールドへ到達するまでの宇宙機の参照運動を開ループ制御手法により作成し，この参照運動に対して状態フィードバック制御により宇宙機を追従させる．

*1)　ここで検討した手法は文献[37，38]にて報告した．




(a) Conventional spacecraft




(b) Under-actuated spacecraft

**Fig.2.1** Schematic image of a planar spacecraft

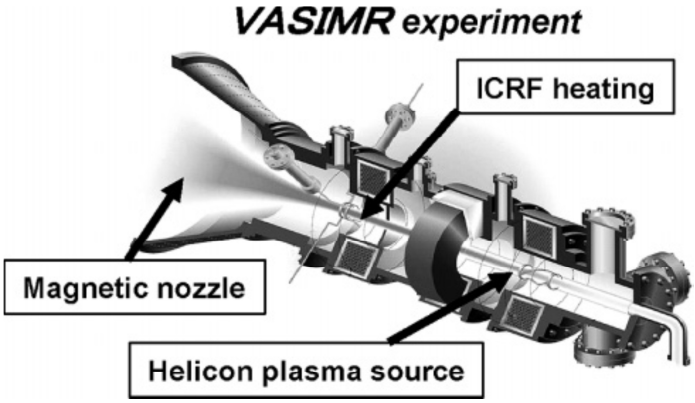



**Fig.2.2** Schematic image of VASIMR [35]

本章で議論の対象となる Fig.2.1(b)の宇宙機はスラスター数が 2 つであり, 文献[28]の報告と同じ仮定である．提案手法は状態フィードバックを行うために，制御ロジックに用いる宇宙機の質量や慣性モーメントの誤差に対して安定性が増していることに着目されたい.

以下，宇宙機のモデル，制御系の設計，参照軌道の設計手法を示した後に，数値シミュレーションにより提案手法の有効性を示す．最後にまとめと今後の課題を述べる.

## 2．2　宇宙機のモデル

Fig.2.3 に本章で取り扱う宇宙機と慣性座標系 $X$-$Y$ を示す．宇宙機には外力は加わらず，自由浮遊の状態であることを仮定する．また，宇宙機の質量中心を原点とする宇宙機固定の座標系 $x_b$-$y_b$ を考え，この座標系に沿った推力を $F_{xb}$，$F_{yb}$ とする．このとき，慣性座標系に対する宇宙機の面内の運動方程式は以下のように表される.

$$m\ddot{X} = F_{xb}\cos(\theta) - F_{yb}\sin(\theta) \tag{2.1}$$

$$m\ddot{Y} = F_{xb}\sin(\theta) + F_{yb}\cos(\theta) \tag{2.2}$$

$$J\ddot{\theta} = T \tag{2.3}$$

ここで $m$，$\theta$，$J$，$T$ は，それぞれ宇宙機の質量，姿勢角，慣性モーメント，回転モーメントである．質量や慣性モーメントは，実際には宇宙機の燃料の消費とともに時々刻々と変化するパラメータであるが，本章ではこれらを固定値であると仮定する．これは，初期状態からのそれらの変化があまり大きくないことに加えて，2.3 節に提案する制御系はモデル化誤差に対してロバストであるためである.

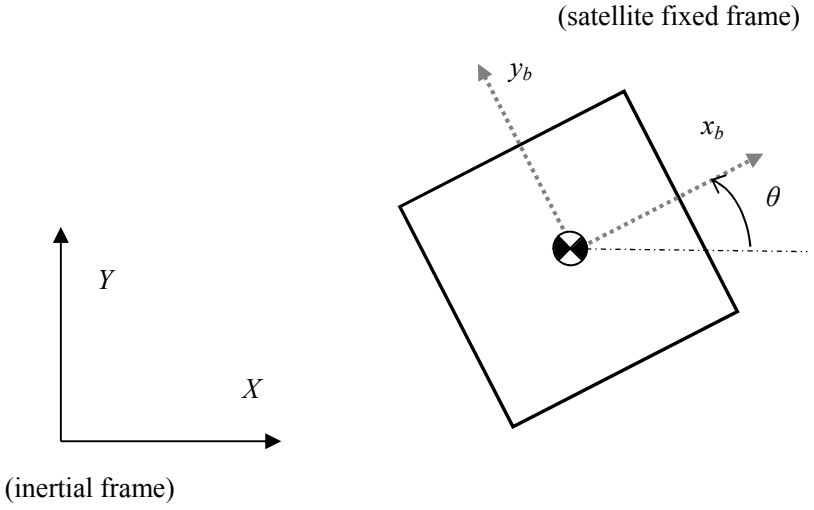



**Fig.2.3** A planar satellite and coordinate systems

宇宙機は，2.1 節に述べたようにその向きが宇宙機本体に固定されたスラスターを 2 基備えているとする．スラスターが 1 基では明らかに所望の位置・姿勢へ宇宙機を制御することは不可能であるから，2 基というスラスター数は 2 次元問題において考えられる最小値である．スラスター推力の大きさは 0 からある正値までの範囲で連続的に変化させることができると仮定する．2 基のスラスターが宇宙機に逆向きの回転トルクを発生させることができれば，回転モーメントの和が 0 のとき，ある方向に並進運動だけが発生する．本報ではその方向を $x_b$ 方向と定義する．

次に，Fig.2.4 にスラスターと宇宙機との幾何学関係を示す．スラスター$i$（$i$=1,2）に対して，$f_i$ は力の大きさ， $\alpha_i$ は取り付け角度，$\beta_i$ は回転モーメントのモーメントアームを表す．ただし，反時計回りを正の回転方向とし，スラスター力が時計回り方向の回転モーメントを発生する場合には $\beta_i$ を負の値として定義する．明らかに，姿勢角は下記の条件が成り立てば可制御である．

$$\beta_1\beta_2 < 0 \tag{2.4}$$

このとき，推力 $F_{xb}$, $F_{yb}$ および回転モーメント $T$ はスラスター力により，以下のようになる．

$$F_{xb} = f_1\cos(\alpha_1) + f_2\cos(\alpha_2) \tag{2.5}$$

$$F_{yb} = f_1\sin(\alpha_1) + f_2\sin(\alpha_2) \tag{2.6}$$

$$T = f_1\beta_1 + f_2\beta_2 \tag{2.7}$$

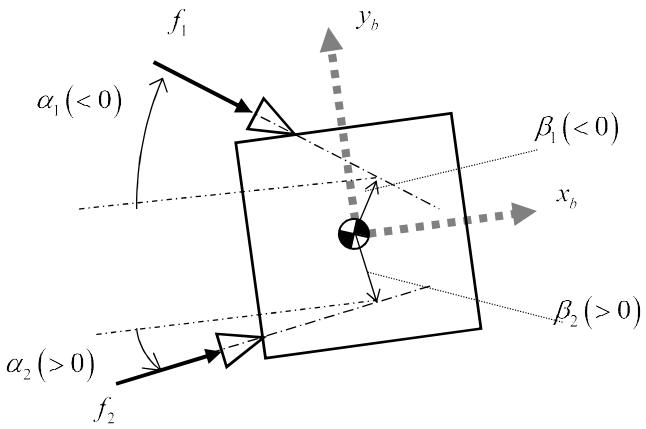



**Fig.2.4** Two thrusters fixed in the spacecraft

式(2.6)と式(2.7)より，$\beta_1 \neq 0$ のとき，$F_{yb}$ は以下のように表される．

$$F_{yb} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\beta_1} T - \frac{f_2}{\beta_1}\left(\beta_2 \sin(\alpha_1) - \beta_1 \sin(\alpha_2)\right) \tag{2.8}$$

なお，$x_b$ 方向を，回転モーメントが 0 のときの並進運動が生じる方向として定義したので，$T=0$ であれば $F_{yb}=0$ でなければならない．したがって， $y_b$ 方向の推力と回転モーメントの間には次のような従属関係が成り立つ．

$$F_{yb} = \gamma T \tag{2.9}$$

ここに，$\gamma = \sin(\alpha_1)/\beta_1$ (もしくは $\gamma = \sin(\alpha_2)/\beta_2$ )は，スラスターの取り付け条件より定まる定数である．式(2.9)は，2 基の機体固定スラスターをもつ宇宙機ではどのようなスラスター取り付けであっても，必ず回転運動に従属な並進運動の方向が存在することを示している．

## 2．3　制御系の設計

一般性を失うことなく，目標状態における宇宙機の質量中心に原点をもち，$x_b$ ($y_b$)方向が $X$ ($Y$)方向に一致する慣性座標系を定義できる．したがって以降では，目標位置を慣性座標系の原点，目標姿勢を $\theta = 2n\pi$（$n$：任意の整数）として制御系を設計していく．

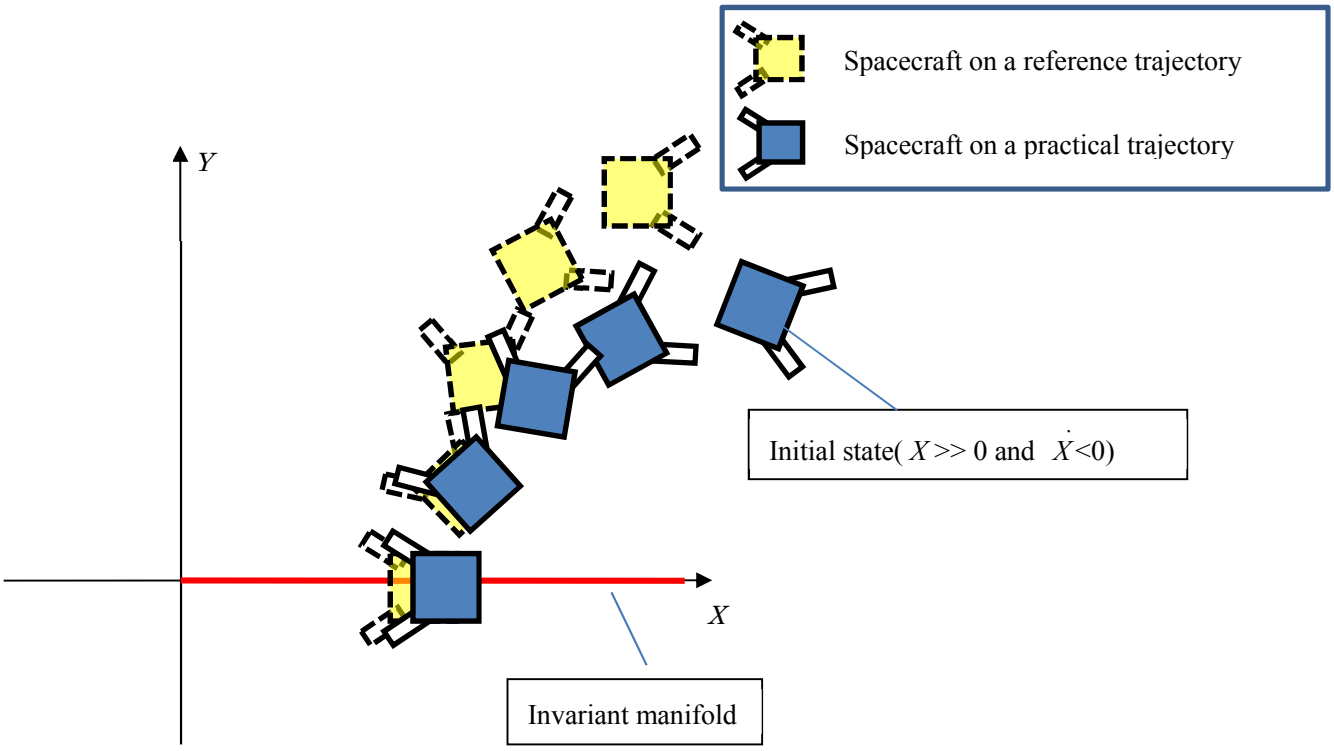
### 2.3.1　制御ストラテジー

Fig.2.5 に本章に提案する制御手法の概念を示す.

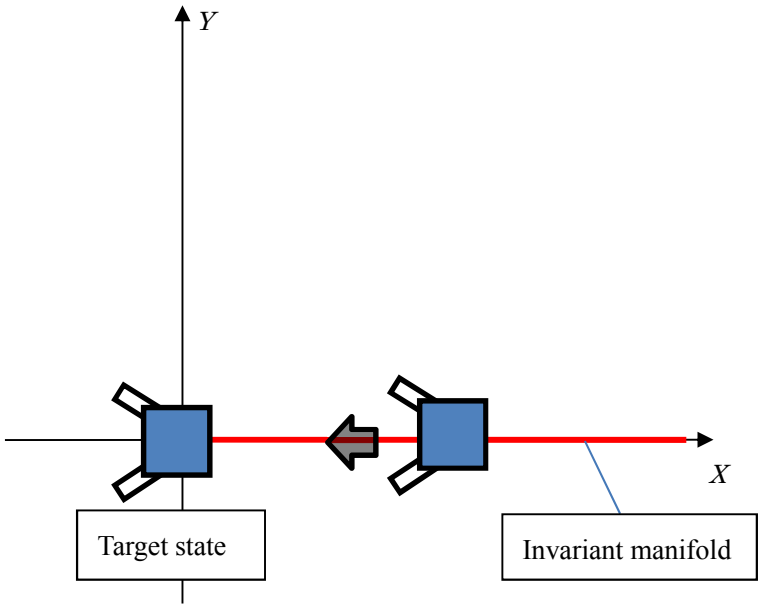
本章では, 宇宙機を一旦不変マニフォールドへ遷移させ(Fig.2.5(a)), その後目標点（原点）へ状態を収束させる(Fig.2.5(b))2 段階の制御を提案する. これは, Khennouf ら[7]や石川ら[18]の手法と同様のアプローチである．不変マニフォールドは $X$ 軸の正の部分に宇宙機の姿勢が $\theta = 2n\pi$ である状態とする．不変マニフォールドを $X$ 軸における正の部分に限定した理由は，$\theta = 2n\pi$ のときスラスター力は $X$ 軸の正の方向にのみ作用するので，宇宙機を原点に静止させるには $Y = 0$ に達した際に $X > 0$，$\dot{X} < 0$ である必要があるためである．また，本章では $X > 0$，$\dot{X} < 0$ の制約を満たすため，予め開ループ制御により $X >> 0$，$\dot{X} < 0$ の状態とすることを仮定する．このような制御は，例えば文献[28]の開ループ手法を用いれば容易に行うことができる．

上述の 2 段階制御を行うためには，不変マニフォールドへ宇宙機を遷移させるステップにおいて姿勢角 $\theta$ が $2n\pi$ になると同時に $Y$ 座標（慣性系）が 0 に収束しなければならない（$\theta = 2n\pi$ のとき，$Y$ 方向と $y_b$ 方向は一致する）．これは，宇宙機の回転運動と $y_b$ 方向の並

進運動は, 式(2.9)で見たように従属な関係をもつためである. さらに2.2節に述べたように, 実際の宇宙機では質量・慣性モーメント等のモデルパラメータの不確かさに対応できる制御系であることが望ましい.




(a) Control to an invariant manifold




(b) Control to a trget state

**Fig.2.5** Control strategy

そこで，提案手法においては不変マニフォールドを用いる切り替え制御に参照軌道への追従制御の概念を導入する．まず，公称モデルに対して宇宙機の姿勢角 $\theta$ と $Y$ 座標が同時に目標値に達する参照軌道を設計する（具体的な設計方法は，2.3.4 項で説明する）．次に，参照軌道への状態フィードバック制御を適用する．その結果，実際の宇宙機がモデル誤差をもっていても不変マニフォールドへの収束が可能となる．不変マニフォールド上では宇宙機は単純に直線運動を行うだけなので，質量や慣性モーメントに誤差が含まれていても目標点へ収束可能である．以下の議論では，宇宙機は慣性モーメントと質量に対するモデル化誤差 $\Delta J$ と $\Delta m$ をもつとする．

### 2.3.2 姿勢角に対する追従制御系（不変マニフォールドへの到達制御）

まず，宇宙機の姿勢角 $\theta$ の制御について検討する．

Lyapunov の第 2 定理に基づき，姿勢角 $\theta(t)$を参照軌道 $\theta_r(t)$へ追従させるために，Lyapunov 関数の候補として，次の正定関数を考える．

$$V_\theta = \frac{1}{2}\left\{ \frac{K_{\theta 1}}{J+\Delta J}\left(\theta_r(t)-\theta(t)\right)^2 + K_{d\theta 1}\left(\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)\right)^2 \right\} \tag{2.10}$$

ここで，$K_{\theta 1}$，$K_{d\theta 1}$ は任意の正の定数であり，このとき $V_\theta$ の時間微分は，式(2.3)と式(2.9)より，次のようになる．

$$\begin{aligned} \dot{V}_\theta &= \left(\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)\right)\left\{ \frac{K_{\theta 1}}{J+\Delta J}\left(\theta_r(t)-\theta(t)\right) + K_{d\theta 1}\left(\ddot{\theta}_r(t)-\ddot{\theta}(t)\right) \right\} \\ &= \left(\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)\right)\left[ \frac{K_{\theta 1}}{J+\Delta J}\left(\theta_r(t)-\theta(t)\right) + K_{d\theta 1}\left\{ \ddot{\theta}_r(t) - \frac{1}{\gamma\left(J+\Delta J\right)}F_{yb} \right\} \right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

式(2.5)と式(2.6)より，この宇宙機のシステムにおいては 2 つのスラスターにより $F_{xb}$ と $F_{yb}$ を独立に変化させることができる（このとき，式(2.9)より，回転モーメント $T$ は従属的に決まる）．そこで，$K'_{d\theta 1} \geq 0$ を用いて $F_{yb}$ を，

$$F_{yb} = \frac{\gamma K_{\theta 1}}{K_{d\theta 1}}\left(\theta_r(t)-\theta(t)\right) + \gamma K'_{d\theta 1}\left(\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)\right) + \gamma J\ddot{\theta}_r(t) \tag{2.12}$$

とすれば，

$$\dot{V}_\theta = -\frac{K_{d\theta 1}\left(\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)\right)}{J+\Delta J}\left\{K'_{d\theta 1}\left(\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)\right)-\Delta J\ddot{\theta}_r(t)\right\} \tag{2.13}$$

となる．これより，

$$\left|\Delta J\ddot{\theta}_r(t)\right| \le K'_{d\theta 1}\left|\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)\right| \tag{2.14}$$

であれば，$\dot{V}_\theta \le 0$ となる．さらに $\dot{V}_\theta$=0 となる状態は，$\dot{\theta}(t)=\dot{\theta}_r(t)$を除けば，

$$\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)=\frac{\Delta J}{K'_{d\theta 1}}\ddot{\theta}_r(t) \tag{2.15}$$

である．このとき，式(2.9)と式(2.12)より，回転モーメント $T$ は，

$$T=\frac{K_{\theta 1}}{K_{d\theta 1}}\left(\theta_r(t)-\theta(t)\right)+\left(J+\Delta J\right)\ddot{\theta}_r(t) \tag{2.16}$$

となる．$J+\Delta J$ は慣性モーメントの真値であるから，上式右辺第 2 項は所望の角加速度を発生させる回転モーメントである．右辺第 1 項は，姿勢角の偏差に応じて回転モーメントが増減されることを意味する．つまり，$\dot{V}_\theta = 0$ の状態は平衡状態となり得ない．結果として，式(2.14)が満たされれば，$V_\theta \rightarrow 0$ すなわち $\theta \rightarrow \theta_r$ と $\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta}_r$ が達成される．したがって，時間の経過に伴い $\theta_r(t) \rightarrow 2n\pi$ となるように参照軌道を設計しておけば，姿勢角 $\theta$ も $2n\pi$ に収束する．

なお，$\dot{V}_\theta$=0 の平衡状態として，$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_r(t)$ は除外される．式(2.12)より，

$$\ddot{\theta}(t)-\ddot{\theta}_r(t)=\frac{K_{\theta 1}}{JK_{d\theta 1}}\left(\theta_r(t)-\theta(t)\right)+\frac{K'_{d\theta 1}}{J}\left(\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)\right) \tag{2.17}$$

であるから，$\theta(t)=\theta_r(t)$でない限り $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_r(t)$が平衡となることは無い．

### 2.3.3 $Y$ 方向座標に対する追従制御系（不変マニフォールドへの到達制御）

2.3.2 項と同様に Lyapunov の手法を適用して $Y(t)$を参照軌道 $Y_r(t)$へ追従させる．$F_{xb}$ により $Y$ 方向残差を 0 にするべく，次の Lyapunov 関数の候補 $V_Y$ を考える．ただし，$K_{Y1}$ は任意の正の定数である．

$$V_Y = \frac{1}{2}\left[ \frac{K_{Y1}}{m+\Delta m}\left\{ \left|\sin\left(\theta_r(t)\right)\right| \left(Y_r(t)-Y(t)\right)^2 \right\} + \left(\dot{Y}_r(t)-\dot{Y}(t)\right)^2 \right] \tag{2.18}$$

右辺の $\sin(\theta(t))$は，$F_{xb}$ が $\sin(\theta(t))$を介して $\ddot{Y}(t)$に影響をおよぼすことに対応している（式(2.2)を参照）．このとき，$V_Y$の時間微分は次のようになる．

$$\dot{V}_Y = \left(\dot{Y}_r(t)-\dot{Y}(t)\right)\left\{ \frac{\left|\sin\left(\theta_r(t)\right)\right|}{m+\Delta m} K_{Y1}\left(Y_r(t)-Y(t)\right) + \left(\ddot{Y}_r(t)-\ddot{Y}(t)\right) \right\} + V' \tag{2.19}$$

ただし，

$$V' = \frac{K_{Y1}\left(Y_r(t)-Y(t)\right)^2}{2\left(m+\Delta m\right)} \frac{d\left(\left|\sin\left(\theta_r(t)\right)\right|\right)}{dt} \tag{2.20}$$

である．

ここで，前項の式(2.12)の $F_{yb}$ により，姿勢角が参照軌道における姿勢角に漸近したとすれば，$\theta(t) \rightarrow \theta_r(t)$と $\dot{\theta}(t) \rightarrow \dot{\theta}_r(t)$と近似できる．またその結果，$F_{yb}$ も参照軌道に対する $F_{yb,r}$ に収束する．したがって，$\ddot{Y}$は次のように表現できる．

$$\ddot{Y}(t) = \frac{1}{m+\Delta m}\left( F_{xb}\sin\left(\theta_r(t)\right) + F_{yb,r}\cos\left(\theta_r(t)\right) \right) \tag{2.21}$$

一方，参照軌道の 2 階時間微分は

$$\ddot{Y}_r(t) = \frac{1}{m}\left( F_{xb,r}\sin\left(\theta_r(t)\right) + F_{yb,r}\cos\left(\theta_r(t)\right) \right) \tag{2.22}$$

であるから，式(2.19)は次のようになる．

$$\begin{aligned} \dot{V}_Y = \left(\dot{Y}_r(t)-\dot{Y}(t)\right)\Bigg\{ & \frac{\left|\sin\left(\theta_r(t)\right)\right|}{m+\Delta m} K_{Y1}\left(Y_r(t)-Y(t)\right) + \left( \frac{1}{m}F_{xb,r} - \frac{1}{m+\Delta m}F_{xb} \right)\sin\left(\theta_r(t)\right) \\ & + \frac{\Delta m}{m\left(m+\Delta m\right)} F_{yb,r}\cos\left(\theta_r(t)\right) \Bigg\} + V' \end{aligned} \tag{2.23}$$

ここで，シグナム関数 sgn(・)を用いて，入力 $F_{xb}$ を

$$F_{xb} = \mathrm{sgn}\left(\sin\left(\theta_r(t)\right)\right)\left\{K_{Y1}\left(Y_r(t) - Y(t)\right) + K_{dY1}\left(\dot{Y}_r(t) - \dot{Y}(t)\right)\right\} + F_{xb,r} \tag{2.24}$$

とする（$K_{dY1}$ は任意の正の定数）．このとき式(2.19)の $\dot{V}_Y$ は，式(2.22)を用いて，次のように表現できる．

$$\begin{aligned}\dot{V}_Y &= \frac{\left(\dot{Y}_r(t) - \dot{Y}(t)\right)}{m + \Delta m}\left\{-K_{dY1}\left|\sin\left(\theta_r(t)\right)\right|\left(\dot{Y}_r(t) - \dot{Y}(t)\right) + \frac{\Delta m}{m}\left(F_{xb,r}\sin\left(\theta_r(t)\right) + F_{yb,r}\cos\left(\theta_r(t)\right)\right)\right\} + V' \\ &= \frac{1}{m + \Delta m}\left\{-K_{dY1}\left|\sin\left(\theta_r(t)\right)\right|\left(\dot{Y}_r - \dot{Y}\right)^2 + \Delta m\ddot{Y}_r\left(\dot{Y}_r - \dot{Y}\right)\right\} + V'\end{aligned} \tag{2.25}$$

参照軌道 $\theta_r(t)$は，当然，不変マニフォールドの近傍で単調減少（もしくは単調増加）する軌道として設計されているはずなので，$d|\sin(\theta_r)| / dt \le 0$ であり，$V' \le 0$ となる．したがって，

$$\left|\Delta m\ddot{Y}_r(t)\right| \le K_{dY1}\left|\sin\left(\theta_r(t)\right)\right|\left(\dot{Y}_r(t) - \dot{Y}(t)\right)\right| \tag{2.26}$$

であれば，$\dot{V}_Y \le 0$ となる．不変マニフォールドの近傍では $\ddot{Y}_r(t) \rightarrow 0$ となっているはずなので，上の関係式は満たされ，$V_Y$ は Lyapunov 関数となる．すなわち，式(2.12)の $F_{yb}$ が姿勢角を参照軌道の姿勢角に追従させるのに伴い，式(2.24)の $F_{xb}$ は慣性座標系の $Y(t)$を参照軌道 $Y_r(t)$へ追従させる．

なお，$K_{dY1}$ は，式(2.24)の $F_{xb}$ におけるフィードバックゲインであると同時に，式(2.25)においてロバストなモデル化誤差の範囲を規定する．したがって，このフィードバックゲインの調整により，許容可能なモデル化誤差の範囲を変えることができることに注意されたい．

### 2.3.4 目標状態への制御（不変マニフォールド到達後の制御）

一旦，不変マニフォールドである $X$ 軸上に宇宙機が遷移後は，$T = 0$，すなわち，$F_{yb} = 0$ である限り宇宙機は不変マニフォールドに拘束される．したがって，制御するべき残りの変数 $X$ は，$F_{yb} = 0$ の拘束のもとに以下の $F_{xb}$ を加えることで 0 へ収束する．

$$F_{xb} = -K_f X - K_{fv}\dot{X} \tag{2.27}$$

ここで，$K_f$, $K_{fv}$ は任意の正の係数である．式(2.27)の入力により $X$ が 0 へ収束することは，$X$ に関して，以下の $V_X$ が Lyapunov 関数となることから確認できる．

$$V_X = \frac{1}{2}\left(K_f X^2 + \dot{X}^2\right) \tag{2.28}$$

式(2.28)の時間微分に式(2.27)を代入すれば，

$$\dot{V}_X = -\frac{K_{fv}}{M}\dot{X}^2 \le 0 \tag{2.29}$$

となる．

## 2．4　参照軌道の設計

2.3.2 項と 2.3.3 項に示した追従制御のためには，スラスターの Unilateral な入力拘束である $f_1$, $f_2 \ge 0$ が常に満たされる参照軌道を設計しておかなければならない．以下にその設計方法を示す．

まず，スラスター力の入力拘束 $f_1$，$f_2 \ge 0$ を $F_{xb,r}$，$F_{yb,r}$ に関する拘束へ書き直す．簡単のために以下では，Fig.2.4 の模式図のような以下の取り付け角を仮定する．

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < 0, \quad 0 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2} \tag{2.30}$$

このとき，式(2.5)と(2.6)より，公称モデルに対して次式を得る．

$$F_{xb,r}\sin(\alpha_1) - F_{yb,r}\cos(\alpha_1) = f_2\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{2.31}$$

$$F_{xb,r}\sin(\alpha_2) - F_{yb,r}\cos(\alpha_2) = f_1\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \tag{2.32}$$

したがって，$f_1$，$f_2 \ge 0$ は，以下の関係式と等価になる．

$$F_{xb,r} \ge F_{yb,r}\cot(\alpha_1) \quad , \quad F_{xb,r} \ge F_{yb,r}\cot(\alpha_2) \tag{2.33}$$

$F_{yb,r}$ は正負いずれの値もとれるので，上の条件式を満たすには，$F_{xb,r}$ と $F_{yb,r}$ の間に次の

関係が成り立たなければならない.

$$\begin{cases} F_{xb,r} \geq \left| F_{yb,r} \cot(\alpha_1) \right| & \text{for} \quad \left|\cot(\alpha_1)\right| \geq \left|\cot(\alpha_2)\right| \\ F_{xb,r} \geq \left| F_{yb,r} \cot(\alpha_2) \right| & \text{for} \quad \left|\cot(\alpha_1)\right| < \left|\cot(\alpha_2)\right| \end{cases} \tag{2.34}$$

これより，$F_r \geq 0$ を用いて，入力 $F_{xb,r}$ が次のように設計されていれば条件 $f_1$，$f_2 \geq 0$ を満たす（$F_r$ の定め方については後に示す）.

$$F_{xb,r} = \left| F_{yb,r} \cot(\alpha_i) \right| + F_r \quad (i = 1, 2) \tag{2.35}$$

なお，不変マニフォールドへ導く参照入力は無数に存在し，通常は繰り返し計算に基づき設計することになる．メタヒューリスティックな手法を用いれば，何らかの評価関数を準最適化する参照軌道の設定も可能である．ただし，ここでの制御はあくまでもアクチュエータが故障した際のバックアップを想定しているため最適性はあまり問題にならない．以下に示す方法は，状態を任意の初期状態から不変マニフォールドへ収束させる一つの参照軌道設計法であり，繰り返し計算を必要とせず簡易に参照軌道を設定できる点に着目されたい.

姿勢角については，正のゲイン $K_{\theta,r}$ と $K_{d\theta,r}$ を用いて，以下のフィードバック式(2.36)のようにすれば，$\theta(t) \rightarrow 2n\pi$ を達成できる．さらに，$K_{d\theta,r} > 1$ とすれば，姿勢角は単調に増加（もしくは減少）する.

$$\ddot{\theta}_r(t) = -K_{\theta,r}\theta_r(t) - K_{d\theta,r}\dot{\theta}_r(t) \tag{2.36}$$

このフィードバック則を用いれば，初期状態とフィードバックゲインに応じて，不変マニフォールドまでの姿勢角の履歴が一意に定まる.

一方，参照軌道 $Y_r(t)$の 2 階微分は，式(2.22)に式(2.35)と $F_{yb,r} = \gamma J \ddot{\theta}_r(t)$を代入することにより，次式となる.

$$\ddot{Y}_r(t) = \eta(t) + \zeta(t) \tag{2.37}$$

ここに,

$$\eta(t) = \frac{1}{m}\left\{ \left| \gamma J \ddot{\theta}_r(t) \cot(\alpha_i) \right| \sin\left(\theta_r(t)\right) + \gamma J \ddot{\theta}_r(t) \right\} \quad (i = 1, 2) \tag{2.38}$$

$$\zeta(t)=\frac{1}{m}F_r\sin\left(\theta_r(t)\right) \tag{2.39}$$

である．

ここで，姿勢角 $\theta_r(t)$が $2n\pi$ に達する時刻 $t_1$ において，$Y$ 座標を 0 に収束させなければならない．そこで，$\theta_r(t)$の関数 $u(\theta_r)$を用いて，$F_r$ を次のように表現する（後の積分が可能なように$|\dot{\theta}_r(t)|$を乗じている）．

$$F_r=\sum_{k=1}^{q}c_k u_k\left(\theta_r(t)\right)\left|\dot{\theta}_r(t)\right| \tag{2.40}$$

ここに $c_k(k=1\sim q)$は，$Y_r(t_1)=0$，$\dot{Y}_r(t_1)=0$ を満たすように調整されるパラメータであり，また $F_r \geq 0$ を満たすように決定される．式(2.35)で，$\theta_r(t)$を単調増加(減少)であるように設定すると，$|\dot{\theta}_r(t)| = \dot{\theta}_r(t)$とおけるので，時刻 $t_0$ から $t_1$ までの $\zeta(t)$の時間積分は，次のように $\theta_r(t)$に関する積分で表現できる．

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\zeta(t)dt&=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{q}c_k\int_{t_0}^{t_1}u_k\left(\theta_r(t)\right)\dot{\theta}_r(t)\sin\left(\theta_r(t)\right)dt\\&=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{q}c_k\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t_1)}u_k\left(\theta_r(t)\right)\sin\left(\theta_r(t)\right)d\theta_r\end{aligned} \tag{2.41}$$

ここで，$u_k(\theta_r)$を $u_k(\theta_r)\sin(\theta_r)$が $\theta_r(t)$で解析的に積分できるように選んでおけば，時刻 $t_1$ における$\dot{Y}_r(t_1)$を解析的に表現でき，その数値積分として $Y_r(t_1)$が定まる．その結果，パラメータ $c_k(k=1\sim q)$を以下の式を満たすように決めれば，姿勢角と同時に $Y$ 座標を 0 に収束させることができる．

$$\int_{t_0}^{t_1}\eta(t)dt+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{q}c_k I_\zeta^{(k)}\left(\theta_r(t_0),\theta_r(t_1)\right)+\dot{Y}_r(t_0)=0 \tag{2.42}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\eta(t)dtdt+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{q}c_k\int_{t_0}^{t_1}I_\zeta^{(k)}\left(\theta_r(t_0),\theta_r(t_1)\right)dt+Y_r(t_0)=0 \tag{2.43}$$

ここに

$$I_\zeta^{(k)}\left(\theta_r(t_0),\theta_r(t_1)\right)=c_k\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t_1)}u_k\left(\theta_r(t)\right)\sin\left(\theta_r(t)\right)d\theta_r \tag{2.44}$$

である．

例えば，$q = 2$ として $u_1(\theta_r) = 1$，$u_2(\theta_r) = \cos(\theta_r + \phi)$と選べば，式(2.44)の積分およびパラメータ $c_k$ は以下のようになる．($\phi$は定数であり，これは速度の値を調整するのに利用できる)．

$$I_\zeta^{(1)} = -\cos\left(\theta(t_1)\right) + \cos\left(\theta(t_0)\right)$$

$$I_\zeta^{(2)} = \frac{1}{4}\left\{\cos(2\theta(t_0) + \phi) - \cos(2\theta(t_1) + \phi)\right\} + \frac{\sin(\phi)}{2}\left(\theta(t_0) - \theta(t_1)\right)$$

$$c_1 = \frac{m\left(\psi_1 I_\zeta^{(2)} - \psi_2 \int_{t_0}^{t_1} I_\zeta^{(2)} dt\right)}{-I_\zeta^{(2)} \int_{t_0}^{t_1} I_\zeta^{(1)} dt + I_\zeta^{(1)} \int_{t_0}^{t_1} I_\zeta^{(2)} dt}$$

$$c_2 = -\frac{m\left(\psi_1 I_\zeta^{(1)} - \psi_2 \int_{t_0}^{t_1} I_\zeta^{(1)} dt\right)}{-I_\zeta^{(2)} \int_{t_0}^{t_1} I_\zeta^{(1)} dt + I_\zeta^{(1)} \int_{t_0}^{t_1} I_\zeta^{(2)} dt}$$

$$\psi_1 = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \eta(t) dt dt + Y(0) \quad , \quad \psi_2 = \int_{t_0}^{t_1} \eta(t) dt + \dot{Y}(0)$$

なお上記の $u_k(\theta_r)$に対しては，$c_1 \geq 0$ かつ $c_1 \geq c_2$ であれば，$F_r \geq 0$ も同時に満たされ，所望の参照軌道を設定できる．

## 2．5　数値シミュレーション

### 2.5.1　初期条件と制御系パラメータの設定

提案手法の有効性を検証するため，計算機シミュレーションを行う．シミュレーションに用いたモデルパラメータを Table 2.1 に示す. Table 2.1 内の Nominal model の欄は参照軌道の作成に用いた公称モデルのパラメータである．スラスターの取り付けは，次のように設定した．

Thruster 1:　$\alpha_1$ = -45[deg]，$\beta_1$ = -0.354[m],

Thruster 2:　$\alpha_2$ = 45[deg]，$\beta_1$ = 0.354[m]

また，スラスター出力の大きさは 0[N]から 12[N]の範囲で可変であるとした．

宇宙機の初期状態は，慣性系の $X$ 座標値に関して，$X >> 0$ とする操作を行ったと仮定し，

$$X_0=40[\mathrm{m}], \qquad \dot{X}_0=0.2[\mathrm{m/s}]$$

とした．また，$Y$ 座標の位置・速度と姿勢角に関しては，参照軌道とシミュレーションの初期値との間にずれがある状況を想定し，Table 2.2 のような初期値を設定した．また初期姿勢角速度は，いずれの場合でも $\dot{\theta}_0 = 0$ [rad/s]とした．

**Table 2.1** Physical parameters of the planar spacecraft

| | $m$ [kg] | $J$ [kgm] |
|---|---|---|
| Nominal model | 200 | 20 |
| Model with errors | 220 | 15 |

**Table 2.2** Initial state of the numerical simulation

| | $Y_0$ [m] | $\dot{Y}_0$ [m/s] | $\theta_0$ [rad] |
|---|---|---|---|
| Reference case | -5.78 | 0.0 | 1.5 |
| Perturbed case | -5.5 | 0.1 | 1.4 |

参照軌道は，2.4 節の例に挙げたように，$q$=2 として，$u_1(\theta_r)$=1，$u_2(\theta_r)$=cos($\theta_r$ +0.2)で構成した．その結果，姿勢角の履歴の式(2.36)と式(2.40)の $F_r$ を，次のように設定した．

$$\ddot{\theta}_r(t) = -3.0\theta_r(t) - 100\dot{\theta}_r(t)$$

$$F_r = 30\left\{1-\cos\left(\theta_r(t)-0.2\right)\right\}\left|\dot{\theta}_r(t)\right|$$

参照軌道への追従制御系と不変マニフォールド上での制御系としては，以下の 2 ケースを考えた．Case1 と Case2 は $Y$ 方向制御系のゲイン $K_{dY}$ のみが異なり，Case1 では $K_{dY}$ = 50，Case2 では $K_{dY}$ = 10 である．式(2.30)より，$K_{dY}$ は追従制御が安定である状態の範囲を定め，Case2 は追従制御の安定範囲が Case1 よりも狭い例となる．

Case1:

$$F_{yb} = 3.0\left(\theta_r(t)-\theta(t)\right)+5.0\left(\dot{\theta}_r(t)-\dot{\theta}(t)\right)-40\ddot{\theta}_r(t)$$

$$F_{xb} = \mathrm{sgn}\left(\sin\left(\theta(t)\right)\right)\left\{10\left(Y_r(t)-Y(t)\right)+50\left(\dot{Y}_r(t)-\dot{Y}(t)\right)\right\}-20\left|\dot{\theta}_r(t)\right|$$

Case2:

$$F_{yb} = 3.0\left(\theta_r(t) - \theta(t)\right) + 5.0\left(\dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}(t)\right) - 40\ddot{\theta}_r(t)$$

$$F_{xb} = \mathrm{sgn}\left(\sin\left(\theta(t)\right)\right)\left\{10\left(Y_r(t) - Y(t)\right) + 10\left(\dot{Y}_r(t) - \dot{Y}(t)\right)\right\} - 20\left|\dot{\theta}_r(t)\right|$$

また比較のために，参照軌道への追従項を除いた，以下の制御系を Case 3 とした.

Case3:

$$F_{yb} = \gamma J\ddot{\theta}_r(t) = -39.95\left(-3.0\theta(t) - 100\dot{\theta}(t)\right)$$

$$\begin{aligned} F_{xb} &= F_r + \left|F_{yb}\cot\left(a_1\right)\right| \\ &= 30\left\{1 - \cos\left(\theta(t) - 0.2\right)\right\}\left|\dot{\theta}(t)\right| - 20\left|\dot{\theta}(t)\right| + \left|F_{yb}\cot\left(a_1\right)\right| \end{aligned}$$

### 2.5.2 シミュレーション結果

Fig.2.6～Fig.2.8 にシミュレーションの結果を示す．Fig.2.6 は *X*-*Y* 平面における宇宙機の位置の軌跡，Fig.2.7 は $\theta$ の時間履歴，Fig.2.8 はスラスター出力の時間履歴をあらわす.

参照軌道への追従制御を用いない Case3 では，姿勢角 $\theta$ は目標点へ到達するものの（Fig. 2.7），*Y* 座標は不変マニフォールドへ到達しない（Fig.2.6）．同様に Case2 でも姿勢角 $\theta$ は目標点へ収束するものの，*Y* 座標は 0 近傍で *Y* 座標値は不安定な挙動を示し，不変マニフォールドへの状態遷移が行えていない．これは，$K_{dY}$ の大きさが不適切であり，*Y* 座標値が 0 近傍で追従制御系が安定な領域から状態が外れてしまったことが原因である．これらに対して Case1 では，制御系が有効に働き，状態は不変マニフォールドへ遷移した後に不変マニフォールド上をスライドして原点へ収束している．また，Fig.2.8(a)，(b)よりスラスター出力は 0[N]から 12[N]の間に収まっており，Unilateral なスラスターの入力拘束は満たされていることに着目されたい.

以上の結果より，提案手法は質量と慣性モーメントが不確かなモデルに対し，入力拘束を満たして全ての状態量を目標値である 0 へ制御できることが示された．Case2 のように制御系が有効である状態の範囲から外れれば目標値への制御は不可能となるが，想定されるモデル化誤差に応じて $K_{dY}$ を十分に大きく設定すればこのような問題を回避できる.

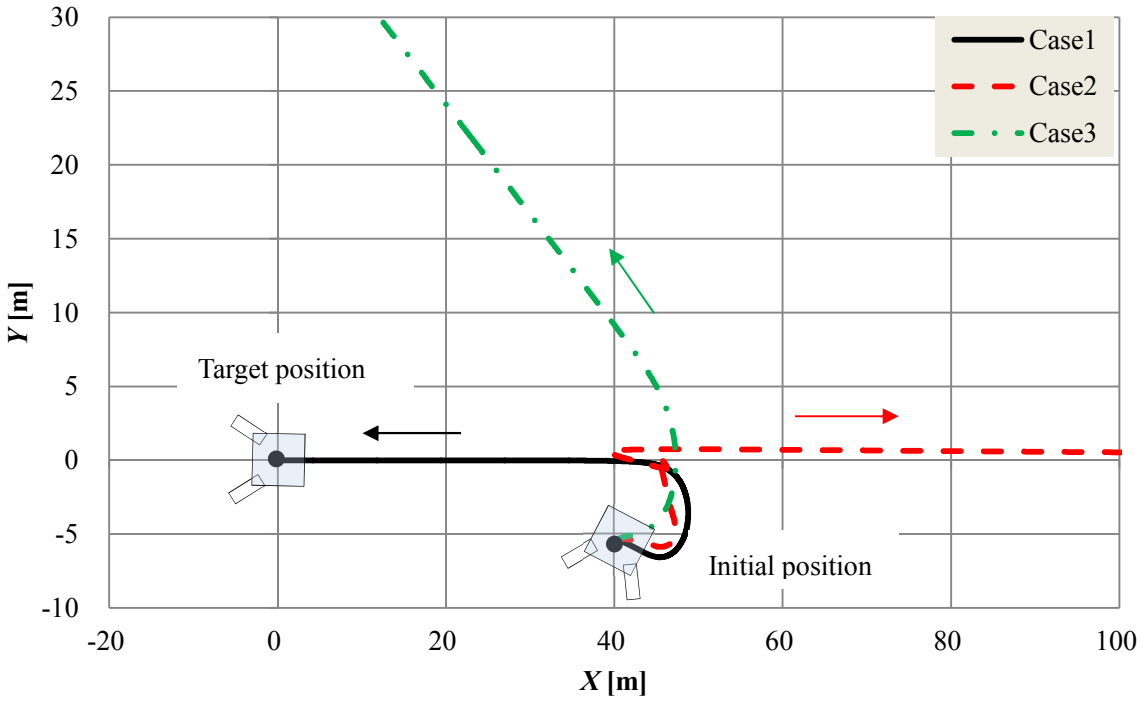



**Fig.2.6** Trajectory on a *X*-*Y* plane

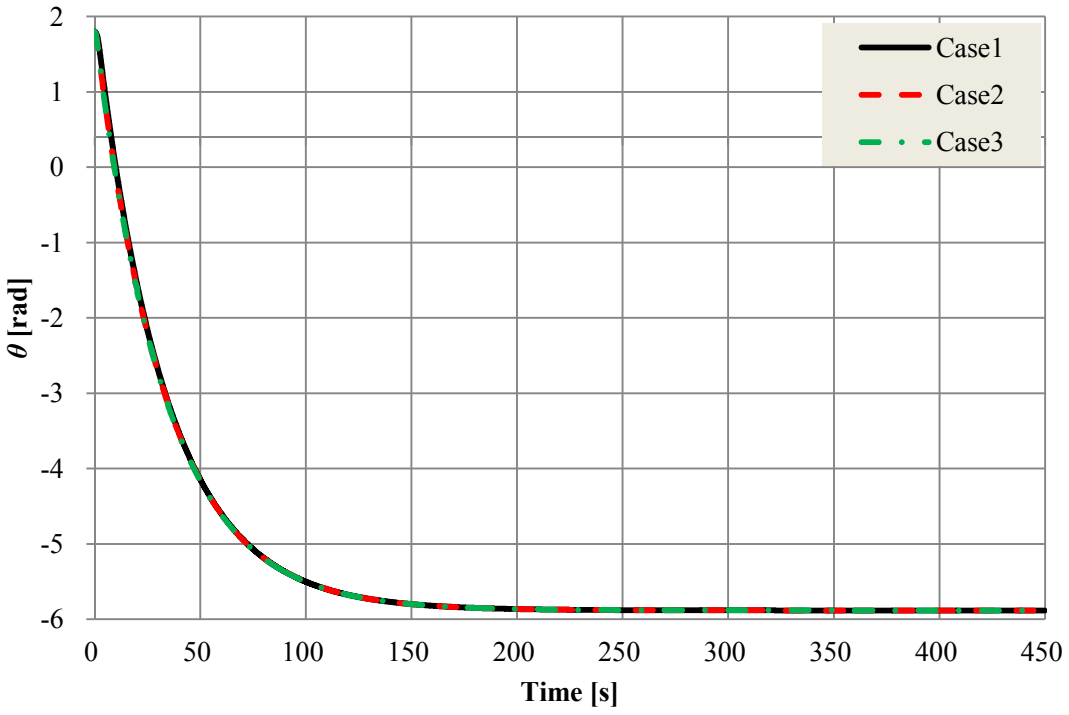
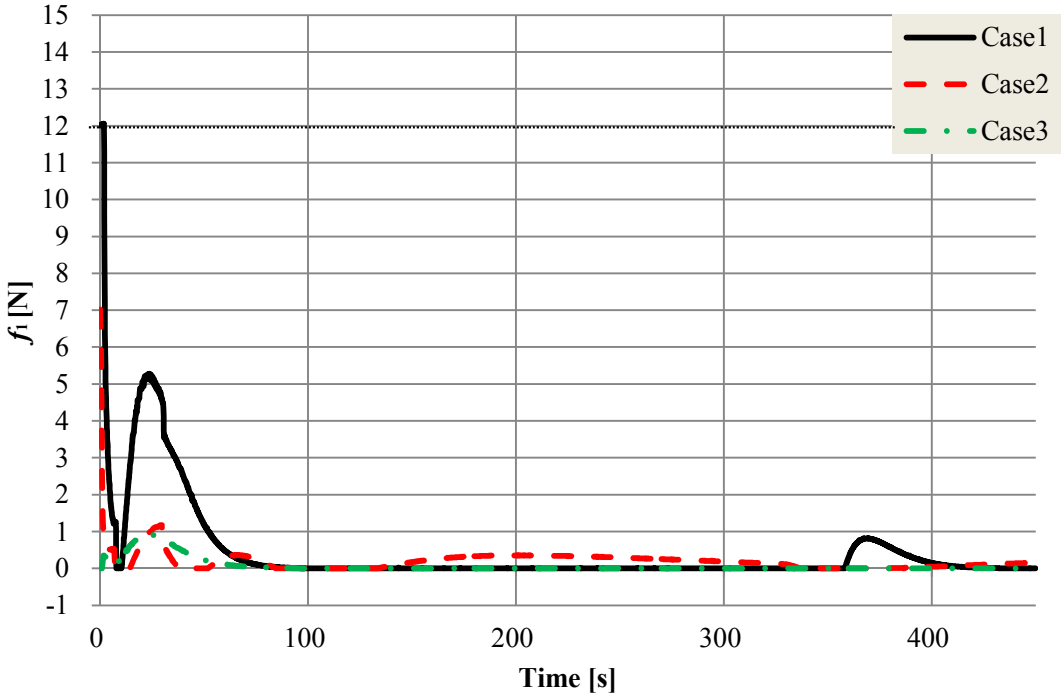
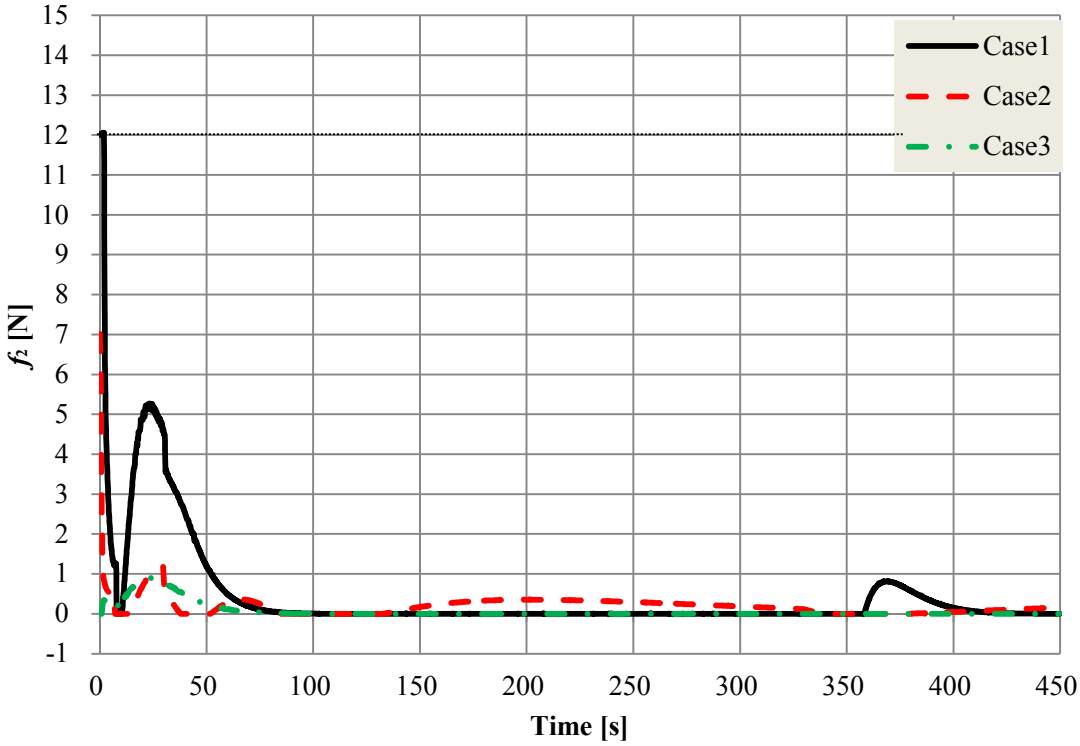



**Fig.2.7** Time history of an attitude angle




(a) Thruster1




(b) Thruster2

**Fig.2.8** Time history of thruster forces

## 2．6　2 章のまとめと課題

本章では，2 基のスラスターを有する劣駆動な宇宙機の 2 次元運動を取り扱い，不変マニフォールドを用いた状態フィードバックによる姿勢・位置制御手法を提案した．ここでは，スラスターの方向は宇宙機本体に固定されており，その推力は正の範囲で可変であることを仮定した．提案手法は Lyapunov の第 2 定理に基づく参照軌道追従制御を用いて，状態を不変マニフォールドへ遷移させる．本章では，宇宙機の質量と慣性モーメントに対し，モデル化誤差に対する許容範囲を解析的に示した．また，参照軌道の設計法を示した．さらに，それらの有効性を数値シミュレーションにより検証した．

なお，自由浮遊状態を仮定したが，宇宙機は実際には何らかの軌道上にあるため，その運動制御には重力や慣性力の影響も考慮しなければならない．これらの影響を補償できるスラスターが別途備えられる場合は，本章の手法がそのまま適用できる．そうでない場合は，不変マニフォールドの形状と参照軌道に対し，重力や慣性力を考慮した設計が必要である．この検討は今後の課題としたい．

# 3 章　2 基のスラスターによる 2 次元劣駆動宇宙機の制御（ON/OFF 入力）

## 3．1　はじめに

本章では 2 章の発展として，スラスター推力が正の固定値（ON/OFF 入力）である 2 次元宇宙機の姿勢・位置制御を取り扱う．2 章と同様に，宇宙機は 2 基の方向が固定されたスラスターを備えており，劣駆動である．ON/OFF 入力のために，本章に示す制御手法では，2 章に示した追従制御のような連続的な状態フィードバックはできない．よって，制御器としてのロバスト性は劣る．しかしながら，現在の一般的な化学推進・電気推進エンジンの推力は固定値であるから，本章で検討する制御手法の適用範囲は 2 章のものよりも広い．

本章では，2 基のスラスター推力が発生するトルクが釣り合う場合と釣り合わない場合のそれぞれに対して，不変マニフォールドを用いた制御手法を検討する．スラスター推力が ON/OFF である場合はトルクが釣り合わないことが一般的であるが，全てのケースにおいて制御手法を用意する必要があると考え，ここではトルクが釣り合う場合についても議論する．トルクが釣り合う場合は，2 基のスラスターを同時に駆動することで回転トルクを伴わずに並進力のみを発生させることができる．一方で，トルクが釣り合わない場合は，並進力に伴って必ず回転トルクが生じる．制御問題としての取り扱いは，後者が格段に難しい．

以下では，まず宇宙機のモデルについて述べる．章中に示す数式の簡略化のため，2 章の 2.2 節で示したモデルの定義に若干の変更を加える．続いて，トルクが釣り合う場合の制御手法について示す．トルクが釣り合わない場合に対しては問題の取扱いが簡単であり，いくつかの開ループ制御手法が提案されている[39，40]．よって，ここでは開ループ制御手法の発展として質量や慣性モーメントのモデルパラメータにロバストな制御手法を提案する．その後にトルクが釣り合わない場合の制御手法を示す．後者では，複数のマニフォールドを用い，これらを次々に遷移することで宇宙機の姿勢と位置を目標状態とする制御手法を新たに提案する[*2)]．さらに，これらの 2 つの制御手法に対し数値シミュレーションによりその有効性を検証する．各手法の説明の後にシミュレーションの結果を示す．最後にまとめと今後の課題を述べる．

なお，本章と同様のテーマを扱った[39，40]を除けば ON/OFF 入力の劣駆動システムに対する制御手法の検討はこれまでにほとんどなされておらず，劣駆動宇宙機の姿勢制御において固定トルクを取り扱った報告がなされているのみであった[24]．本章は，劣駆動宇宙機に限らず，ON/OFF 入力の劣駆動システムを制御する上での基礎的な指針を与えるものであることを付記しておきたい．

*2)　提案手法は文献[41]にて報告した．

## 3．2　宇宙機のモデル（スラスター推力固定）

議論を簡単にするために，本章で取り扱うモデルでは，2 章に示した宇宙機の座標系に対し，異なる機体固定座標系の定義を用いる．2 章では回転トルクを伴わずに並進力のみを出力できる座標を基準に機体固定座標系 $x_b$，$y_b$ を定義した．これに対し，本章では $x_b$ を 2 つのスラスターの方向ベクトルを二等分する方向とする（Fig.3.1 参照）．Fig.3.1 において，$x_b$ を 2 つのスラスターベクトルの 2 等分線の方向と定義するので，$\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$ とすることができる．

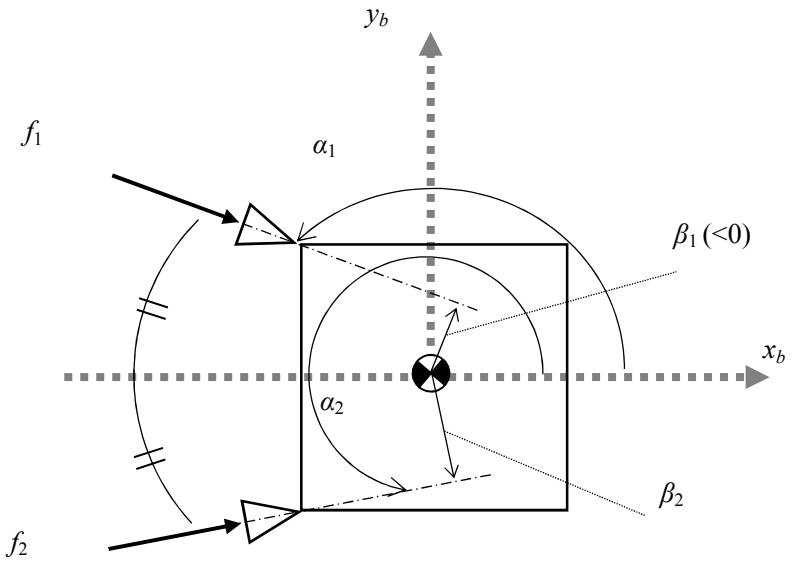



**Fig.3.1** Definition of a body fixed frame

$\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$ のもとに，$F_{xb}$，$F_{yb}$ の表記は 2.2 節よりも簡略化された，以下のようなものとなる．

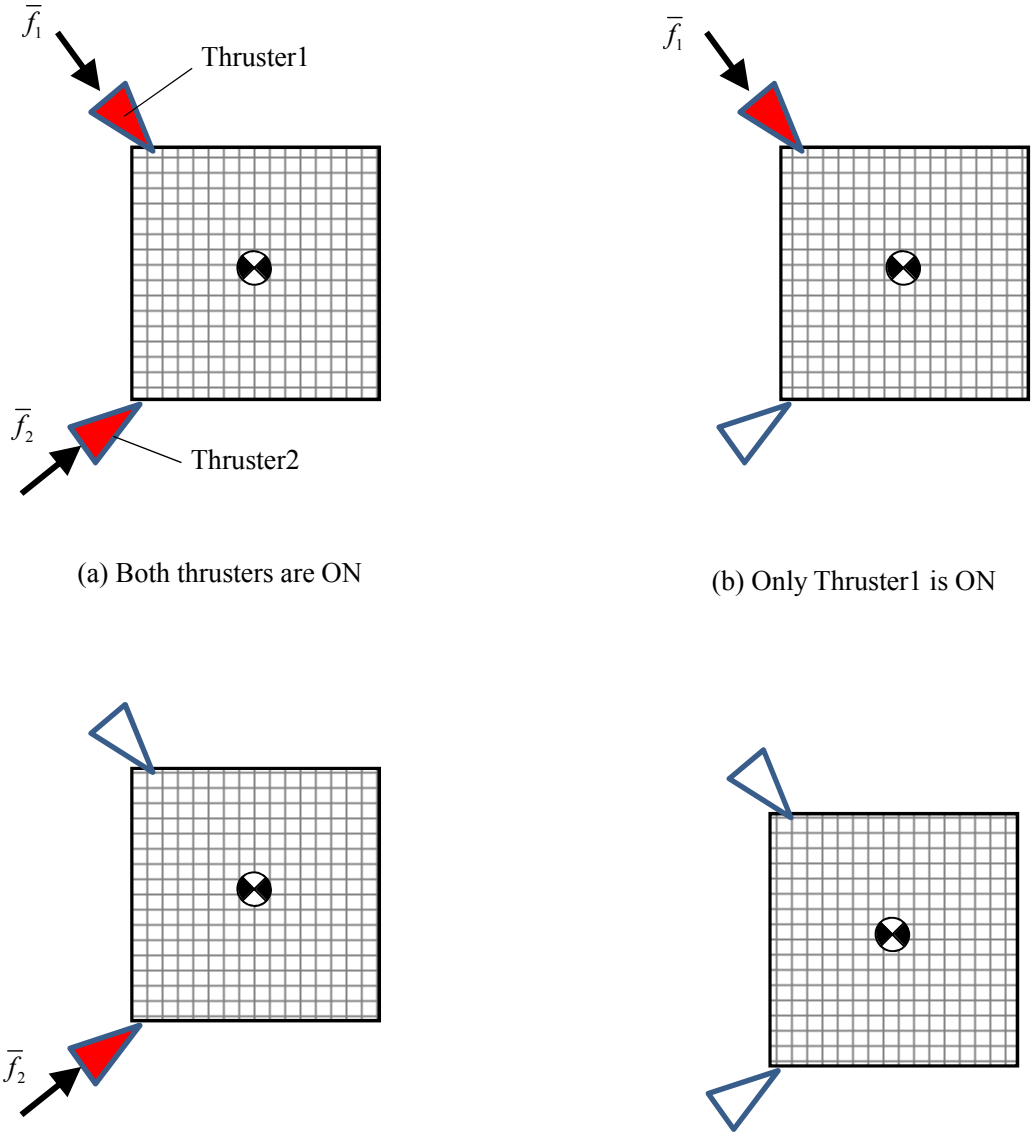
$$F_{xb} = -\left(f_1 + f_2\right)\cos\alpha_1 \tag{3.1}$$

$$F_{yb} = -\left(f_1 - f_2\right)\sin\alpha_1 \tag{3.2}$$

$$T = f_1\beta_1 + f_2\beta_2 \tag{3.3}$$

スラスター推力は 0，または，$\bar{f}_i$ ($i$=1or2)の 2 通りとする．スラスターON/OFF の切り替え時間は無限小とし，弁の開閉時のダイナミクスやタンク圧変化に伴うスラスター力の時間非線形性はないとする．さらに，宇宙機の位置，速度，姿勢は誤差なく取得できるとする．

また，スラスターが ON/OFF 入力の場合，宇宙機のマニューバは Fig.3.2 に示す 4 通りとなる．各スラスターが発生するトルクが釣り合う，すなわち，$\bar{f}_1\beta_1 + \bar{f}_2\beta_2 = 0$ であればスラスター2 基を同時に駆動する Fig.3.2(a)のマニューバにおいて回転トルクを伴わずに並進力が得られる．ただし，$\bar{f}_1\beta_1 + \bar{f}_2\beta_2 = 0$ はかなり限定されたスラスターの条件であり，一般的には $\bar{f}_1\beta_1 + \bar{f}_2\beta_2 \neq 0$ である．$\bar{f}_1\beta_1 + \bar{f}_2\beta_2 \neq 0$ であれば，スラスターを駆動しないマニューバである Fig.3.2(d)を除き，全てのマニューバにおいて回転トルクが発生する．




(a) Both thrusters are ON

(b) Only Thruster1 is ON

(c) Only Thruster2 is ON

(d) Both thrusters are OFF

**Fig.3.2** Four types of maneuvers for an ON/OFF input spacecraft

## 3．3　トルクが釣り合う場合の制御系

以下では，$\bar{f}_1\beta_1 + \bar{f}_2\beta_2 = 0$ である場合の制御系を設計する．

$\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$ となるように $x_b$ を定義したため，2 章と異なり，一般性を失うことなく $x_b$ ($y_b$) 方向が $X$ ($Y$)に一致する慣性座標系を定義できない．よって，慣性座標系に対して任意の目標姿勢を定める必要がある．しかしながら，2 章で述べたように姿勢の制御は比較的容易であるから，簡単のためにここでは目標姿勢を $\theta=2n\pi$($n$ は任意の整数)とする．目標位置は 2 章と同様に一般性をもって慣性系の原点とする．

### 3.3.1　制御ストラテジー

2 章と同様に，本節においても不変マニフォールドを用いる切り替え制御を検討する．2 章と異なり，目標姿勢において $x_b$ ($y_b$)方向が $X$ ($Y$)に一致しないため，Fig.3.3 に示すように傾き角度$\phi$の直線を不変マニフォールドとする．このような不変マニフォールドは以下の式(3.4)により表される．

$$Y\cos(\phi) - X\sin(\phi) = 0 \tag{3.4}$$

また，式(3.4)の不変マニフォールドに宇宙機が拘束されるためには，宇宙機の並進速度が直線に沿わなければならない．このためには，宇宙機の並進速度は以下の式(3.5)を満たす必要がある．

$$\dot{Y}\cos(\phi) - \dot{X}\sin(\phi) = 0 \tag{3.5}$$

$\phi$は宇宙機が目標姿勢の状態でスラスター2 基を同時に駆動して発生する並進力の方向である．$\bar{f}_1\beta_1 + \bar{f}_2\beta_2 = 0$ より，スラスター2 基を同時に駆動する場合の宇宙機は回転トルクを伴わずに並進力を発生する．よって，不変マニフォールドに宇宙機が遷移した後は Fig.3.2(a) のマニューバにより，宇宙機は不変マニフォールドから外れることなく減速が可能である．$\phi$は各スラスター推力の $X$，$Y$ 成分より以下のように求められる．

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\bar{f}_1 - \bar{f}_2}{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}\tan(\alpha_1)\right) \tag{3.6}$$

なお，スラスター推力の Unilateral な拘束より不変マニフォールドは $X$ が正の範囲の直線部となり，$\dot{X}$も負でなければならない．これらを満たすために，2 章と同様に $X$>>0，$\dot{X}$<0 とする操作を事前に行うことを仮定する．

不変マニフォールドへの遷移に際しては，Fig.3.2 に示した 4 つのマニューバを組み合わせて特定のスラスター駆動パターンを作成し，その切り替えタイミングを調整する．ここでは宇宙機の姿勢・位置の状態量に応じた切り替えタイミングとすることで，宇宙機の質量や慣性モーメントに対してロバストな制御系を考える．

以下，不変マニフォールドへ遷移する制御を設計し，その有効性を数値シミュレーションにより示す．不変マニフォールド遷移後については Fig.3.2(a)のマニューバにより単純に減速するだけであるため，その説明は省略する．

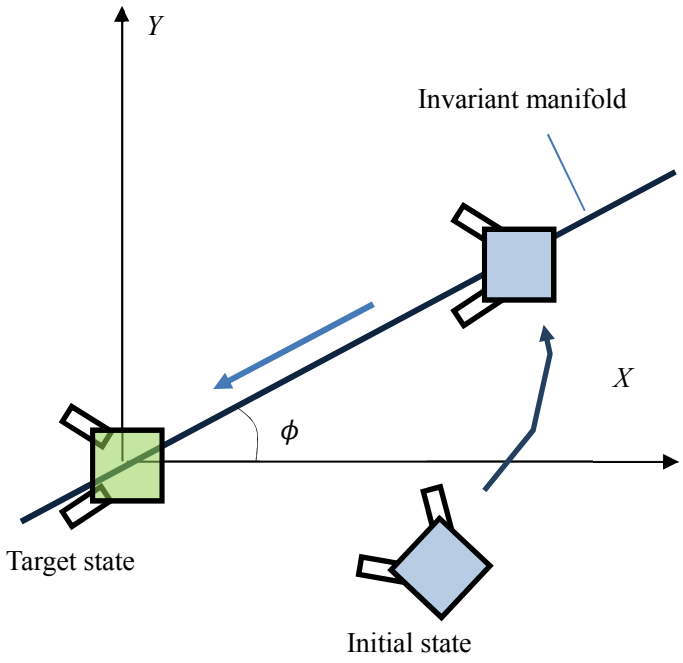



**Fig.3.3** Strategy for position and attitude control using an invariant manifold

### 3.3.2　制御系の設計

本節で示す制御手法は Fig.3.4 に示す 4 つのステップで構成される．Step1 ではスラスターを片方駆動し，宇宙機に並進と回転の運動量を与える．Step1 は最終ステップである Step4 と対となっており，ここで得た回転運動は Step4 において目標姿勢で停止される．Step1 に続く Step2 では 2 基のスラスターを駆動し，宇宙機の並進速度を調整する．2 基のスラスター推力が発生するトルクが釣り合うので，ここでは回転運動に影響を与えない．Step2 での速度の調整は， Step4 の後の並進速度が不変マニフォールドに沿う，すなわち，式(3.5)を満たすようにする．さらに Step3 ではスラスター2 基を駆動して宇宙機の位置の調整を行う．並進速度の変動を相殺する対となるスラスター駆動のパターンにより，Step4 後に宇宙機の

位置が不変マニフォールドの条件である式(3.4)を満たすように調整する． Step2 と Step3 のマニューバの結果，Step4 後は不変マニフォールドである直線上を宇宙機が目標姿勢でドリフトしている状態となる．

これらの 4 つのステップの切り替えタイミングにはステップごとの宇宙機の姿勢・位置を用いる．これにより，本節で示す制御系では宇宙機の質量や慣性モーメントのモデル化誤差に対してロバストとなる．

なお，議論を簡単にするべく，以降では Step1 を開始する際の初期姿勢角速度 $\dot{\theta}(0) = 0$ を仮定する．

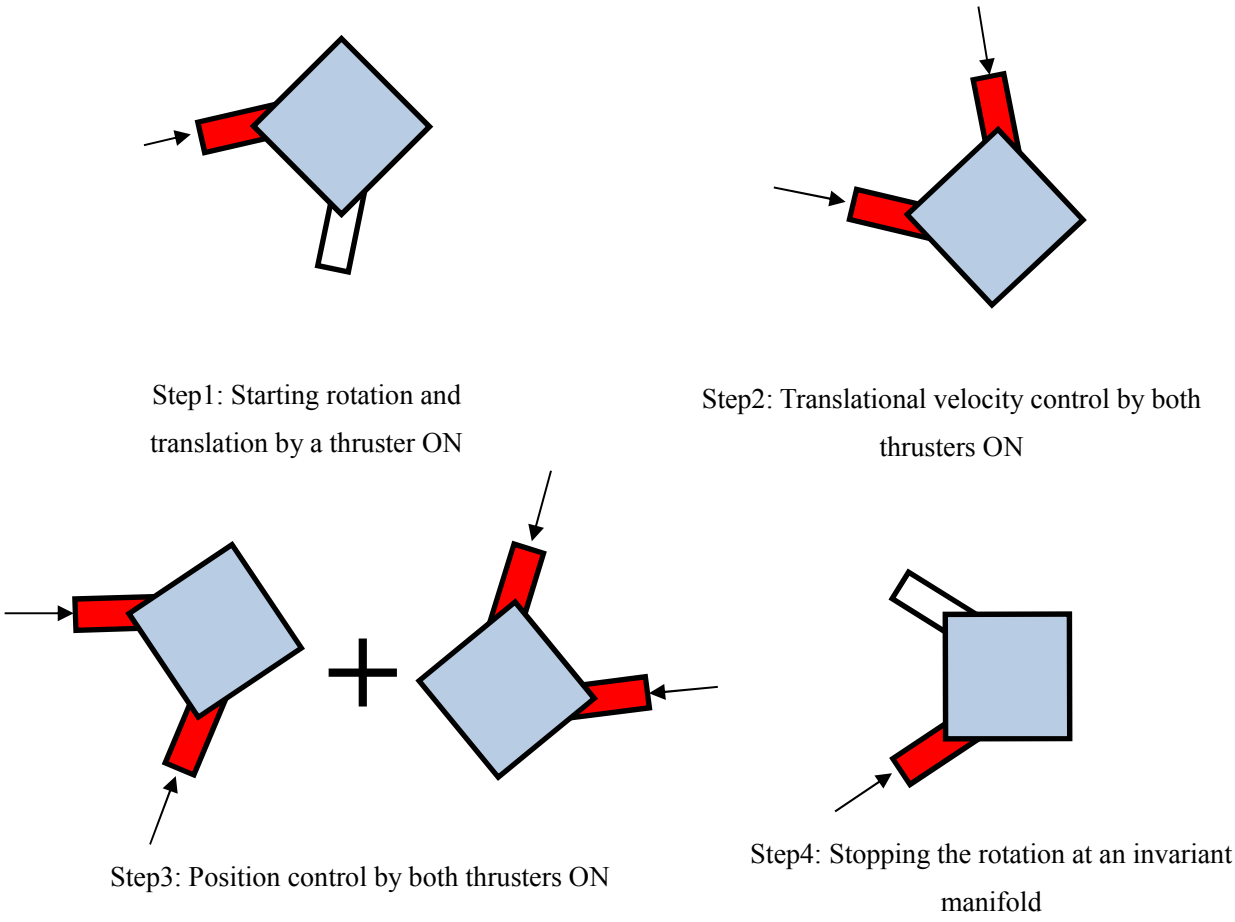



**Fig.3.4** Four step control to the invariant manifold

**(a) Step1 と Step4：回転の開始と停止**　Step1 では 2 基のうちのいずれか 1 基のスラスターを駆動し，機体に並進と回転の運動量を与える．続く，Step2 と Step3 は回転運動に影響を及ぼさないため，Step1 で発生した回転運動は Step4 において静止される．よって，ここではStep4 についても述べる．姿勢角が $\Delta\Theta$ 変動する間スラスター1 基を駆動し続けるとして，以下のように Step1 と Step4 の入力を設定する．ここで，$\Delta\Theta$ は制御系の設計パラメータとなる．

Step1:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad \theta(0) \le \theta(t) \le \theta(0) + \Delta\Theta \tag{3.7}$$

Step4:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad 2\pi n - \Delta\Theta \le \theta(t) \le 2\pi n \tag{3.8}$$

なお，議論を簡単にするため，式(3.7)と(3.8)では Step1 でスラスター1 を駆動し，Step4 でスラスター2 を駆動することを仮定した．この順序は逆であっても構わない．

Step1 の式(3.7)と Step4 の式(3.8)において，宇宙機に加わる回転運動量の絶対値は等しい．これは 2 基のスラスターが発生する回転トルクが釣り合うことから明らかである．よって，Step4 終了後には必ず姿勢角速度は 0 となる．この制御アルゴリズムは，宇宙機の姿勢角に応じてスラスターの ON と OFF を判定するだけであるから，慣性モーメントのパラメータを必要としない．

**(b) Step2：並進速度の調整**　Step2 ではスラスター2 基を同時に駆動することで，宇宙機の回転運動に影響を与えずに並進速度を調整する．これにより，Step4 後の宇宙機の並進速度を不変マニフォールドである直線に沿った方向とする．当然，このマニューバにより宇宙機の位置も変動するが，これは続く Step3 において調整される．

まず，Step4 後の並進速度を求める．Step4 では Step1 と同じ時間だけスラスターを駆動し，その際の姿勢角の変動も Step1 と同じである．Step1 と Step4 の違いはスラスター推力の違いだけであるから，Step4 の並進速さ（スカラー量）の増分は Step1 の並進速さの増分に 2 基のスラスター推力の比率 $\bar{f}_2/\bar{f}_1$ を乗じたものとなる．これに宇宙機の姿勢に応じた回転行列を乗じれば，Step1 の並進速度増分から Step4 の並進速度増分を得ることができる．初期並進速度を $\dot{X}_0$，$\dot{Y}_0$，Step1 終了後の並進速度を $\dot{X}_1$，$\dot{Y}_1$，Step2 を開始してからの時間を $t^{(2)}$，Step2 中で $t^{(2)}$までに生じた並進速度増分を $\Delta\dot{X}_2(t^{(2)})$，$\Delta\dot{Y}_2(t^{(2)})$とおけば，$\dot{X}_1$，$\dot{Y}_1$ により Step4 後の並進速度 $\dot{X}_4$，$\dot{Y}_4$ は以下のように表される．

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_4 \\ \dot{Y}_4 \end{bmatrix} = \frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_1} \mathbf{A}(\Delta\theta_{41}) \left( \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\dot{X}_2\left(t^{(2)}\right) \\ \Delta\dot{Y}_2\left(t^{(2)}\right) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

ここで，Step1 においてスラスター1 を駆動することを仮定した．Step1 と Step4 におけるスラスター駆動の順序が逆となる場合は，式(3.9)中の $\bar{f}_1$ と $\bar{f}_2$ を入れ替えればよい．また，**A(•)** は回転行列であり，$\Delta\theta_{41}$ は Step1 開始時のスラスター1 の推力ベクトルと Step4 開始時のス

ラスター2 の推力ベクトルがなす角度である．$\Delta\theta_{41}=(2\pi n-\Delta\Theta+\alpha_2)-(\theta_0+\alpha_2)$であるから，$\mathbf{A}(\Delta\theta_{41})$は以下のように表される．

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\left(\Delta\theta_{41}\right)&=\begin{bmatrix}\cos\left\{\left(2\pi n-\Delta\Theta+\alpha_2\right)-\left(\theta_0+\alpha_1\right)\right\} & -\sin\left\{\left(2\pi n-\Delta\Theta+\alpha_2\right)-\left(\theta_0+\alpha_1\right)\right\}\\ \sin\left\{\left(2\pi n-\Delta\Theta+\alpha_2\right)-\left(\theta_0+\alpha_1\right)\right\} & \cos\left\{\left(2\pi n-\Delta\Theta+\alpha_2\right)-\left(\theta_0+\alpha_1\right)\right\}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos\left(\theta_0+\Delta\Theta+2\alpha_1\right) & \sin\left(\theta_0+\Delta\Theta+2\alpha_1\right)\\ -\sin\left(\theta_0+\Delta\Theta+2\alpha_1\right) & \cos\left(\theta_0+\Delta\Theta+2\alpha_1\right)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.10}$$

一般的な開ループ制御であれば Step4 後の並進速度は数値積分や近似計算により求めることが多い．これに代わり，本項の制御系では，Step2 開始時点で既知である Step1 後の並進速度・姿勢角の変化，および，Step2 中の並進速度の変動から Step4 後の並進速度を求める．これにより，宇宙機の質量や慣性モーメントのパラメータを用いずに Step4 後の並進速度の導出することができる．

Step4 後に宇宙機が不変マニフォールドに沿う並進速度となるべく，Step2 では$\dot{X}_4$，$\dot{Y}_4$が不変マニフォールド上の速度の条件式(3.5)を満たすような$\Delta\dot{X}_2(t^{(2)})$, $\Delta\dot{Y}_2(t^{(2)})$を得る．このためには，以下の関数 $V_D$ が 0 となる入力を加える．

$$V_D=\frac{1}{2}\left(\dot{Y}_4\cos\left(\phi\right)-\dot{X}_4\sin\left(\phi\right)\right)^2\tag{3.11}$$

$V_D$ の時間微分は，

$$\begin{aligned}\dot{V}_D&=\left(\dot{Y}_4\cos\left(\phi\right)-\dot{X}_4\sin\left(\phi\right)\right)\left(\ddot{Y}_4\cos\left(\phi\right)-\ddot{X}_4\sin\left(\phi\right)\right)\\&=\frac{\dot{Y}_4\cos\left(\phi\right)-\dot{X}_4\sin\left(\phi\right)}{m}\Big[\cos\left(\phi\right)\left\{-\overline{f}_1\sin\left(\theta(t)+\alpha_1\right)+\overline{f}_2\sin\left(\theta(t)-\alpha_1\right)\right\}\\&\qquad-\sin\phi\left(-\overline{f}_1\cos\left(\theta(t)+\alpha_1\right)+\overline{f}_2\cos\left(\theta(t)-\alpha_1\right)\right)\Big]\end{aligned}\tag{3.12}$$

であるから，これが負となる姿勢角においてスラスター2 基を駆動すれば $V_D$ は 0 へ漸近する．式(3.12)は宇宙機の質量を含むが，式(3.12)は単純に正・負を判定するのみであるから，質量の値が正確である必要はない．また，Step2 において宇宙機は回転しており，姿勢角は常に変動しているので $V_D$ の時間微分が負となるタイミングは必ず存在する．$V_D$ が 0 となった時点でスラスターを OFF とし，Step2 は終了となる．

以上の制御系をまとめれば，Step2 における入力は以下のようになる．

Step2:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} \quad \text{for } \dot{V}_D \le 0,\ V_D \ne 0 \tag{3.13}$$

なお, 不変マニフォールド上では$\dot{X}_4 < 0$も満たされなければならない. 3.2 節では事前に$\dot{X}$を負とする操作を仮定したが，Step1 から Step4 を通して$\dot{X}$が正となるマニューバは避けなければならない．よって，式(3.12)の入力のタイミングに対し，$X$ 方向の並進力が負となる条件を加えることが望ましい.

**(c) Step3：位置の調整**　Step3 では宇宙機の位置の調整を行う．回転運動に影響を与えず，かつ，Step2 で調整した並進速度増分にも影響を与えないようなマニューバにより，Step4 完了後の宇宙機の位置を不変マニフォールド上に一致させる.

前述のようにスラスター2 基を同時に駆動すれば回転運動に影響を与えない．そこで，スラスターを 2 基同時に駆動するパターンを組み合わせ，このパターンにおける並進速度の増分を 0 とすることを考える．このパターンの組み合わせにより，回転運動と並進速度に影響を与えず，宇宙機の位置のみを調整することができる.

このようなパターンの組み合わせで最も簡単なものは, 1 回目マニューバとしてある姿勢角増分の間スラスターを 2 基駆動し, 2 回目のマニューバとして宇宙機が 180°反転した後に再び同じ姿勢角増分の間スラスターを 2 基同時に駆動するものである．同じ時間，同じ姿勢角増分の間，同じ推力を宇宙機に加えるので，その方向を除いて 1 回目と 2 回目のマニューバで宇宙機に加わる運動量は同じである．よって，1 回目と 2 回目で宇宙機の姿勢角が 180°異なれば，これら 2 回のマニューバによる並進速度の変動は 0 となる．1 回目のマニューバにおける初期姿勢を$\theta_{30}$とおき，スラスター2 基を駆動し続ける姿勢角変動量を$\Delta\Theta_T$とおけば，このような 2 回のマニューバは以下の式(3.14)と(3.15)で表される.

1 回目のマニューバ：

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} \quad \text{for } \theta_{30} \le \theta(t) \le \theta_{30} + \Delta\Theta_T \tag{3.14}$$

2 回目のマニューバ：

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} \quad \text{for } \theta_{30} + \pi + 2\pi N \le \theta(t) \le \theta_{30} + \pi + 2\pi N + \Delta\Theta_T \tag{3.15}$$

ここで，$N$ は任意の整数である．$N$，$\theta_{30}$，および，$\Delta\Theta_T$ が Step3 におけるマニューバのパラメータとなり，これらを変更することで宇宙機の位置変動を調整できる．

続いて，位置調整のために，Step4 後の宇宙機の位置を求める．Step2 の並進速度変動の場合と同様に，Step1，Step2 後の位置と並進速度，および Step3 の初期位置（1 回目のマニューバを開始する際の位置）を用いて Step4 後の位置を表す．Step4 では Step1 と同じ時間，同じ姿勢角増分の間だけスラスターを駆動し，スラスター推力の値だけが異なる．ゆえに，Step1 の初期速度による位置のドリフトを除けば，Step4 における宇宙機の移動距離は Step1 における移動距離に 2 基のスラスター推力の比率 $\bar{f}_2/\bar{f}_1$ を乗じたものとなる．したがって，Step4 における位置変動を求めるためには，初期速度のドリフトによる位置変動を除いて Step1 の移動距離を $\bar{f}_2/\bar{f}_1$ 倍し，さらに宇宙機の姿勢に応じた回転行列を乗じる．これに，Step3 初期から Step4 完了までのドリフトによる位置変動，および，Step3 中の 2 回のマニューバにより得る位置変動を加える．Step1 完了後の位置を $X_1$，$Y_1$，Step2 完了後の並進速度と位置を各 $\dot{X}_2$，$\dot{Y}_2$，$X_2$，$Y_2$，Step3 における位置変動を $\Delta X_3$，$\Delta Y_3$（ただし，$\dot{X}_2$，$\dot{Y}_2$ によるドリフトを除く）とおけば，Step4 後の宇宙機の位置 $X_4$，$Y_4$ は以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} X_4 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_1}\mathbf{A}\left(\Delta\theta_{41}\right)\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} - \tau_1\begin{bmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{bmatrix}\right) + \tau_{24}\begin{bmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_3 \\ \Delta Y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

ここで，$\tau_1$ は Step1 におけるスラスター駆動時間であり，Step3 開始の時点（1 回目のマニューバ開始の時点）で既知である．$\tau_{24}$ は Step2 完了後から Step4 完了までの時間である．Step1 完了後の角速度を $\dot{\theta}_1$，Step2 完了直後の姿勢角を $\theta_2$ として，$\tau_{24}$ は以下のように表される．

$$\tau_{24} = \frac{2\pi n - \Delta\Theta - \theta_2}{\dot{\theta}_1} + \tau_1 \tag{3.17}$$

Step3 開始時点において，式(3.16)の $\Delta X_3$，$\Delta Y_3$ を除く項は全て既知である．$\Delta X_3$，$\Delta Y_3$ は，1 回目のマニューバによる位置変動量と 2 回目のマニューバ開始までのドリフト（$\dot{X}_2$，$\dot{Y}_2$ によるドリフト分は除く）量の和に 2 回目のマニューバによる位置変動を加算することで，以下の式(3.18)のように表される．なお，式(3.18)の導出においては，時間積分を姿勢角に関する積分に置換している．Step3 の間は角速度が $\dot{\theta}_1$ で一定であるから，$dt = d\theta/\dot{\theta}_1$ が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\Delta X_3\\ \Delta Y_3\end{bmatrix} &= \frac{1}{m}\left[\left\{\left(\frac{1}{\dot\theta_1}\right)^2\int_{\theta_{30}}^{\theta_{30}+\Delta\Theta_T}\int_{\theta_{30}}^{+\Delta\Theta_T}\begin{bmatrix}F_x\\F_y\end{bmatrix}d\theta d\theta\right\}+\left\{\frac{\pi+2\pi N-\Delta\Theta_T}{\dot\theta_1}\frac{1}{\dot\theta_1}\int_{\theta_{30}}^{\theta_{30}+\Delta\Theta_T}\begin{bmatrix}F_x\\F_y\end{bmatrix}d\theta\right\}\right.\\
&\qquad\left.+\left\{\left(\frac{1}{\dot\theta_1}\right)^2\int_{\theta_{30}+\pi+2\pi N}^{\theta_{30}+\pi+2\pi N+\Delta\Theta_T}\int_{\theta_{30}+\pi+2\pi N}^{\theta_{30}+\pi+2\pi N+\Delta\Theta_T}\begin{bmatrix}F_x\\F_y\end{bmatrix}d\theta d\theta+\left(\frac{\Delta\Theta_T}{\dot\theta_1}\right)\frac{1}{\dot\theta_1}\int_{\theta_{30}}^{\theta_{30}+\Delta\Theta_T}\begin{bmatrix}F_x\\F_y\end{bmatrix}d\theta\right\}\right]\\
&= \frac{\pi+2\pi N}{m\dot\theta_1^2}\int_{\theta_{30}}^{\theta_{30}+\Delta\Theta_T}\begin{bmatrix}F_x\\F_y\end{bmatrix}d\theta\\
&= \frac{\pi+2\pi N}{m\dot\theta_1^2}\begin{bmatrix}\bar f_1\left\{\sin(\theta_{30}+\alpha_1)-\sin(\theta_{30}+\Delta\Theta_T+\alpha_1)\right\}-\bar f_2\left\{\sin(\theta_{30}-\alpha_1)-\sin(\theta_{30}+\Delta\Theta_T-\alpha_1)\right\}\\ \bar f_1\left\{-\cos(\theta_{30}+\alpha_1)+\cos(\theta_{30}+\Delta\Theta_T+\alpha_1)\right\}+\bar f_2\left\{\cos(\theta_{30}-\alpha_1)-\cos(\theta_{30}+\Delta\Theta_T-\alpha_1)\right\}\end{bmatrix}\\
&= \frac{\pi+2\pi N}{m\dot\theta_1^2}\mathbf{A}(\theta_{30})\left(\mathbf{E}+\mathbf{A}(\Delta\Theta_T)\right)\begin{bmatrix}-\left(\bar f_1+\bar f_2\right)\sin(\alpha_1)\\-\left(\bar f_1-\bar f_2\right)\cos(\alpha_1)\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

ここで **E** は単位行列である．

$Y_4$，$X_4$ が不変マニフォールドの位置に関する条件式(3.4)を満たすように，$N$，$\theta_{30}$，$\Delta\Theta_T$ を定めれば Step3 の目的は達成される．このためには，まず， Step3 で必要な位置変動量 $\sqrt{\Delta X_3^2+\Delta Y_3^2}$ を式(3.16)より求め，$N$ と $\Delta\Theta_T$ を定める．式(3.18)より $\theta_{30}$ は Step3 における位置変動の方向のみに寄与するから，$N$ と $\Delta\Theta_T$ は容易に定めることが可能である．同時に，所望の位置変動方向を求めておき，これと一致するように $\theta_{30}$ を定める．$\Delta\Theta_T$ を定めた後であれば，$\theta_{30}$ は容易に定まる．

なお，式(3.17)はモデルパラメータである宇宙機の質量を含んでおり，上記の制御は質量のモデル化誤差の影響を受けてしまう．ただし，質量の誤差は単に宇宙機の位置変動量に線形に寄与するだけである．よって，2 回のマニューバの後に所望の位置変動が得られない場合は，式(3.16)より予測された位置変動ノルムと実際の位置変動ノルムの比を式(3.16)に乗じて補正する．補正された式(3.16)に基づいてもう一度 2 回のマニューバを行えば，モデル化誤差は解消されて所望の位置変動を得ることができる．

### 3.3.3 数値シミュレーション

3.3.2 項に示した制御系の有効性を確認するべく，以下の数値シミュレーションを行った．シミュレーションに用いたモデルパラメータを Table 3.1 に，初期状態を Table 3.2 に示す．Step3 を除いて制御系は質量と慣性モーメントを含まず，Step3 でもモデル化誤差の補正が容易であるため，ここでは，これらのモデル化誤差を考慮しなかった．

Table3.1 に示すように $\bar f_1=\bar f_2$ であるから，不変マニフォールドは$\phi=0$[rad]の直線となる．

**Table 3.1** Physical parameters for the simulation in 3.3.3

| $m$ [kg] | $J$[kgm] | $\overline{f}_1$ [N] | $\overline{f}_2$ [N] | $\alpha_1$ [rad] | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 20 | 5.0 | 5.0 | -0.75π | -0.3 | 0.3 |

**Table 3.2** Initial conditions for the simulation in 3.3.3

| $X(0)$ [m] | $Y(0)$ [m] | $\theta(0)$ [rad] | $\dot{X}(0)$ [m/s] | $\dot{Y}(0)$ [m/s] | $\dot{\theta}(0)$ [rad/s] |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | -20 | 0.8+5π | 0.0, | 0.0 | 0.0 |

制御系の設計パラメータは,

Step1，Step4: $\Delta\Theta = -0.01[rad]$

Step3: $\theta_{30} = \frac{5}{2}\pi$ [rad]， $\Delta\Theta_T = -0.328$ [rad]

とした.

また，不変マニフォールドへ宇宙機が到達した後は，スラスター2 基を同時に駆動して目標位置へ宇宙機を静止させた.

シミュレーションの結果を Fig.3.5～Fig.3.8 に示す. Fig.3.5 は宇宙機の位置の軌跡, Fig.3.6 は姿勢の履歴, Fig.3.7 は並進速度の履歴，そして，Fig.3.8 はスラスター推力の履歴である. Fig.3.5~Fig.3.7 より，提案手法が有効に働き，状態は目標（原点）へ遷移していることが確認できる． Fig.3.8(a)，(b)においてスラスター出力が 0.0，または，5.0 の ON/OFF 出力の条件を満たしていることに着目されたい.

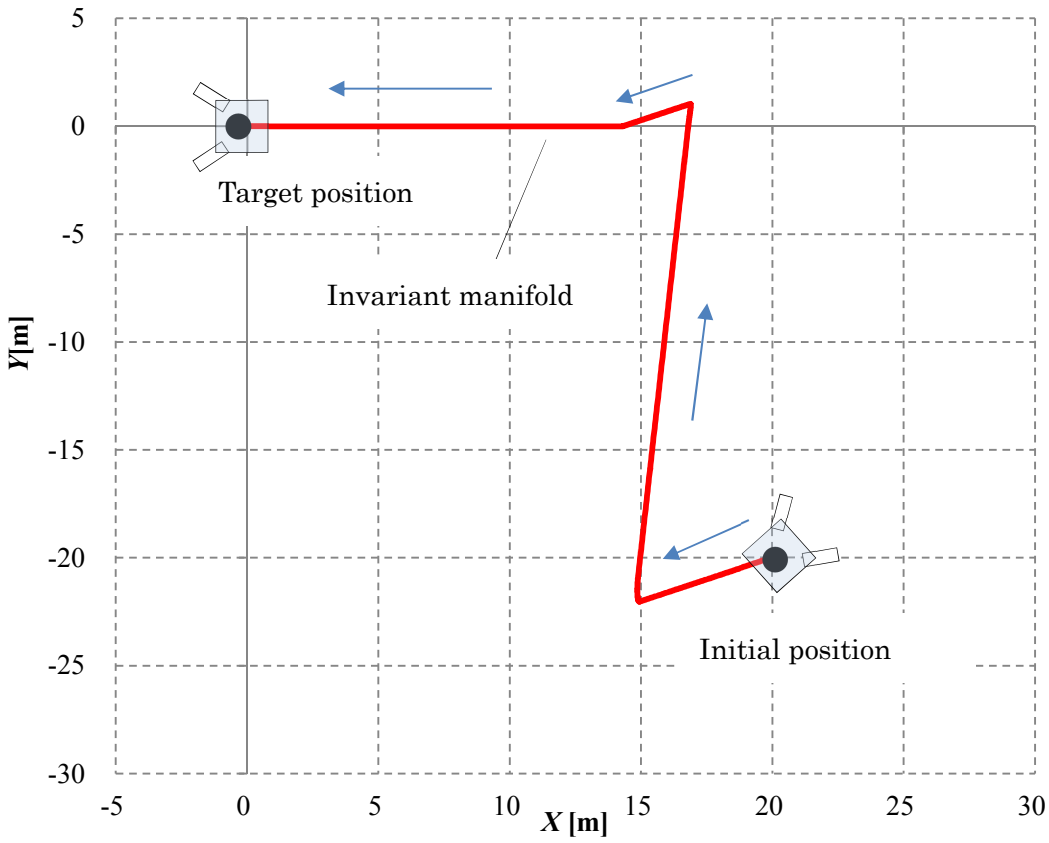



**Fig.3.5** Trajectory on a *X*-*Y* plane

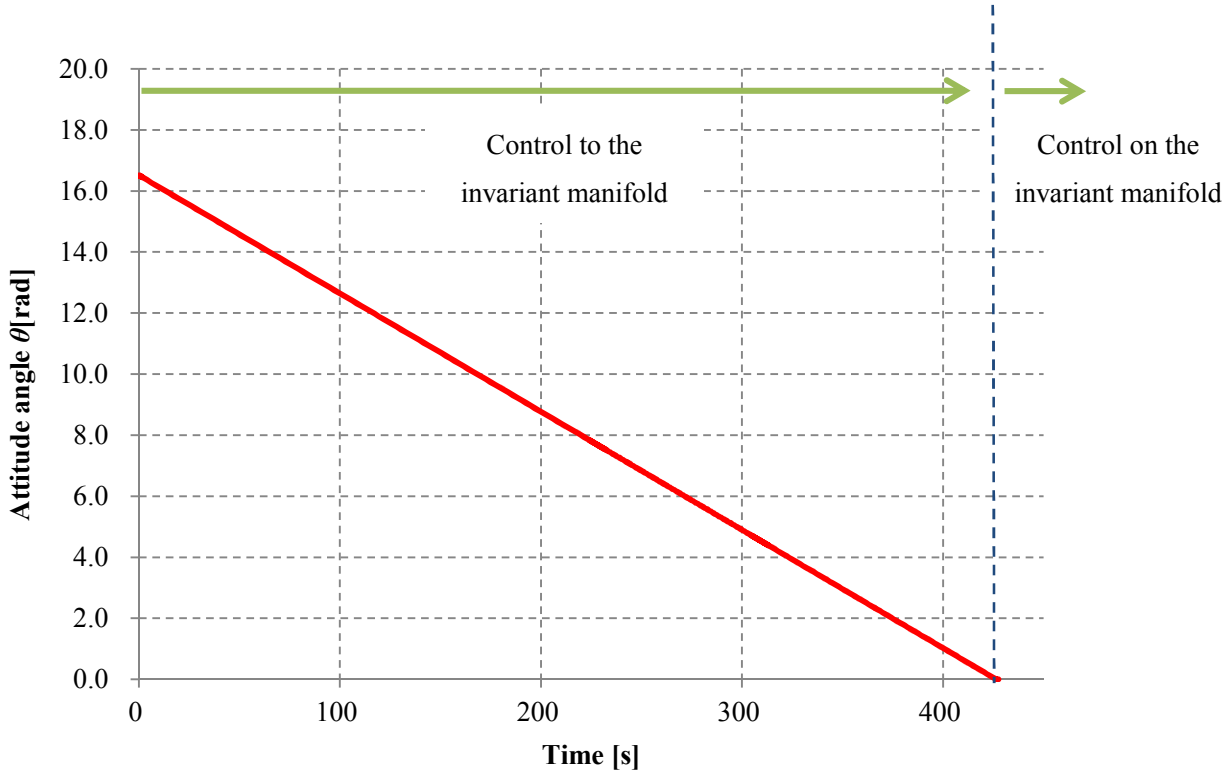



**Fig.3.6** Time history of attitude angle $\theta$

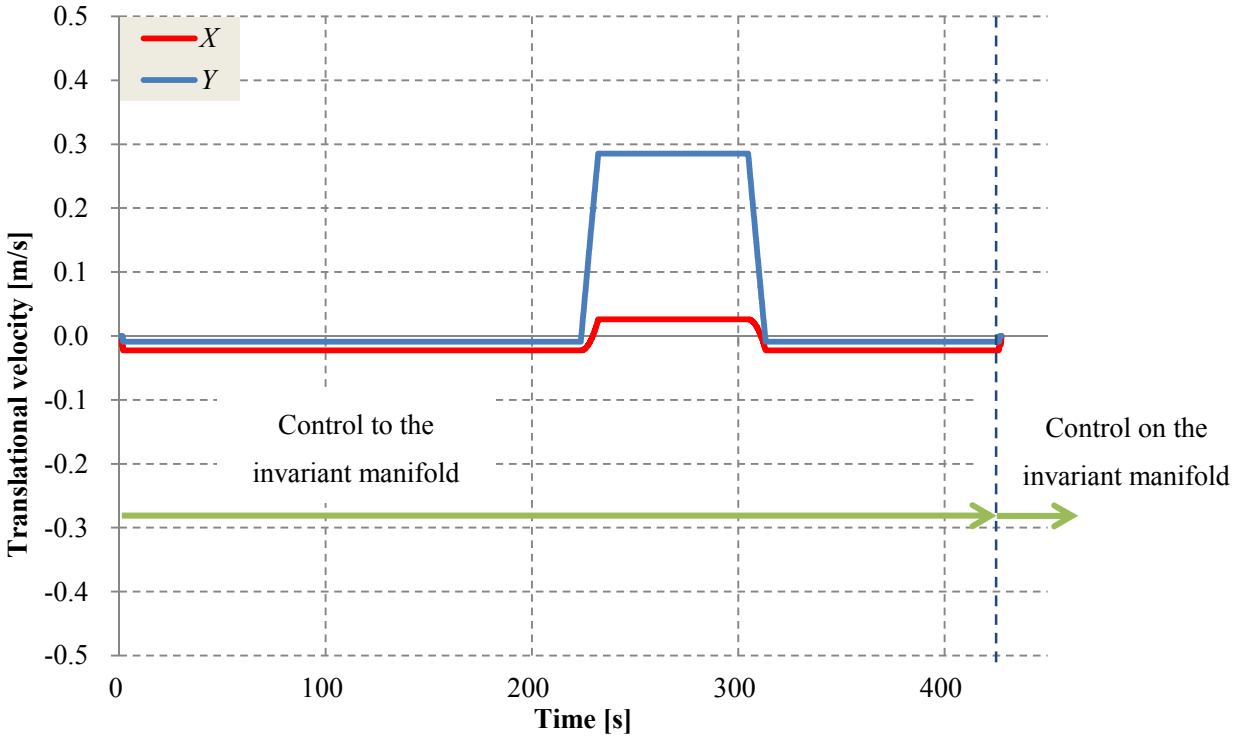
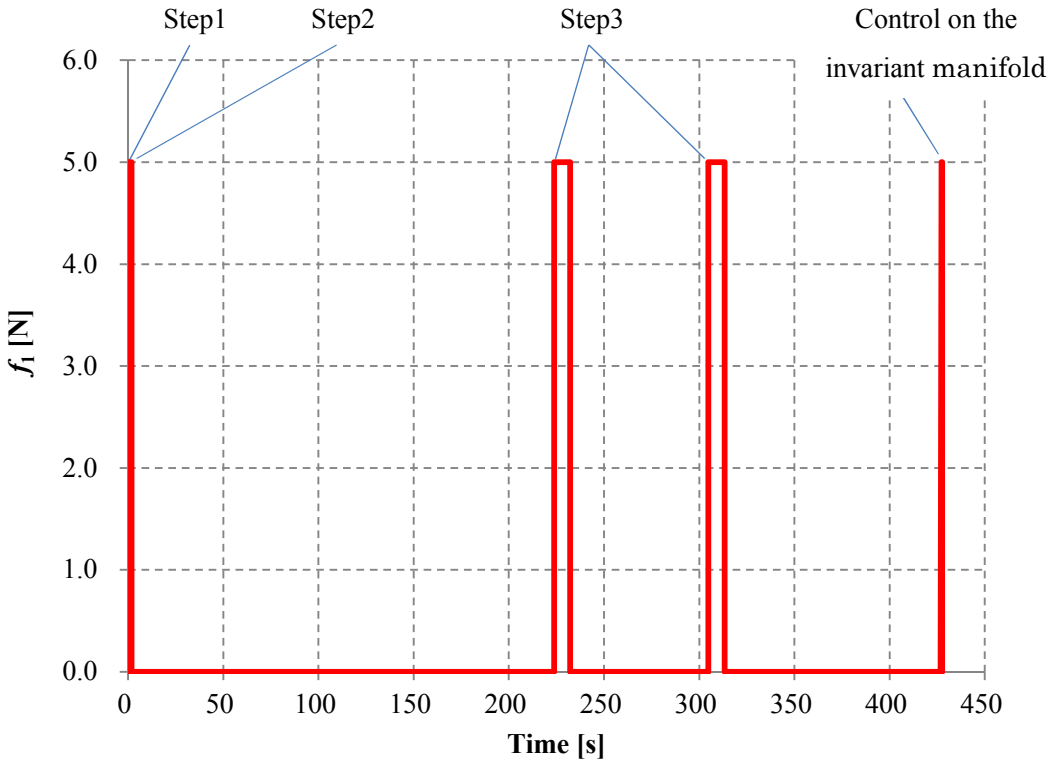
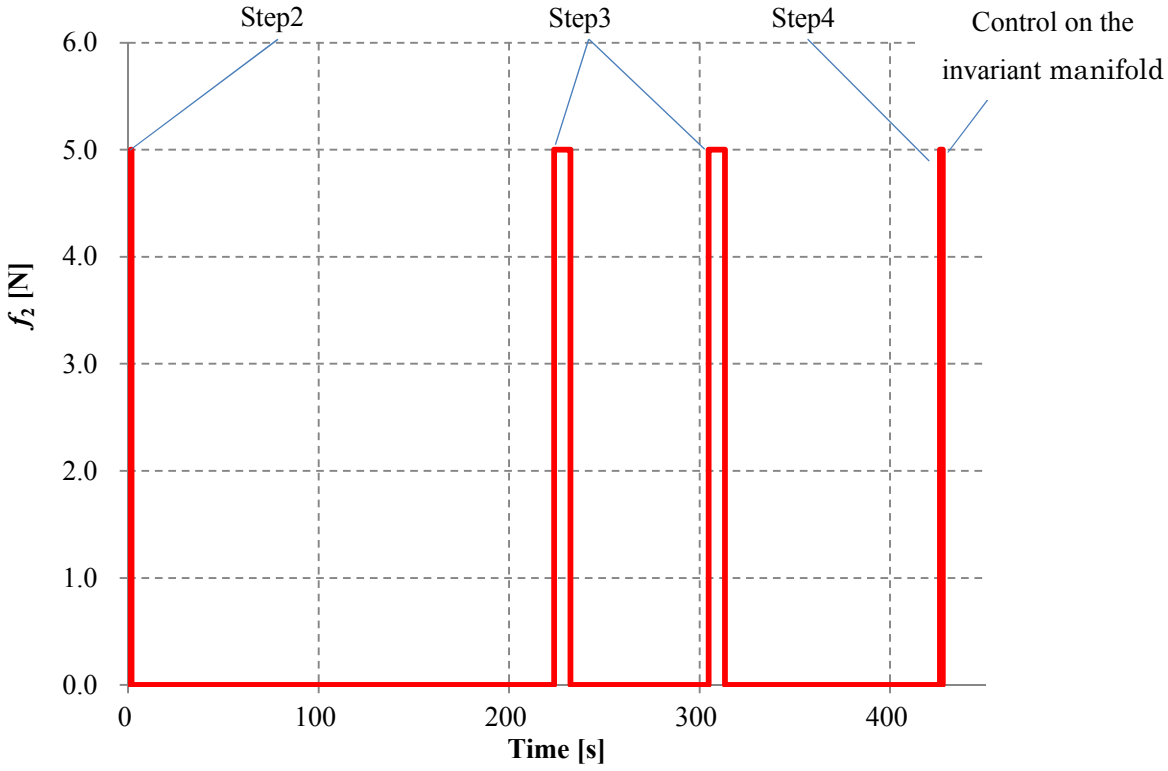



**Fig.3.7** Time history of translational velocities across *X* and *Y*




(a) Thruster1




(b) Thruster2

**Fig.3.8** Time history of thruster forces

## 3．4　トルクが釣り合わない場合の制御系

以下では，$\bar{f}_1\beta_1+\bar{f}_2\beta_2\neq 0$ である場合の制御系を設計する．

$\bar{f}_1\beta_1+\bar{f}_2\beta_2\neq 0$ である場合には，回転運動に影響を及ぼさずに並進力のみを出力することができない．したがって，3.3 節に示した $\bar{f}_1\beta_1+\bar{f}_2\beta_2=0$ の場合に比べ，宇宙機を目標の姿勢・位置とする制御は一段階難しい．

本節では宇宙機の目標姿勢・位置の達成を第一の目的とおき，正確な質量，慣性モーメントが既知であるとして議論を進める．以下，制御系の設計について述べ，その有効性を数値シミュレーションにより示す．

なお，本節では，2 章や 3.3 節で用いた一部の記号が別の定義で用いられる点に注意されたい．このような記号は本節内でその意味を改めて定義する．

### 3.4.1　制御ストラテジー

本節においても，3.3 節に示した不変マニフォールドを用いた切り替え制御の適用を検討する． 3.3 節では，Fig.3.3 に示したように宇宙機を角度$\phi$の直線へ遷移させ，直線上に拘束しつつ機体を目標位置へ停止させることが可能であった．この場合のマニフォールドは，機体が直線上に目標姿勢で在り，かつ，宇宙機の速度が直線の方向に一致している状態として定義された．

しかしながら，$\bar{f}_1\beta_1+\bar{f}_2\beta_2\neq 0$ の条件においては，宇宙機を目標点（原点）に止めるために減速しようとすれば，回転トルクが必ず生じる．したがって，3.3 節のケースとは異なり，宇宙機の姿勢を目標姿勢に保ったままマニフォールドである直線上を減速させることは不可能である．そこで，Fig.3.9 に示す手法を新たに提案する．

Fig.3.9 では，まず宇宙機を目標姿勢で原点を通る直線に平行な速度を持つように制御する．次に宇宙機の速度を減速する．この時一旦姿勢は崩れるが，再び目標姿勢に戻して速度も再び原点を通る直線に平行になるように制御する．このように，*X-Y* 平面上の平行な複数の直線（マニフォールド）を次々に遷移しながら宇宙機を減速させ，最終的に目標位置に停止させる．

以下，マニフォールドの設計，到達制御，および目標位置への制御について述べる．

### 3.4.2　マニフォールドの設計

まず，マニフォールドとして用いる *X-Y* 平面の直線の角度について述べる．直線と *X* 軸の角度$\phi$を 3.3 節の式(3.6)から改めて式(3.19)のように設定する．

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\bar{f}_1-\mu\bar{f}_2}{\bar{f}_1+\mu\bar{f}_2}\tan(\alpha_1)\right) \tag{3.19}$$

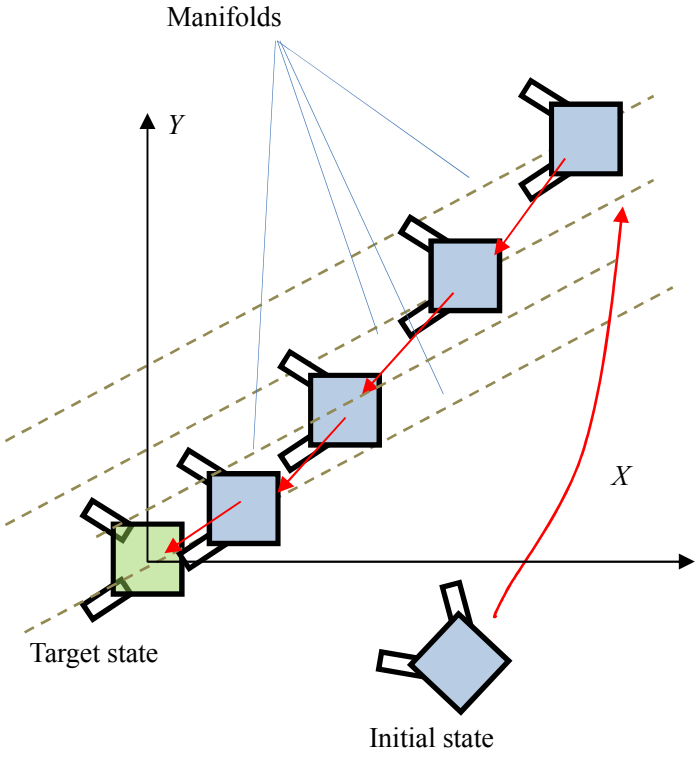



**Fig.3.9** Control strategy for satellite position and attitude using plural manifolds

$\phi$は，目標姿勢からの姿勢角の変動が無いと仮定した場合に，スラスター1 を $t$ 秒間，スラスター2 を $\mu t$ 秒間駆動して発生する並進運動量ベクトルの方向である（式(3.6)で示した角度$\phi$は $\mu$=1 の場合に相当する）．ここで $\mu$ は，スラスター1 を駆動することにより生じた宇宙機の角速度をスラスター2 の駆動により再び 0 に戻るように設定される定数であり，以下の式(3.20)となる．

$$\mu = -\frac{\bar{f}_1 \beta_1}{\bar{f}_2 \beta_2} \tag{3.20}$$

一旦生じた角速度を 0 に戻すようにマニューバを行う際，スラスター1 を $t$ 秒間駆動することに対し，必ずスラスター2 を $\mu t$ 秒間駆動する必要がある．$t$ を微小とした短時間のマニューバでは姿勢角の変動も微小であるから，目標姿勢近傍のマニューバにおいて宇宙機の並進力は角度$\phi$に沿った方向となる．

次に，宇宙機が目標の姿勢で傾き$\phi$の直線に沿った並進速度を持ったとする．このとき，何らかのマニューバを加えない限り宇宙機は上記の直線から外れない．このような速度の条件は 3.3 節の 1 つの直線を不変マニフォールドとする場合と同じであり，3.3.1 項の式(3.5)

に既に示した．

続いて，原点を通る傾き$\phi$の直線と宇宙機との距離を$\delta$で定義する(Fig.3.10 を参照)．すると，直線の式は以下の式(3.21)となる．

$$Y\cos(\phi) - X\sin(\phi) = \delta \tag{3.21}$$

$\delta$は直線ごとに定義される制御系の設計変数である．宇宙機が減速マニューバにより途中の直線へ遷移するごとに$\delta$を小さくし，$X$座標が 0 になると同時に$\delta = 0$とできれば，Fig.3.9 に示す挙動により，宇宙機を原点に静止できる．

なお，$\bar{f}_1$，$\bar{f}_2$が正である拘束のもとに宇宙機を$X$が正の方向から原点に静止させるためには，$X >> 0$，$\dot{X} < 0$もマニフォールドの条件として加わる．これらを満たすために，3.3 節と同様に$X >> 0$，$\dot{X} < 0$とする操作を事前に行うことを仮定する．

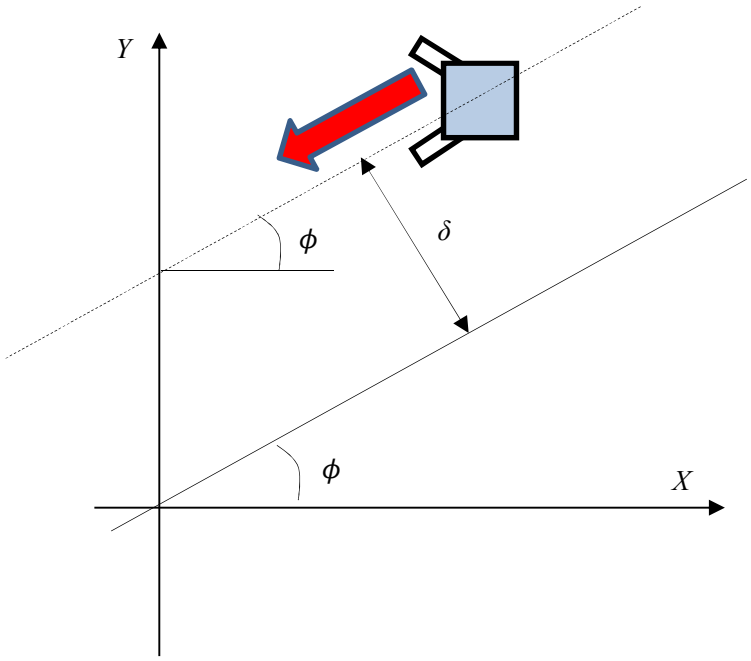



**Fig.3.10** A manifold on a *X*-*Y* plane

### 3.4.3　マニフォールドへの到達則

2 章や 3.3 節で述べたように，回転運動のダイナミクスは線形であるから比較的制御し易い．このとき，目標の姿勢角変動を達成する制御パターンは無数にあり，これに付随する並進運動のパターンも無数に存在する．ここでは，付随する並進運動の中から，宇宙機の状態が再びマニフォールドへ到達する回転運動を考える．

回転運動を開始・停止させる最も簡単な方法は，スラスターを片方ずつ ON にすることである．しかし，回転トルクの発生量を小さく抑えつつより大きな並進力を得たい場合には，最初にスラスター二つを同時に駆動し，その後に回転運動を止めるように片方のスラスターを ON にする方が効果的である．ここでは後者の手法を採用したとし，Fig.3.11 に示すように三つのステップにより姿勢角を変動させる．$\bar{f}_1\beta_1 + \bar{f}_2\beta_2 < 0$ の場合，各ステップは，Step-a: 二つのスラスターを $t$ 秒間駆動して宇宙機の回転を開始, Step-b:両方のスラスターを $\tau$ 秒間停止（一定角速度で回転），Step-c:スラスター2 を $(\mu-1)t$ 秒間駆動して宇宙機の回転を停止，である．

なお，Fig.3.11 に示すスラスター出力パターンでは $\Delta\theta$ は負となり，正の $\Delta\theta$ を得るには Step-a と Step-c の順序を入れ替えた姿勢角変動マニューバを行う．

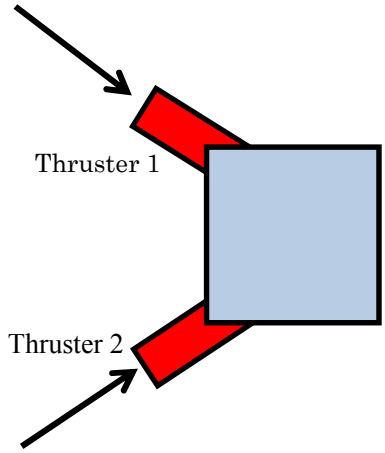
上記の一連のステップで姿勢角は一方向に変化するため，初期と最終の姿勢角を目標値に一致させるマニューバはできない．そこで，一連のステップを 1 パターンとして，3 回のパターンにより，並進速度を減速させつつ次のマニフォールドへ到達させる．3 回というパターン数は，宇宙機を減速するマニューバ（マニフォールドからはずれる），移動量を調整する中間マニューバ，速度の方向を調整するマニューバ，に対応する．

以下，各マニフォールドへ到達するための位置・速度変動を得るマニューバを定める．まず，(a) 速度方向を調整する手法を述べ，続いて(b)位置変動量を調整する方法，(c)速度の大きさを調整して目標へ宇宙機を静止する方法について述べる．

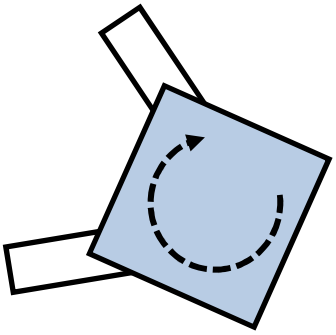
**(a) 速度方向を調整するスラスター駆動時間**　議論を簡単にするために，3 回のパターンすべてにおいて，Step-a における駆動時間を等しくし，その時間を $t_a$ で表す．以下では，マニフォールドでの速度条件式(3.5)を満たすスラスター駆動時間 $t_a$ を求めていく．なお，速度変動量は各パターンでの姿勢角変動量 $\Delta\theta$ の関数であり，さらに $\Delta\theta$ は Step-b での回転ドリフト時間 $\tau$ により調整される．これらの設定方法については 3.4.4 項で述べる．

まず，$X$ 方向と $Y$ 方向の速度変動を $t_a$ により表す．スラスター駆動時間を短くし，その間の姿勢角変動が微小であると仮定する．$t_a$ が短いとき Step-a での姿勢角の変動が微小であることより，Step-c での姿勢角変動も微小であると仮定できる．また Step-b では，スラスターを駆動しないので，速度変化も生じない．慣性座標系に対する宇宙機の姿勢と加えた力に対する幾何学的関係から, 速度変化の総量は容易に推算できる. すなわち, 姿勢角は式(3.3)より時間に関する 2 次式であるから，$\sin(\theta) \approx \theta$，$\cos(\theta) \approx 1$ のもとに式(3.1)，(3.2)を 1 階積分することで速度変化を表現できる．その結果，3 回のパターン中の $i$ 番目における初期姿勢角を $\theta_i$ とおけば，3 回のパターンの結果生じる $X$，$Y$ 方向の速度変動量 $\Delta\dot{X}, \Delta\dot{Y}$ は $t_a$ の 3 次式として以下のように求められる．

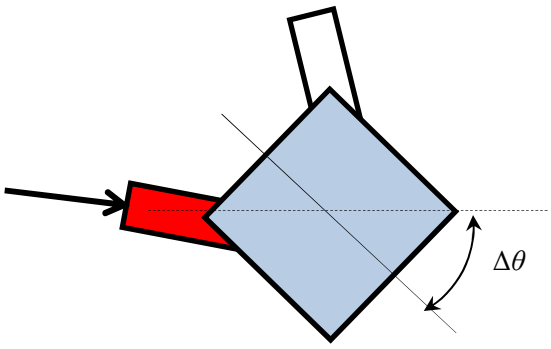
$$\Delta\dot{X} = \sum_{i=1}^{3} h_1(\theta_i, \Delta\theta_i) t_a + \sum_{i=1}^{3} h_3(\theta_i, \Delta\theta_i) t_a^3 \tag{3.22}$$




Step-a) Rotational acceleration by thruster 1 for $t$ (s)



Step-b) Drift motion for $\tau$ (s) with a constant angular velocity




Step-c) Rotational deceleration by thruster 2 for $(\mu\text{-}1)t$ (s)

**Fig.3.11** Schematic images of the attitude change for the input patterns

$$\Delta\dot{Y} = \sum_{i=1}^{3} h_1\left(\theta_i - \frac{\pi}{2}, \Delta\theta_i\right) t_a + \sum_{i=1}^{3} h_3\left(\theta_i - \frac{\pi}{2}, \Delta\theta_i\right) t_a^3 \tag{3.23}$$

ここで $h_1$ および $h_3$ は，以下のように Step-a と Step-c に対応する 2 つの部分に分解できる．

$$h_1(\theta_i, \Delta\theta_i) = \eta_{1a}(\theta_i, \Delta\theta_i) + \eta_{1c}(\theta_i, \Delta\theta_i) \tag{3.24}$$

$$h_3(\theta_i, \Delta\theta_i) = \eta_{3a}(\theta_i, \Delta\theta_i) + \eta_{3c}(\theta_i, \Delta\theta_i) \tag{3.25}$$

さらに，$\eta_{1a}$〜$\eta_{3c}$ は $\Delta\theta_i$ の符号に依存し，$\Delta\theta_i < 0$ のとき以下のようになる．

$$\eta_{1a}(\theta_i, \Delta\theta_i) = -\frac{1}{m}\left\{\bar{f}_1 \cos(\alpha_1 + \theta_i) + \bar{f}_2 \cos(\alpha_1 - \theta_i)\right\} \tag{3.26}$$

$$\eta_{1c}(\theta_i, \Delta\theta_i) = -\frac{(\mu - 1)\bar{f}_2 \cos(\alpha_1 - \theta_i - \Delta\theta_i)}{m} \tag{3.27}$$

$$\eta_{3a}(\theta_i, \Delta\theta_i) = \frac{(\mu - 1)\bar{f}_1\beta_1}{6mJ}\left\{-\bar{f}_1 \sin(\alpha_1 + \theta_i) + \bar{f}_2 \sin(\alpha_1 - \theta_i)\right\} \tag{3.28}$$

$$\eta_{3c}(\theta_i, \Delta\theta_i) = -\frac{(\mu - 1)^3 \bar{f}_2^2 \beta_2 \sin(\alpha_1 - \theta_i - \Delta\theta_i)}{6mJ} \tag{3.29}$$

一方，$\Delta\theta_i > 0$ のときは次のようになる．

$$\eta_{1a}(\theta_i, \Delta\theta_i) = -\frac{(\mu - 1)\bar{f}_2 \cos(\alpha_1 - \theta_i)}{m} \tag{3.30}$$

$$\eta_{1c}(\theta_i, \Delta\theta_i) = -\frac{1}{m}\left\{\bar{f}_1 \cos(\alpha_1 + \theta_i + \Delta\theta_i) + \bar{f}_2 \cos(\alpha_1 - \theta_i - \Delta\theta_i)\right\} \tag{3.31}$$

$$\eta_{3a}(\theta_i, \Delta\theta_i) = -\frac{(\mu - 1)^3 \bar{f}_2^2 \beta_2 \sin(\alpha_1 - \theta_i)}{6mJ} \tag{3.32}$$

$$\eta_{3c}(\theta_i, \Delta\theta_i) = \frac{(\mu - 1)\bar{f}_1\beta_1}{6mJ}\left\{-\bar{f}_1 \sin(\alpha_1 + \theta_i + \Delta\theta_i) + \bar{f}_2 \sin(\alpha_1 - \theta_i - \Delta\theta_i)\right\} \tag{3.33}$$

宇宙機が初期状態においてマニフォールド上にある場合，もしくは，静止している場合は，式(3.5)は満たされている．したがって，減速のパターンを行った後に再び別のマニフォールドに到達するには，並進速度の変動が，$\Delta\dot{Y}\cos(\phi)-\Delta\dot{X}\sin(\phi)=0$ を満たす必要がある．$\Delta\dot{Y}\cos(\phi)-\Delta\dot{X}\sin(\phi)=0$ に式(3.22)，(3.23)を代入して，以下の $t_a$ を得る．

$$t_a=\sqrt{-\frac{\cos(\phi)\sum_{i=1}^{3}h_1\left(\theta_i-\frac{\pi}{2},\Delta\theta_i\right)-\sin(\phi)\sum_{i=1}^{3}h_1(\theta_i,\Delta\theta_i)}{\cos(\phi)\sum_{i=1}^{3}h_3\left(\theta_i-\frac{\pi}{2},\Delta\theta_i\right)-\sin(\phi)\sum_{i=1}^{3}h_3(\theta_i,\Delta\theta_i)}} \tag{3.34}$$

また，初期状態において並進速度$\dot{X}_1$ ，$\dot{Y}_1$ を有している機体をマニフォールド上に制御する場合には，$\left(\dot{Y}_1+\Delta\dot{Y}\right)\cos(\phi)-\left(\dot{X}_1+\Delta\dot{X}\right)\sin(\phi)=0$ であるようにスラスター駆動時間 $t_a$ を定めればよい．その結果，次の解を得る．

$$t_a=-\frac{\cos(\phi)\dot{Y}_1-\sin(\phi)\dot{X}_1}{\cos(\phi)\sum_{i=1}^{3}h_1\left(\theta_i-\frac{\pi}{2},\Delta\theta_i\right)-\sin(\phi)\sum_{i=1}^{3}h_1(\theta_i,\Delta\theta_i)} \tag{3.35}$$

**(b) 位置変動量を調整する並進ドリフト時間**　各パターン終了時点において，宇宙機の姿勢角速度は 0 であるが，並進速度は一般に 0 ではない．そこで，2 回目と 3 回目のパターンの間に $\rho$ 秒間のドリフトにより並進運動を行う時間を設定する．1 回目と 2 回目のパターン間でドリフトによる並進運動を行ってもよい．マニフォールド間の位置に関する条件式(3.21)を満たすように，時間 $\rho$ を定める．

$i$ 番目のパターンにおける初期速度を$\dot{X}_i$ ，$\dot{Y}_i$ とおけば，3 回のパターンで生じる位置変動量 $\Delta X$，$\Delta Y$ は，以下のように表される．

$$\Delta X=\sum_{i=1}^{3}G\left(\theta_i,\Delta\theta_i,\dot{X}_i\right)+\dot{X}_{2e}\rho \tag{3.36}$$

$$\Delta Y=\sum_{i=1}^{3}G\left(\theta_i-\frac{\pi}{2},\Delta\theta_i,\dot{Y}_i\right)+\dot{Y}_{2e}\rho \tag{3.37}$$

ここで，$\dot{X}_{2e}$ ，$\dot{Y}_{2e}$ は 2 回目のパターン終了後に宇宙機が持つ並進速度である．(a)の速度方向調整の場合と同様にスラスターの駆動時間を短いと仮定すれば，関数 $G$ と速度$\dot{X}$ ，$\dot{Y}$は解析的に以下の式(3.38)のように求まる．なお，$V_i=\dot{X}_i$ or $\dot{Y}_i$ である．

$\Delta\theta_i < 0$ の場合は，

$$G\left(\theta_i,\Delta\theta_i,V_i\right)=\sum_{i=1}^{3}g_4\left(\theta_i,\Delta\theta_i\right)t_a^4+\sum_{i=1}^{3}g_2\left(\theta_i,\Delta\theta_i\right)t_a^4+\sum_{i=1}^{3}\frac{\mu}{2}V_i\,t_a+\sum_{i=1}^{3}\frac{J\Delta\theta_i}{\bar{f}_2\beta_2\left(\mu-1\right)}\left(\eta_{3a}+\frac{V_i}{t_a}\right) \tag{3.38}$$

$$g_4\left(\theta_i,\Delta\theta_i\right)=\frac{2\mu-3}{4}\eta_{1a}-\frac{3\left(\mu-1\right)}{4}\eta_{1c} \tag{3.39}$$

$$g_2\left(\theta_i,\Delta\theta_i\right)=\frac{J\Delta\theta_i}{\left(\mu-1\right)\bar{f}_2\beta_2}\eta_{1a}-\frac{\mu-1}{2}\eta_{3a}+\frac{\mu-1}{2}\eta_{3c} \tag{3.40}$$

であり，$\Delta\theta_i > 0$ のときは，次の式(3.41)，(3.42)が式(3.39)，(3.40)に代わる．

$$g_4\left(\theta_i,\Delta\theta_i\right)=\frac{3\mu-1}{4}\eta_{1a}+\frac{3}{4}\eta_{1c} \tag{3.41}$$

$$g_2\left(\theta_i,\Delta\theta_i\right)=\frac{J\Delta\theta_i}{\left(\mu-1\right)\bar{f}_2\beta_2}\eta_{1a}+\frac{2\mu-1}{2}\eta_{3a}+\frac{1}{2}\eta_{3b} \tag{3.42}$$

したがって，$\Delta\delta$ だけ離れた次のマニフォールドへ宇宙機が遷移するには，$\Delta Y\cos\left(\phi\right)-\Delta X\sin\left(\phi\right)=\Delta\delta$ を満たす $\rho$ として次のように定める．

$$\rho=\frac{\Delta\delta-\left(\cos\left(\phi\right)\sum_{i=1}^{3}G\left(\theta_i-\frac{\pi}{2},\Delta\theta_i,\dot{Y}_1\right)-\sin\left(\phi\right)\sum_{i=1}^{3}G\left(\theta_i,\Delta\theta_i,\dot{Y}_1\right)\right)}{\dot{Y}_{2e}\cos\left(\phi\right)-\dot{X}_{2e}\sin\left(\phi\right)} \tag{3.43}$$

なお，マニフォールド上にない状態をマニフォールド上の状態へ遷移させる場合には，現在の宇宙機の位置と所望のマニフォールドまでの距離を式(3.43)の $\Delta\delta$ の代わりに用いればよい．

**(c) 目標点へ宇宙機を停止させる制御系**　速度変化量は，スラスターを駆動する時間とその時の姿勢角に依存する．マニフォールドとなる直線間を遷移するための駆動時間 $t_a$ は式(3.34)で規定されるが，式中の姿勢角変化量 $\Delta\theta_i$ は未定である．ここでは，まず $X$ 方向の速度を $\Delta V_x$ だけ減じる姿勢角変動 $\Delta\theta_i$ を定める式を導出する．次に，$\Delta\theta_i$ と Step-b における時間 $\tau$ との関係を示す．なお，式(3.34)のスラスター駆動時間 $t_a$ を用いるので，$X$ 方向と $Y$ 方

向の速度は式(3.5)を満たし，$X$ の速度成分を小さくすれば $Y$ 方向の速度も小さくなる．

姿勢角の変化について考える． 3 回のパターンの後に姿勢角を $\theta = 0$ にするとき，各パターンにおける変動量 $\Delta\theta_i$ には自由度がある．つまり $\nu$ を設計変数として，2 回目・3 回目のパターンでの変動量を，$\Delta\theta_2 = -(1+\nu)\Delta\theta_1$，$\Delta\theta_3 = \nu\Delta\theta_1$ とすれば，$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 = 0$ であり，3 回のパターンの後に姿勢は $\theta = 0$ へ復帰する．

ここで，マニフォールド間を遷移する減速マニューバにおいて，姿勢角の変動量 $\Delta\theta_1$ を小さいとする．すると，$\Delta\theta_2$ と $\Delta\theta_3$ も同様に小さいと仮定できる．このとき，式(3.24)~(3.33)に上述した各パターンの初期姿勢と姿勢角変動を代入して用い，さらに，$\sin(\Delta\theta_1) \approx \Delta\theta_1$，$\cos(\Delta\theta_1) \approx 1$ の近似を行えば式(3.34)は以下のようになる．

$$\bar{t}_a = \sqrt{\frac{-\lambda_4\Delta\theta_1 + \lambda_2}{\lambda_3\Delta\theta_1 - \lambda_1}} \tag{3.44}$$

ここで，$\lambda_1$~$\lambda_4$ は $\Delta\theta_1$ の符号に依存し，$\Delta\theta_1 < 0$ であれば，

$$\lambda_1 = \frac{(\mu-1)\bar{f}_2\beta_2}{2mJ}\left\{\bar{f}_2\left((\mu-1)^2+\mu\right)\cos(\alpha_1+\phi) + \mu\bar{f}_1\cos(\alpha_1-\phi)\right\} \tag{3.45}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{m}\left\{\left(\mu\bar{f}_2\sin(\alpha_1+\phi)\right) - \bar{f}_1\sin(\alpha_1-\phi)\right\} \tag{3.46}$$

$$\lambda_3 = -\frac{(\mu-1)\bar{f}_2\beta_2}{3mJ}\left\{\bar{f}_2\left((\mu-1)^2+\mu\nu\right)\sin(\alpha_1+\phi) + \mu\nu\bar{f}_1\sin(\alpha_1-\phi)\right\} \tag{3.47}$$

$$\lambda_4 = -\frac{2}{m}\left\{\left(\bar{f}_2(1-\mu+\nu)\cos(\alpha_1+\phi)\right) + \nu\bar{f}_1\cos(\alpha_1-\phi)\right\} \tag{3.48}$$

となる．一方，$\Delta\theta_1 > 0$ であれば，式(3.47)，(3.48)に代わり，以下の式(3.49)，(3.50)となる．

$$\lambda_3 = -\frac{(\mu-1)\bar{f}_2\beta_2}{3mJ}\left\{\bar{f}_2\left(\nu(\mu-1)^2-\mu\right)\sin(\alpha_1+\phi) + \mu\bar{f}_1\sin(\alpha_1-\phi)\right\} \tag{3.49}$$

$$\lambda_4 = -\frac{2}{m}\left\{\left(\bar{f}_2\left(\nu(\mu-1)-1\right)\cos(\alpha_1+\phi)\right) - \bar{f}_1\cos(\alpha_1-\phi)\right\} \tag{3.50}$$

このとき，3 回のパターンの結果生じる $X$ 方向速度の変動量は式(3.22)であり，$\Delta\theta_1$ が小さいと仮定すれば，$\Delta\dot{X} \approx 3h_1(0,0)\bar{t}_a$ となる．したがって，$\Delta\dot{X} \approx 3h_1(0,0)\bar{t}_a$ に式(3.44)を代入すれ

ば，$\Delta\dot{X}=\Delta V_x$ を満たす $\Delta\theta_1$ は以下のようになる．

$$\Delta\theta_1 = \frac{\lambda_1 Q^2 + \lambda_2}{\lambda_3 Q^2 + \lambda_4} \qquad \left( \text{ここに } Q = \frac{\Delta V_x}{3h_1(0,0)} \right) \tag{3.51}$$

これにより，$i$ 番目のパターンにおける姿勢角変動量 $\Delta\theta_i$ と回転ドリフト時間 $\tau_i$ との関係は，式(3.34)の $t_a$ と回転運動の式より，以下となる．

$$\tau_i = \frac{J\Delta\theta_i}{\mu(\mu-1)\bar{f}_2\beta_2 t_a} - \frac{t_a}{2} \tag{3.52}$$

上記の制御を行えば，マニフォールド上で宇宙機の速度を 0 にすることができる．その際，宇宙機を目標点で静止させるには，上述の $X$ 方向速度の減速に伴う位置変動量を予め求めておき，ちょうど $X=0$ の地点で宇宙機が静止するように $X$ 方向速度の制御を開始すればよい．

**(d) スラスター駆動時間のまとめ**　提案した手法をまとめると，以下のようになる．まず，式(3.19)より直線であるマニフォールドの角度$\phi$を決める．次にマニフォールド間を遷移するための姿勢角変動 $\Delta\theta_1$ を式(3.51)より求め，これに基づいて $\Delta\theta_2$ と $\Delta\theta_3$ を定める．これらを式(3.34)に代入して，スラスターが ON となる時間 $t_a$ を求め，式(3.52)と式(3.43)よりスラスターが OFF である時間 $\tau_i$ と $\rho$ を定める．また，初期速度を持つ宇宙機を最初のマニフォールドに乗せる場合には，$t_a$ を式(3.35)から計算する．

### 3.4.4　数値シミュレーションによる検証

数値シミュレーションを行い，3.4.3 項に述べた制御手法の有効性を検証する．以下，シミュレーションにおける宇宙機のモデルパラメータと初期状態，制御系の設定，および，シミュレーション結果について述べる．

**(a) モデルパラメータと初期状態**　推力が $\bar{f}_1 = 6.0$ [N] と $\bar{f}_2 = 5.0$ [N] の 2 つのスラスターを持つ宇宙機（質量 $m = 200$[kg]，慣性モーメント $J = 20$[kgm]）を例にする．異なるスラスターの取り付け条件に対しても，提案した手法で位置･姿勢の制御が可能であることを示すために，次の 2 通りのスラスター取り付け条件に対してシミュレーションを行う．

Case1：

$\alpha_1$=0.85π[rad]，$\alpha_2$=2π-$\alpha_1$=1.15π[rad]，$\beta_1$=-0.4[m]，$\beta_2$=0.3[m]

Case2：

$\alpha_1$=1.0π[rad]，$\alpha_2$=2π-$\alpha_1$=1.0π[rad]，$\beta_1$=-0.8[m]，$\beta_2$=0.3[m]

初期状態は Case1 と Case2 で共通とし，$X_0$=60[m]，$Y_0$=-5[m]，$\theta_0$=0.2[rad]で，初期の並進速度と回転速度はともに 0 とする．ここに $X_0$ は $Y_0$ の絶対値に比べ大きな値であるが，これは開ループ制御により事前に $X$>>0 とする操作を行ったことに対応している．

**(b) 制御系**　まず，初期状態からマニフォールドへ到達させるために，3.4.3 項(a)の最後で述べた方法により，次の姿勢角変動パターンを 1 回行う．

Case1：

$\Delta\theta_1$=2.92[rad]，$\Delta\theta_2$=-6.12[rad]，　$\Delta\theta_3$=3.00[rad]

Case2：

$\Delta\theta_1$=2.89[rad]，$\Delta\theta_2$=-6.09[rad]，　$\Delta\theta_3$=3.00[rad]

Case1 と Case2 で姿勢角変動の値が異なるが，これは式(3.35)の $t_a$ の解が微小となるように調整したためである．

宇宙機が最初のマニフォールドへ遷移した後は，$\Delta\theta_1 < 0$ であるマニフォールドの遷移を 2 回行い，宇宙機を目標に停止させる．3.4.3 項(c)で述べた方法に基づき，1 回目のマニフォールドの遷移で $X$ 方向速度 $V_x$ を半分にし，2 回目のマニフォールドの遷移とともに宇宙機の速度を 0 とする．ただし，姿勢角変動のパラメータ $\nu$ は Case1 と Case2 ともに 0.3 に設定する．

さらに，最初のマニフォールドへの移動量ならびにマニフォールド間の移動量（ただし，最後に目標点で静止させる際の移動を除く）は，$X$ 方向速度の関数として $\delta = -0.005V_x$ とする．このように設定することで，マニフォールドの遷移を行って宇宙機を減速する毎に $\delta$ を小さくすることができる．最後の移動量は，最終的に宇宙機が目標点に静止するように定める．

**(c) シミュレーション結果**　まず，Case1 の結果について述べる．Fig.3.12 に宇宙機の位置の軌道，Fig.3.13 に姿勢角の時間履歴，Fig.3.14 に並進速度の時間履歴，Fig.3.15 にスラスター力の時間履歴を示す．Fig.3.12~3.14 より全ての状態量が目標点（原点）へ遷移していることがわかる．また，Fig.3.15 より 2 つのスラスター力は 0 もしくは所定の一定値となっていることに着目されたい．さらに，スラスターの出力履歴における ON/OFF 回数より，宇宙機が 3 つのマニフォールド（原点を通るものを含む）を経ていることが確認できる．

Fig.3.12 における A~D までが初期位置から最初のマニフォールドへ宇宙機が遷移するまでの軌道である．A までが最初のマニフォールドへの遷移，A~B が 2 回目，C~D が 3 回目

のマニフォールドへの遷移に際して生じる挙動である． B~C は式(3.43)で求めたドリフト時間による位置の変動である．マニフォールドに状態が遷移した後は，宇宙機はドリフトにより D~E 間を移動し，E および F でマニフォールド間を遷移する減速マニューバを開始し原点に静止している．また，各パターンにおけるスラスターの駆動時間とドリフト時間は，Table3.3 に示す通りである．スラスター駆動時間 $t_a$ は，いずれのパターンにおいてもスラスター駆動中の姿勢角変動を微小近似できる程度に小さな値となっている．

続いて Case2 の結果について述べる．Fig.3.12 に示すように，Case2 においても提案手法により宇宙機は目標点である原点へ遷移している．この結果から，スラスターのモーメントアームや取り付け角度が異なる条件であっても提案手法が有効に働くことが確認できる．また，各パターンにおけるスラスター時間とドリフト時間は Table3.4 に示す通りであり，Case1 と同様に，スラスター時間 $t_a$ は微小近似ができる程度の小さな値である．

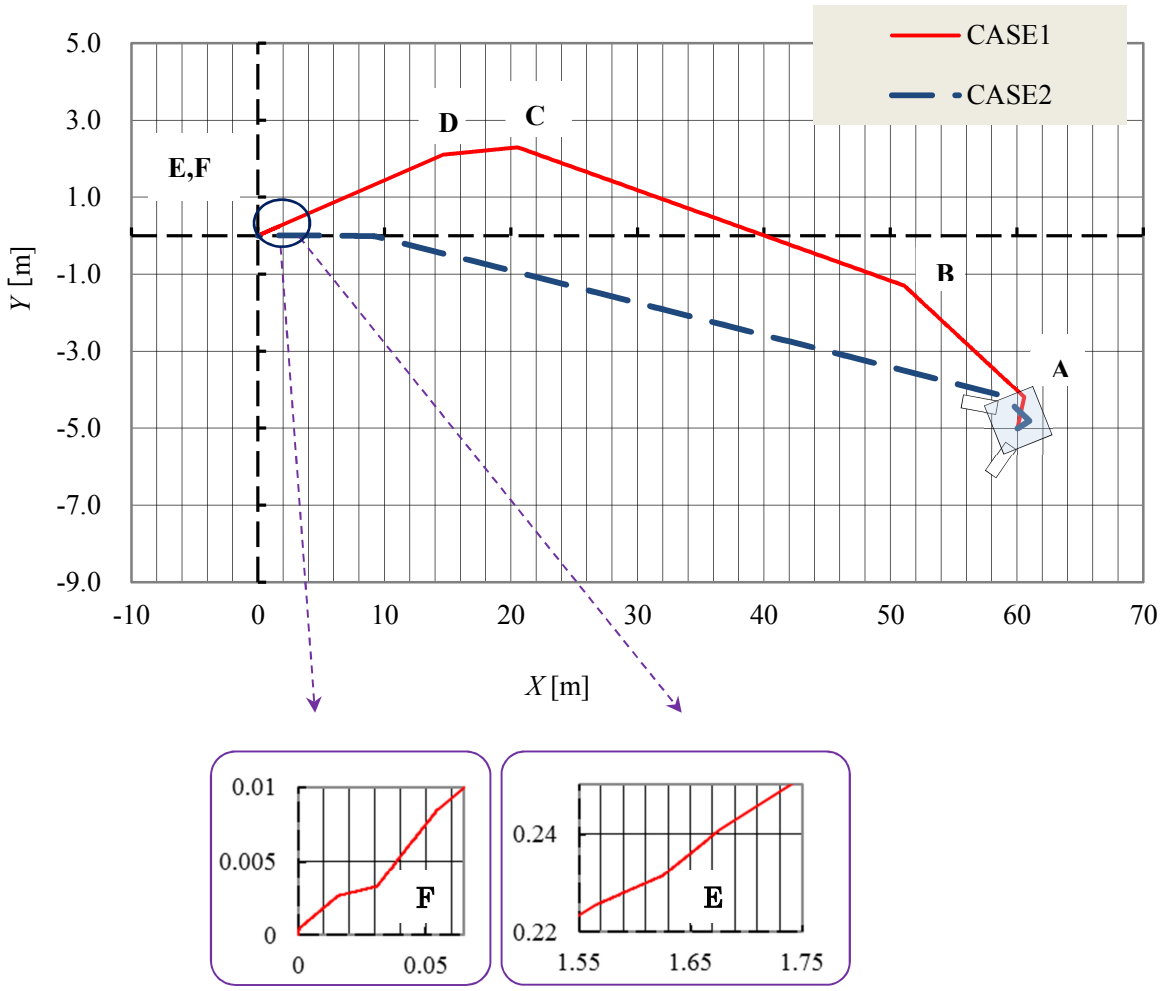



**Fig.3.12** Trajectory of $X$ and $Y$

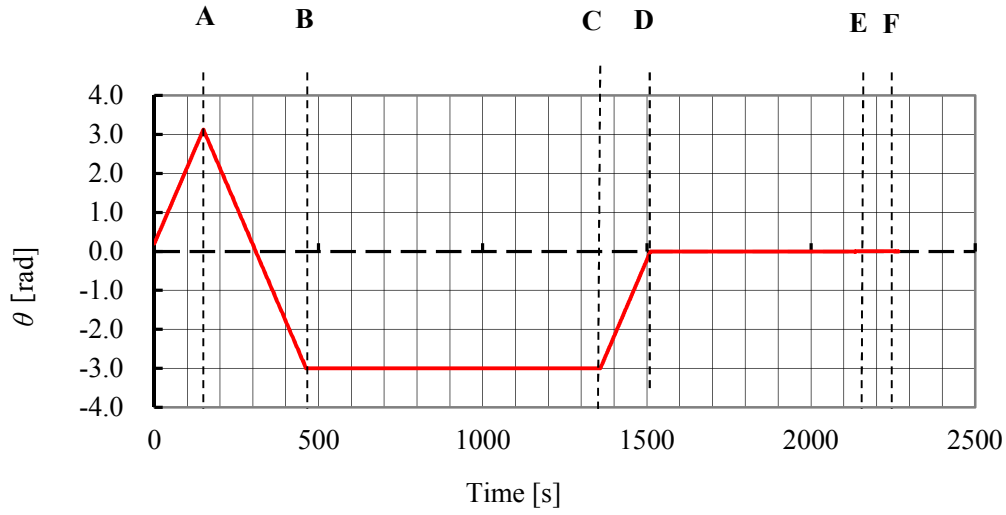



**Fig. 3.13** Time history of an attitude angle in Case1

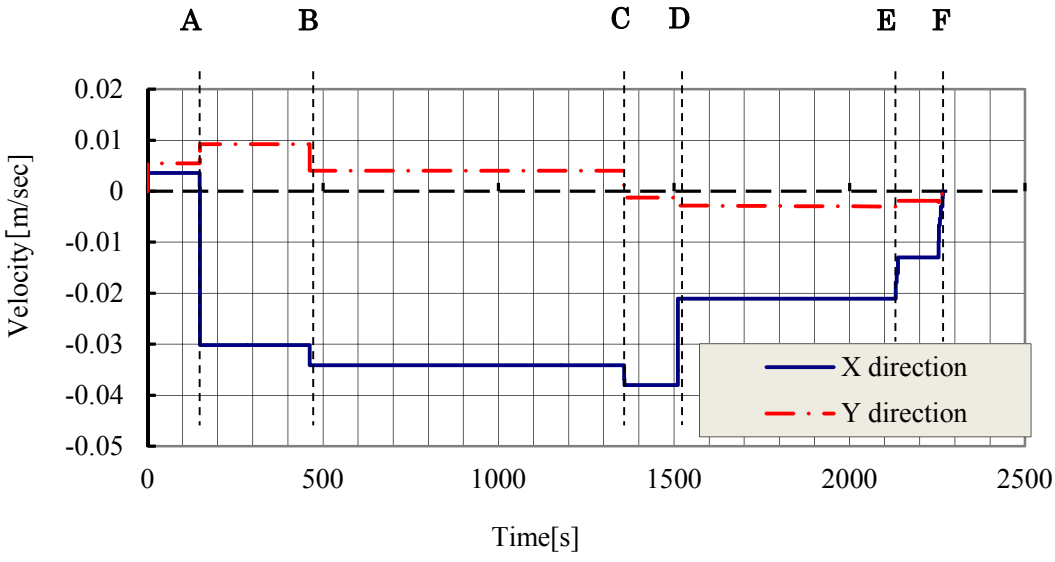
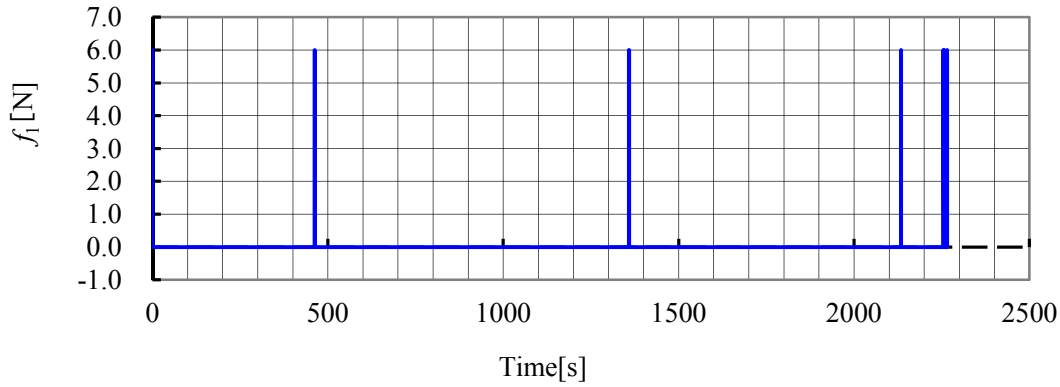
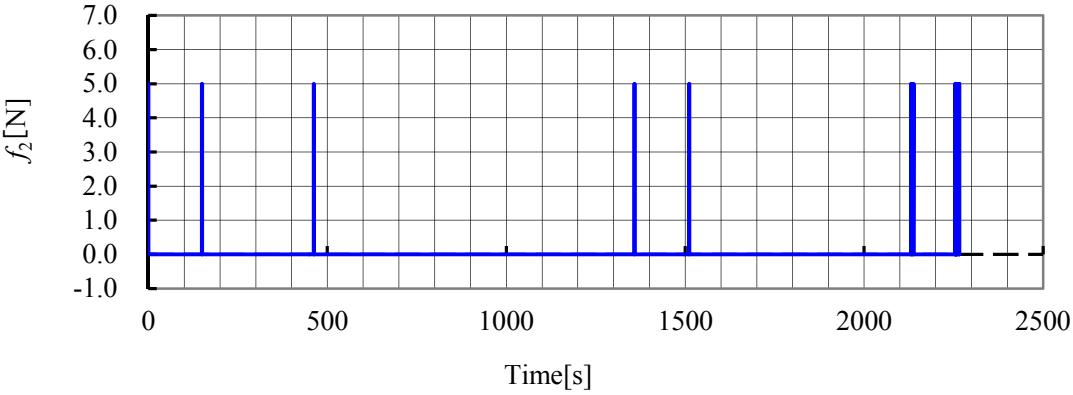



**Fig.3.14** Time history of translational velocities in Case1




(a) Thrsuter1




(b) Thrsuter2

**Fig.3.15** Time history of thruster forces in Case1

**Table3.3** Thruster and drift time of each pattern in Case1 [s]

| | Initial pattern | Pattern1 | Pattern2 |
|---|---|---|---|
| $t_a$ | 0.44 | 0.08 | 0.06 |
| $\tau_1$ | 148.80 | 2.67 | 2.12 |
| $\tau_2$ | 312.14 | 3.52 | 2.79 |
| $\tau_3$ | 152.32 | 0.78 | 0.62 |
| $T$ | 895.89 | 116.29 | 5.00 |

**Table3.4** Thruster and drift time of each pattern in Case2 [s]

| | Initial pattern | Pattern1 | Pattern2 |
|---|---|---|---|
| $t_a$ | 0.36 | 0.09 | 0.03 |
| $\tau_1$ | 48.32 | 0.31 | 0.09 |
| $\tau_2$ | 102.46 | 0.68 | 0.20 |
| $\tau_3$ | 50.03 | 0.22 | 0.06 |
| $T$ | 1253 | 60.6 | 6.3 |

## 3．5　3 章まとめ

本章では，スラスターが ON/OFF 入力である劣駆動宇宙機の姿勢・位置制御を検討した．2 章と同様に 2 次元面内での宇宙機の運動を取り扱い，2 つのスラスターが発生する回転モーメントが釣り合う場合と釣り合わない場合の 2 通りに分けてその制御系を設計した．

2 つのスラスターが発生する回転モーメントが釣り合う場合では，不変マニフォールドへの到達までに 4 つのステップを経る制御系を提案した．提案手法においては，一部を除いて各ステップにおけるスラスターON/OFF の切り替えタイミングはステップ毎の状態量の関数である．これにより提案手法は慣性モーメントや質量等のモデル誤差に対してロバスト性を増している．

2 つのスラスターが発生する回転モーメントが釣り合わない場合の制御手法としては，複数のマニフォールド間を遷移させるという考えを導入した．これにより，宇宙機の回転運動が可制御であれば，任意の推力が出せるスラスターがどのように取り付けられていても，宇宙機の位置と姿勢を共に所望の状態に制御が可能であることを示した．なお，宇宙機の質量や慣性モーメントのモデル化誤差に対するロバスト性を議論するには至らず，これは今後の課題である．

これらの提案手法の有効性は，それぞれの節で数値シミュレーションにより検証された．

# 4 章　3 次元劣駆動宇宙機の制御

## 4. 1　はじめに

2 章と 3 章では 2 次元面内の劣駆動宇宙機に対してその制御手法を議論した．宇宙機の姿勢・位置制御問題が 2 次元に投影できる範囲において，これらの制御手法により従来よりも少ないスラスター数で所望の姿勢・位置を達成することができる．

本章ではさらに極限までスラスター数を低減することを狙う．2 次元面内に投影することができない，すなわち，2 次元面外の入力も劣駆動であることを想定した，スラスター推力が可変である場合の 3 次元の劣駆動宇宙機の姿勢・位置の制御問題を取り扱う．

以下では，まず，宇宙機の 3 次元モデルについて述べる．その後，姿勢制御が可能なスラスター数とその位置・方向について検討する[*3)]．2 次元の場合と異なり，3 次元問題では姿勢制御に関しても劣駆動となり得るので，制御に必要なスラスターの条件を検討する必要がある．ここでは，3 基のスラスターにより 3 次元の姿勢制御が可能であることを示す．この姿勢制御の議論に続き，3 基のスラスターによる宇宙機の姿勢・位置制御について述べる．取り扱う制御問題は，Unilateral な拘束を有する 3 つのスラスター入力により 12 の状態量（姿勢・位置とこれらの速度）を目標とするものであるから，これまでの非ホロノミックシステムで議論されてきた制御問題よりも格段に劣駆動の程度が高い．最後に 4 章のまとめを述べる．

なお，本章の議論では宇宙機の質量や慣性モーメント等のモデル化誤差は考えない．3 次元の劣駆動宇宙機の目標姿勢・位置を達成することを第一の目標とする．

また，本章では全ての数式記号を改めて定義しなおす．したがって，2 章，3 章で定義した記号と同じものが別の意味で用いられる場合がある．2 章，3 章の数式記号と混同されないように注意されたい．

## 4. 2　宇宙機のモデル

外力の存在しない浮遊宇宙機を考え，質量と慣性モーメントは不変であるとする．スラスターの方向は宇宙機に固定されており，推力は正の範囲で可変であるとする．

以下，宇宙機の回転運動と並進運動の状態方程式について述べる．

### 4.2.1　宇宙機の回転運動

宇宙機の慣性主軸を機体座標系にとれば，回転の運動方程式は以下のようになる．

*3)　検討結果は文献[42]にて報告した．

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで，$\mathbf{J}$ は宇宙機の慣性モーメント行列，$\mathbf{T}$ はスラスターにより発生する機体座標系における入力トルクベクトル，$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}^T$ は機体座標系における角速度ベクトルである．

宇宙機の姿勢は以下のようにオイラーパラメータ $\mathbf{q}$ で表す．

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) & a_2 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) & a_3 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.2}$$

式(4.2)の $\mathbf{q}$ の定義において，$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T$ は回転軸を表すベクトルであり，$\psi$ はその軸まわりの回転角である．$\mathbf{q}$ の時間微分は，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ により以下のように表される．

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega} \tag{4.3}$$

ここで，

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

である．Fig.4.1 に示すように，機体固定座標系における $i$ 番目のスラスターの取り付け位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$，スラスター力の方向ベクトルを $\mathbf{d}_i$，その大きさを $f_i$ とすれば，スラスターが発生するトルク $\mathbf{T}_i$（機体固定座標系）は，

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{d}_i \cdot f_i \tag{4.5}$$

となる．この式(4.5)より，宇宙機全体に作用するトルク $\mathbf{T}$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \sum_{i=1}^{l} \mathbf{T}_i \\ &= \sum_{i=1}^{l} \mathbf{r}_i \times \mathbf{d}_i \cdot f_i \\ &= \mathbf{B}\mathbf{f} \end{aligned} \tag{4.6}$$

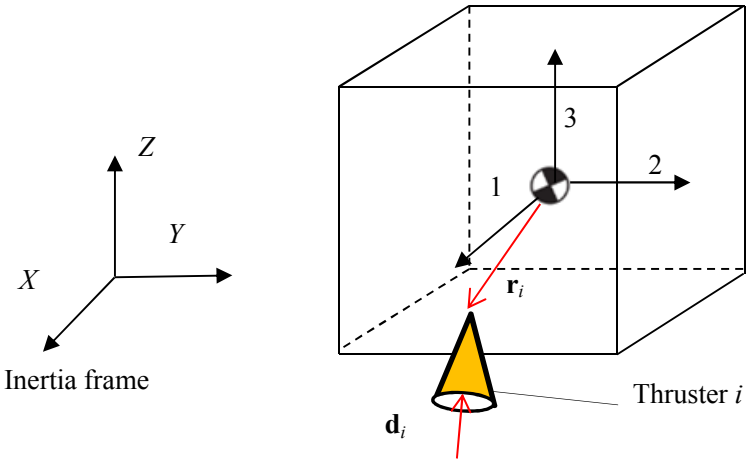



**Fig.4.1** Schematic image of a three-dimensional free floating spacecraft

ここで，$\mathbf{f}=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_l \end{bmatrix}^T$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_l \end{bmatrix}$，$\mathbf{b}_i=\mathbf{r}_i\times\mathbf{d}_i$ であり，$l$ はスラスターの数を表す．また，スラスターの出力は正の範囲で可変であるから，$f_i\geq 0$ ($i$=1~$l$)となる．

なお，次節において姿勢制御の議論を行うが，$f_i\geq 0$ であるために，非ホロノミックシステムに対して可制御性の十分条件を与える Sussmann[33]や Goodwine[32]の定理が適用できないことに注意されたい．

### 4.2.2　宇宙機の並進運動

慣性座標系上の宇宙機の位置を $\mathbf{p}=\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ と定義すれば，並進運動の方程式は以下のように表される．

$$M\ddot{\mathbf{p}}=\mathbf{F} \tag{4.7}$$

ここで, $M$ は宇宙機の質量，$\mathbf{F}$ は慣性座標系からみたスラスターが発生する並進力である．

続いて $\mathbf{F}$ をスラスター推力 $\mathbf{f}$ で表す. 機体座標系で $i$ 番目のスラスターが発生する並進力を $\mathbf{F}_i'$（機体座標系）とすれば,

$$\mathbf{F}_i'=\mathbf{d}_i\cdot f_i \tag{4.8}$$

である. これをスラスターの数で合計すれば, 機体座標系で宇宙機全体に加わる並進力 $\mathbf{F}'$ を得る．スラスターが $l$ 基であればその合計として，$\mathbf{F}'$ は,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'&=\sum_{i=1}^{l}\mathbf{F}_i'=\sum_{i=1}^{l}\mathbf{d}_i\cdot f_i\\&=\mathbf{D}\mathbf{f}\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \cdots & \mathbf{d}_l \end{bmatrix}$$

となる．さらに，座標変換行列 **A(q)**により機体座標系の並進力 **F′** を慣性座標系の並進力 **F** へ変換することで,

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{F}' \tag{4.10}$$

を得る．ここに，機体固定座標系から慣性座標系への座標変換行列はオイラーパラメータを用いて以下の式(4.11)により表される．

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2\left(q_4^2+q_1^2\right)-1 & 2\left(q_1q_2-q_4q_3\right) & 2\left(q_1q_3+q_4q_2\right) \\ 2\left(q_1q_2+q_4q_3\right) & 2\left(q_4^2+q_2^2\right)-1 & 2\left(q_2q_3-q_4q_1\right) \\ 2\left(q_1q_3-q_4q_2\right) & 2\left(q_2q_3+q_4q_1\right) & 2\left(q_4^2+q_3^2\right)-1 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

なお，スラスターが 3 基であり，かつ，これらの発生するトルクベクトルが独立である場合は式(4.6)中の **B** が正則となるので **f=B**$^{-1}$**T** と表せる．これを式(4.9)に代入すれば,

$$\mathbf{F}' = \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{T} \tag{4.12}$$

である．さらに式(4.12)を式(4.10)に代入すれば，並進力 **F**（慣性座標系）は以下のように表される．

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{T} \tag{4.13}$$

式(4.13)より, スラスターが 3 基の場合は並進力 **F** とトルク **T** は従属関係にある. すなわち, スラスターが 3 基の宇宙機では所望の回転トルクと所望の並進力をそれぞれ独立に出力することができない.

## 4. 3　姿勢制御が可能なスラスター条件

本節では宇宙機が，直交する 3 軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生可能なスラスターの条件，直交する 2 軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生可能なスラスターの条件，について述べる．直交する 3 軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクが発生可能であれば，従来の線形制御により姿勢制御が可能である．また，直交する 2 軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生でき，かつ，これら 2 軸に直交する第 3 軸回りのトルクが恒等的に 0 であれば，これまでに提案された劣駆動宇宙機の姿勢

制御系[19-27]により姿勢制御が可能である．ここで，第 1~3 軸は必ずしも慣性主軸である必要はない．

上記の 2 つのケースは，宇宙機に備わるスラスターが 4 基である場合と 3 基である場合に対応することを以下で述べる．ただし，スラスターが 3 基である場合は，さらに，直交する 2 軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクが発生可能であり，これらに直交する第 3 軸回りには正(または負)のみのトルクが発生する第 3 のケースが生じる．この第 3 のケースは本章で取り扱う劣駆動宇宙機特有の制御問題であり，既存の制御系が適用できない．そこで，第 3 のケースに対してはスラスターの条件を示すとともに制御系の設計も行い，数値シミュレーションによりその有効性を検証する．

### 4.3.1 直交する 3 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクが発生可能なケース

2 基のスラスターでは，明らかに直交する 3 軸回りに任意の大きさのトルクを発生することはできないので，3 軸の姿勢制御のためには少なくともスラスターは 3 基必要である．また，スラスターからは正のみの出力しか得られないため，直交する 3 軸回りのトルクを“正負双方向の任意の大きさ”とするには，さらにもう 1 基以上，すなわち，4 基以上のスラスターが必要であると考えられる．このような考えのもと，これまでに，4 基のスラスターを用いて直交する 3 軸まわりに任意の大きさのトルクを発生できることが数値的観点[31]と幾何学的観点[37]から示されている．ただし，これらの報告ではスラスターの配置・方向が限定されていたので，本項ではより一般的なスラスターの配置・方向へ拡張する．4 基のスラスターを備える宇宙機を想定し，直交する 3 軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生可能なスラスター配置・方向の条件を解析的に示す．

まず，3 基のスラスターがそれぞれ発生する独立なトルクベクトルを定義する．議論を簡単にするため，第一のスラスターが発生するトルクベクトル $\mathbf{b}_1$ が第 1 軸に一致すると仮定する．さらに第二のスラスターが発生するトルクベクトル $\mathbf{b}_2$ が第 1 軸と第 2 軸で張られる面内となるように第 2 軸を仮定する．この仮定に沿うように座標変換するだけなので，議論が一般性を失うことはない．このとき，3 つのスラスターに対応する $\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$，$\mathbf{b}_3$ は，第 1 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_1$ と第二軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_2$，第三軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_3$ を用いて以下のように表すことができる．

$$\mathbf{b}_1 = |\mathbf{b}_1|\mathbf{e}_1 \tag{4.14}$$

$$\mathbf{b}_2 = \chi_1\mathbf{e}_1 + \chi_2\mathbf{e}_2 \tag{4.15}$$

$$\mathbf{b}_3 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \tag{4.16}$$

ここで，$\chi_1$, $\chi_2$，$\lambda_1$～$\lambda_3$ は係数である．$\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$，$\mathbf{b}_3$ は独立であることを仮定したので，$\chi_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ となる．

$\mathbf{b}_1$～$\mathbf{b}_3$ は 3 次元のベクトルであるから，残りの 4 基目のスラスターが発生するトルクベクトル $\mathbf{b}_4$ は $c_1$～$c_3$ を係数とするこれらの線形結合として以下のように表すことができる．

$$\mathbf{b}_4 = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + c_3 \mathbf{b}_3 \tag{4.17}$$

式(4.6)に $\mathbf{b}_1$～$\mathbf{b}_4$ を代入すれば，トルクベクトル $\mathbf{T}$ として以下の式(4.18)を得る．

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \mathbf{b}_1 f_1 + \mathbf{b}_2 f_2 + \mathbf{b}_3 f_3 + \mathbf{b}_4 f_4 \\
&= \begin{bmatrix} |\mathbf{b}_1|(f_1 + c_1 f_4) + \chi_1 (f_2 + c_2 f_4) + \lambda_1 (f_3 + c_3 f_4) \\ \chi_2 (f_2 + c_2 f_4) + \lambda_2 (f_3 + c_3 f_4) \\ \lambda_3 (f_3 + c_3 f_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |\mathbf{b}_1| & \chi_1 & \lambda_1 \\ 0 & \chi_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 + c_1 f_4 \\ f_2 + c_2 f_4 \\ f_3 + c_3 f_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

式(4.18)において，トルク $\mathbf{T}$ の各成分が正・負双方向の任意の値を取り得るには，$\begin{bmatrix} f_1 + c_1 f_4 & f_2 + c_2 f_4 & f_3 + c_3 f_4 \end{bmatrix}^T$ の各成分が正・負双方向の値をとらなければならない．$f_i \geq 0$ ($i$=1~4)であるから，この必要条件として $c_1$～$c_3$ が負となることは明らかである．

$c_1$～$c_3$ が負であることは，4 基目のスラスターが発生するトルクベクトルが，他の 3 基のスラスターが発生するトルクベクトルの反対方向の成分を有することを意味する．このような条件を満たす 4 基のスラスターを持てば，宇宙機は直交する 3 軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクを得ることが可能である．

### 4.3.2 直交する 2 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクが発生可能であり，かつ，第 3 軸回りのトルクが 0 となるケース

4.3.1 項にも述べたように，スラスターが 3 基以下では直交する 3 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生させることができない．ただし，直交する 2 つの軸（以下では，第 1 軸・第 2 軸とする）まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生することが可能である．明らかに 2 基のスラスターでは直交する 2 つの軸まわりに任意のトルクを発生することができないので，本項では 3 基のスラスターを仮定して，これらが第 1 軸・第 2 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生可能な条件を示す．その中でも，本項の議論は 2 軸に直交する第 3 軸まわりのトルクが常に 0 であるケースに対してスラス

ターの取り付け位置と方向を議論する．

まず，トルクベクトル $\mathbf{b}_1$～$\mathbf{b}_3$ が第 3 軸まわりの成分を持つと仮定する．すると，3 つのスラスターによる合計トルクの第 3 軸まわりの成分が 0 となるには，

$$f_1[\mathbf{b}_1]_3 + f_2[\mathbf{b}_2]_3 + f_3[\mathbf{b}_3]_3 = 0 \tag{4.19}$$

でなければならない．ここに，$[\mathbf{b}]_3$ はベクトル $\mathbf{b}$ の第 3 軸まわりの成分を意味する．このとき $f_1$～$f_3$ の自由度は 1 つ減り，大きさを自由に変えることができるスラスターは 2 つだけになる．その結果，第 1 軸・第 2 軸まわりに任意の大きさの正負双方向のトルクが発生し得ないことは明らかである．

したがって，$f_1$～$f_3$ の自由度を減らさずに第 3 軸まわりのトルクを常に 0 にする 1 つの解は，上段で仮定した前提条件が成り立たないことである．つまり，その解は 3 つのトルクベクトル $\mathbf{b}_1$～$\mathbf{b}_3$ の第 3 軸まわりの成分がすべて 0 になることである．このとき，$\mathbf{b}_1$～$\mathbf{b}_3$ は第 1 軸・第 2 軸で張る平面上のベクトルであるから，4.3.1 項と同様の議論が成り立つ．すなわち，4.3.1 項で 4 基のスラスター・3 軸回りの正負のトルクで議論していたところを，3 基のスラスター・2 軸回りのトルクへ置き換えればよい．4.3.1 項の結果を用いれば，3 基目のスラスターが発生するトルクベクトルが，他の 2 基のスラスターが発生するトルクベクトルの反対方向の成分を有することで，宇宙機は直交する 2 つの軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生可能である．

### 4.3.3 直交する 2 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクが発生可能であり，これらのトルクに付随して第 3 軸回りに正のトルクが生じるケース

4.3.2 項では，第 1 軸・第 2 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生でき，第 3 軸まわりのトルクが常に 0 である場合を取り扱った．このとき，宇宙機の 3 次元姿勢が制御可能であることは文献[19~27]の結果からもわかるが，この条件は必要十分条件とは限らない．

ここでは， 3 基のスラスターを考え，4.3.2 項と同様に第 1 軸・第 2 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生できるとする．ただし，トルクベクトルの第 3 成分は 0 ではなく，第 3 軸まわりにもトルクが生じる場合について議論する．このとき，第 3 軸まわりの成分が 0 ではないので，一般に $\mathrm{rank}(\mathbf{B}) = 3$ と仮定できる．以下では $\mathbf{B}$ の逆行列を用いて，$f_i \geq 0 (i=1\sim3)$ をトルク $\mathbf{T}$ の関係式へ変換し，第 1 軸・第 2 軸まわりに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生できるスラスター位置と方向ベクトルの条件を導いていく．

4.3.1 項と同様に 2 基のスラスターに対応する $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ は第 1 軸・第 2 軸が張る平面上にあり，$\mathbf{b}_1$ の方向に第 1 軸を定義する．$\mathbf{b}_3$ も 4.3.1 項と同様の定義とするが，以降の式表記を簡

単にするために式(4.16)の表現から代え，$\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$，および，これらに直交する $\mathbf{e}_3$ を用いた以下の表現とする．

$$\mathbf{b}_3 = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 \tag{4.20}$$

このとき，行列 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]$ は，

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} |\mathbf{b}_1| & \chi_1 & c_1|\mathbf{b}_1| + c_2\chi_1 \\ 0 & \chi_2 & c_2\chi_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

となる．式(4.21)より，$\mathbf{B}$ の逆行列を計算すると次のようになる．

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{|\mathbf{b}_1|} & \dfrac{-\chi_1}{|\mathbf{b}_1|\chi_2} & \dfrac{-c_1}{\lambda_3} \\ 0 & \dfrac{1}{\chi_2} & \dfrac{-c_2}{\lambda_3} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

式(4.6)より $\mathbf{f} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{T}$ とし，これに式(4.22)を代入すれば，$f_3 \geq 0$，$f_2 \geq 0$，$f_1 \geq 0$ の条件は，順に以下の 3 つの不等式となる．

$$\frac{1}{\lambda_3}T_3 \geq 0 \tag{4.23}$$

$$\frac{1}{\chi_2}T_2 \geq c_2\left(\frac{1}{\lambda_3}T_3\right) \tag{4.24}$$

$$T_1 \geq \frac{\chi_1}{\chi_2}T_2 + c_1|\mathbf{b}_1|\left(\frac{1}{\lambda_3}T_3\right) \tag{4.25}$$

式(4.23)は，3 番目のスラスターを ON にすると，$\lambda_3$ の符号に応じて，第 3 軸まわりに正または負の一方向のトルク $T_3$ が生じることを意味する．式(4.24)より，右辺の括弧内が正または 0 なので，$c_2 < 0$ であれば，2 番目・3 番目のスラスターを用いて第 2 軸まわりに正負両方向のトルクを生じさせることができる．最後に式(4.25)において，右辺第 2 項は $c_1 < 0$

であれば負となる．第 1 項はスラスター2 の大きさと取り付け位置・方向に依存するが，負もしくは絶対値が小さな正の範囲に抑えることができる（例えば，$\chi_1$ を小さくすればよい）．ゆえに，式(4.25)は，3 つのスラスターを用いて，第 1 軸まわりに正負両方向のトルクを生じさせることができることを意味する．

上記をまとめれば，$c_1 < 0$ かつ $c_2 < 0$ であれば，第 1 軸・第 2 軸まわりに任意比のトルクを発生させることができる．トルクの比を任意に調整できれば，制御に要する時間は変化するが同じ形状の履歴を実現できる．

ただし式(4.23)より，第 3 軸まわりに生じるトルクは，スラスター3 の取り付けによって決まる正（または負）の一方向である．この制限は，第 3 軸まわりの初期角速度が負（または正）の場合しか，目標姿勢に整定できないことを意味するように思えるかもしれない．しかし，式(4.1)の右辺第 2 項にあるように，宇宙機にはジャイロ効果に基づく非線形項が存在する．そのため，第 1 軸・第 2 軸まわりの回転運動を制御しつつ，さきに第 3 軸まわりの角速度を正（もしくは負）に制御できれば，任意の最終姿勢への制御が可能になる．このような手順に基づく制御系の設計法については，次の 4.3.4 項で説明する．

また，上記の議論を分りやすくするため，以下にスラスター位置・方向に対する設計例を示しておく．Fig.4.2 のように，宇宙機を 1 辺の長さが 2 の均一な立方体と考え，質量中心に原点を持つ座標系 1-2-3 を定義する．スラスター1 とスラスター2 の取り付け位置を Table4.1 のようにする．また，それらの取り付け方向は第 3 軸と平行にする．このとき，式(4.15)における 2 つの変数は，$\chi_1 = 0$，$\chi_1 = -1$ である．第 1 軸と第 2 軸まわりに任意比のトルクを発生させることができるようにするには，$c_1 < 0$ かつ $c_2 < 0$ であればよい．Fig.4.3(a)のように，スラスター3 の方向 $\mathbf{d}_3$ を球座標 $\Phi_1$，$\Phi_2$ で表現すれば，これらの条件を満たす領域は Fig.4.3(b)のように得られる．

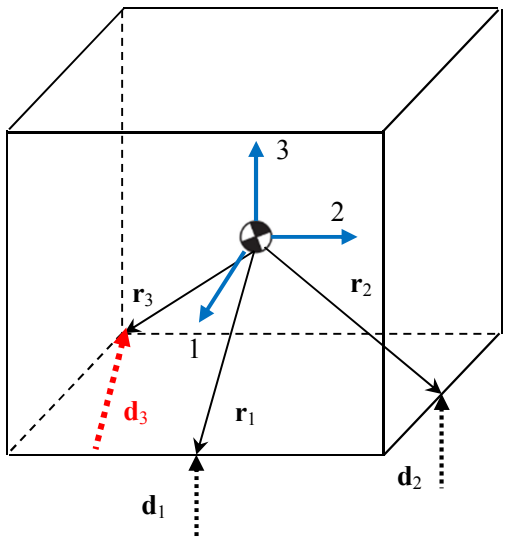
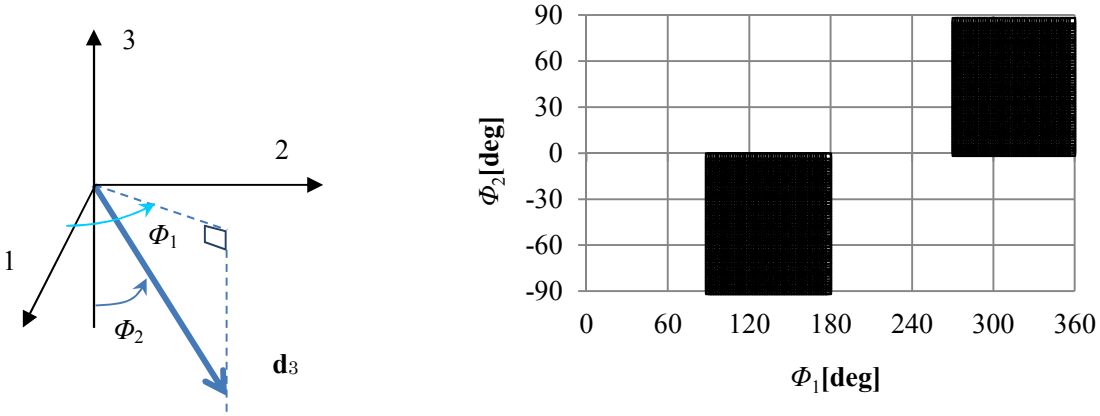



**Fig.4.2** Schematic image of thruster setting for examples

**Table4.1** Configuration of thrusters' direction and position

| | |
|---|---|
| $\mathbf{r}_1$ | $[0 \quad 1 \quad -1]^T$ |
| $\mathbf{r}_2$ | $[1 \quad 0 \quad -1]^T$ |
| $\mathbf{r}_3$ | $[-1 \quad -1 \quad -1]^T$ |
| $\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2$ | $[0 \quad 0 \quad 1]^T$ |




(a) Definition of $\Phi_1$ and $\Phi_2$ for $\mathbf{d}_3$ (b) The acceptable region of $\mathbf{d}_3$

**Fig.4.3** Design of the third thruster direction

### 4.3.4 4.3.3 項のシステムに対する制御系

本項では 4.3.3 項のケースに対してその姿勢制御方法を検討する．

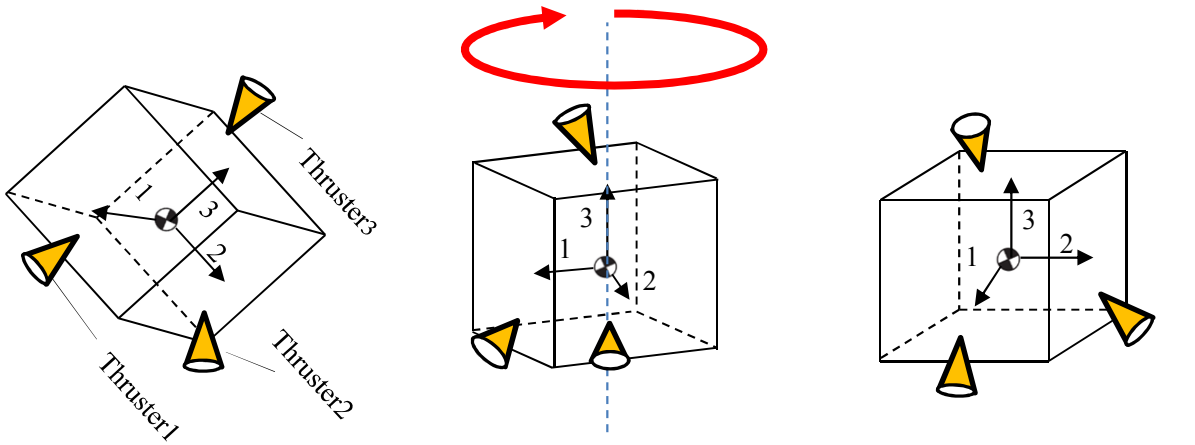
4.3.3 項のシステムは，直交する 3 軸回りにトルクを発生することができるので，厳密な意味での劣駆動系ではない．第 3 軸回りのトルクが正（または，負）のみしか取り得ない入力拘束を有する系である．本項にて設計する制御シーケンスでは，最初に正負双方向の任意の大きさのトルクを取り得る第 1 軸と 2 軸回りの姿勢を目標状態へ制御する(Fig.4.4(b) の Step1)．この際，宇宙機の第 3 軸は目標姿勢の軸に一致し，宇宙機はその回りのシングルスピン状態となる．ここで，正（または，負）のトルクのみでシングルスピンを停止するには，回転方向が第 3 軸まわりに負（または，正）である必要がある．そこで，Step1 では

シングルスピン状態を達成するまでの第 1・2 軸回りの角速度の履歴を制御する過程において，回転運動に関する非線形項（ジャイロ効果）を活用して第 3 軸まわりの角速度の正・負を所望のものとしておく．このようなシングルスピン状態を達成した後は，目標姿勢となるようにシングルスピンを停止する（Fig.4.4(c)の Step2）．

上記の方法は，不変マニフォールドを用いる切り替え制御に類するものである．

以降では，議論を簡単にするために第 1〜3 軸は慣性主軸であるとする．4.3.3 項で議論したトルク $T_1$〜$T_3$ は慣性主軸まわりのトルクと必ずしも一致しないが，これらの組み合わせにより第 1 軸・第 2 軸まわりに任意のトルクを発生することは可能である．本項では，第 1 軸・第 2 軸まわりに任意のトルク $T_1$ と $T_2$ が発生でき，$\lambda_3$ が正，すなわち，第 3 軸まわりに正のみのトルク $T_3$ を発生させることができると仮定する．また，目標姿勢は一般性を失わずに $\mathbf{q}=[\,0 \quad 0 \quad 0 \quad \pm 1\,]^T$ とする．

以下，Step1 と Step2 の制御系について述べていく．




(a) Initial attitude　(b) Single spin around the third axis (Step1)　(c) Stopping the single spin at a target attitude (Step2)

**Fig.4.4** Control strategy for attitude control

**(a) Step1：第 1 軸・第 2 軸まわりの回転運動制御**　Step1 の制御系を，Lyapunov の第 2 定理に基づいて導いていく．

Lyapunov 関数の候補として次の正定関数 $S_1$ を考える．

$$S_1 = q_1^2 + q_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \tag{4.26}$$

ここで，$S_1$=0 であれば第 1 軸・2 軸まわりの状態量 $q_1$，$q_2$，$\omega_1$，$\omega_2$ が 0，すなわち，第 3 軸が目標の軸に一致した状態で，宇宙機は第 3 軸回りにシングルスピンしている状態となる．式(4.26)を時間微分し，これに式(4.1)と(4.2)を代入すれば，$S_1$ の時間微分は次のようになる．

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= 2q_1\dot{q}_1 + 2q_2\dot{q}_2 + 2\dot{\omega}_1\omega_1 + 2\dot{\omega}_2\omega_2 \\ &= \left(g_1 + \frac{2T_1}{J_1}\right)\omega_1 + \left(g_2 + \frac{2T_2}{J_2}\right)\omega_2\end{aligned} \tag{4.27}$$

ここに,

$$g_1 = q_1q_4 + q_2q_3 + 2\frac{J_2 - J_3}{J_1}\omega_2\omega_3, \quad g_2 = q_2q_4 - q_1q_3 + 2\frac{J_3 - J_1}{J_2}\omega_3\omega_1$$

である.

$S_1$ の時間微分が負定であれば，$S_1$ は Lyapunov 関数となる．よって，Lyapunov の第 2 定理に従い，平衡点 $q_1$=0，$q_2$=0，$\omega_1$=0，$\omega_2$=0 へ状態は漸近する．$S_1$ の時間微分を負定とするには，$K_1$，$K_2$ を任意の正の数とおいてトルク $T_1$，$T_2$ を,

$$T_1 = -K_1\omega_1 - \frac{J_1g_1}{2} \tag{4.28}$$

$$T_2 = -K_2\omega_2 - \frac{J_2g_2}{2} \tag{4.29}$$

のように定める．$S_1$ の時間微分が負定となることは，式(4.28)，(4.29)を式(4.27)に代入し,

$$\dot{S}_1 = -\frac{2K_1}{J_1}\omega_1^2 - \frac{2K_2}{J_2}\omega_2^2 \le 0 \tag{4.30}$$

となることから確認できる.

本項の冒頭で述べたように，Step1 の制御では非線形項（第 1 軸・第 2 軸回りの角速度により誘起される第 3 軸回りのジャイロ効果）を活用して第 3 軸回りの角速度を負とする操作も行う. このためには式(4.28)と(4.29)の入力に角速度の履歴を制御する項を加える. 以下, その方法について述べる.

式(4.1)より $\omega_3$ に関する運動方程式を改めて書き下せば,

$$\dot{\omega}_3 = \frac{1}{J_3}T_3 + h_3 \tag{4.31}$$

となる．ここに,

$$h_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}\omega_1\omega_2$$

である．4.3.3 項に述べたように $T_1$ と $T_2$ の値に応じて $T_3$ は何らかの正の値をとるものの，ジャイロ効果項 $h_3$ を比較的大きな負値とすれば $\dot{\omega}_3$ も負となることが期待できる．$\dot{\omega}_3$ が負である状態を保ち続ければ，$\omega_3$ も負へ遷移することは明らかである．

$h_3$ を負にするためには，$J_1 > J_2$ の場合は $\omega_1$-$\omega_2$ 平面上の第 2・第 4 象限へ，$J_1 < J_2$ の場合は第 1・第 3 象限へ角速度 $\omega_1,\omega_2$ を遷移させ，その状況を保持すればよい．これは式(4.28), (4.29)の入力にさらに第 3 項目を加えた，以下の式(4.32)，(4.33)の入力へ修正することで達成される．

$$T_1 = -K_1\omega_1 - \frac{J_1 g_1}{2} - J_1\bar{K}\omega_2 \tag{4.32}$$

$$T_2 = -K_2\omega_2 - \frac{J_2 g_2}{2} + J_2\bar{K}\omega_1 \tag{4.33}$$

式(4.32)，(4.33)における第 3 項目は，$\omega_1$-$\omega_2$ の軌道を所望の象限に制御するためのものである．ここで，第 3 項目における $\bar{K}$ は設計パラメータであり，その設定方法は後段に述べる．なお，この第 3 項目は $S_1$ の時間微分に影響せず，式(4.32)，(4.33)を式(4.27)に代入しても，$S_1$ の時間微分は式(4.30)と同じものとなる．これは，式(4.32), (4.33)の第 3 項目は $q_1$=0, $q_2$=0, $\omega_1$=0，$\omega_2$=0 への漸近収束を阻害しないことを意味する．

さらに以下において，$\omega_1$-$\omega_2$ 平面上の軌道が $h_3 < 0$ である領域へ動くように $\bar{K}$ を定める．$h_3$ の時間微分は，式(4.1)より，

$$\begin{aligned}\dot{h}_3 &= \frac{J_1 - J_2}{J_3}\left(\dot{\omega}_1\omega_2 + \omega_1\dot{\omega}_2\right) \\ &= \frac{J_1 - J_2}{J_3}\left\{\frac{\omega_2}{J_1}\left(T_1 + \left(J_2 - J_3\right)\omega_2\omega_3\right) + \frac{\omega_1}{J_2}\left(T_2 + \left(J_3 - J_1\right)\omega_3\omega_1\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.34}$$

である．$\bar{K}$ を以下のように設定すれば，式(4.34)より得る $h_3$ の時間微分を負とすることができる．

$$\bar{K} = \frac{\omega_1\omega_2\left(\frac{K_1}{J_1} + \frac{K_2}{J_2}\right) + \frac{g_1}{2}\omega_2 + \frac{g_2}{2}\omega_1 - \omega_3\left(\sigma_1{\omega_2}^2 + \sigma_2{\omega_1}^2\right)}{{\omega_1}^2 - {\omega_2}^2} - \kappa\,\mathrm{sgn}\left(\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\sigma_3\right) \tag{4.35}$$

ここで,

$$\sigma_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1},\ \sigma_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2},\ \sigma_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3},\quad \kappa > 0$$

である．式(4.34)に式(4.32)，(4.33)を代入し，さらに式(4.35)の $\bar{K}$ を代入すれば,

$$\dot{h}_3 = -\kappa|\sigma_3| < 0 \tag{4.36}$$

となる．これより，式(4.35)の $\bar{K}$ により $h_3$ の時間微分が負となることが確認できる．

なお $\omega_1^2 \approx \omega_2^2$ となれば，$\bar{K}$ は絶対値が極めて大きくなり，大きな制御トルク $T_1$，$T_2$ が必要となる．このような場合は，式(4.32)，(4.33)の入力を止め，$\bar{K}$ がシステムの許容する値となった後に入力を再開すればよい．また，$\omega_3$ が負となる以前に $\omega_1$，$\omega_2$ が目標値へ到達する場合は，一旦 $h_3 < 0$ である領域へ $\omega_1$,$\omega_2$ を遷移させ，上記で述べた第 1 軸・第 2 軸まわりの制御を $\omega_3 < 0$ を達成するまで繰り返す.

**(b) Step2:シングルスピンの停止**　第 1 軸・第 2 軸まわりの制御が完了した後は，$q_3$，$\omega_3$ を 0 とするべく，第 3 軸回りのトルク $T_3$ を加える．このとき，$T_1$=0，$T_2$=0 とすれば，$\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ なので，$T_3$ により第 1 軸・第 2 軸まわりの姿勢は変動せず，目標姿勢を達成できる．このような $T_3$ は，例えば

$$T_3 = -K_3 q_3 q_4 - K_{3d}\omega_3 \tag{4.37}$$

で与えられる（$K_3$ と $K_{3d}$ は正のゲイン）．Step1 の制御により $\omega_3$ は負となっているから，$K_3$ に対して $K_{3d}$ を充分に大きくしてオーバーシュートが生じないようにすれば, 正（または負）の $T_3$ により $q_3$ および $\omega_3$ が 0 へ漸近する．

### 4.3.5　数値シミュレーションによる検証

4.3.3 項に示した条件における 3 基のスラスターを有する宇宙機の姿勢を制御できることと 4.3.4 項に示した制御系の有効性を検証するために, 以下の数値シミュレーションを行う．

**(a) 宇宙機のモデル**　シミュレーションに用いるモデルの慣性モーメントを,

$J_1$=15.0[kgm$^2$] ，$J_2$=10.0[kgm$^2$]，$J_3$=20.0[kgm$^2$]

とする．また，スラスター出力は正の値で可変であるとし，その値の上限を 12[N]とする．

なおスラスターは, 4.3.3 項に示した条件を満たすように, その位置と向きのベクトルを Table 4.2 のように設定する．このとき，式(4.21)の行列 **B** は次のようになる．

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' \tag{4.38}$$

ここに,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.17 & 0.036 \\ 0.17 & 0.99 & 0.031 \\ -0.031 & -0.036 & 1.0 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.4 \\ 0 & -1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.004 \end{bmatrix}$$

とする.

**Table 4.2** Configuration of thrusters' direction and position in the simulation

| | |
|---|---|
| $\mathbf{r}_1$ | $\begin{bmatrix} -0.20 & 1.0 & -0.96 \end{bmatrix}^T$ |
| $\mathbf{r}_2$ | $\begin{bmatrix} -1.0 & -0.14 & -0.97 \end{bmatrix}^T$ |
| $\mathbf{r}_3$ | $\begin{bmatrix} -0.26 & 0.32 & -1.0 \end{bmatrix}^T$ |
| $\mathbf{d}_1$ | $\begin{bmatrix} -0.036 & 0.031 & -0.99887 \end{bmatrix}^T$ |
| $\mathbf{d}_2$ | $\begin{bmatrix} -0.036 & 0.031 & -0.99887 \end{bmatrix}^T$ |
| $\mathbf{d}_3$ | $\begin{bmatrix} -0.84 & 0.25 & 0.48 \end{bmatrix}^T$ |

式(4.38)において，**A** は 3 基の各スラスターが発生するトルクベクトルを慣性主軸へ座標変換する行列である．よって，4.3.3 項で議論した姿勢制御が可能となる条件を適用する際には **B** を **B′** に置き換えればよい．**B′** の各成分をみれば，まず，式(4.15)における $\chi_1$ と $\chi_2$ はそれぞれ，$\chi_1 = 1$，$\chi_2 = 0$ である．さらに，**B′** の成分は式(4.20)における $c_1$ ，$c_2$，$\lambda_3$ を $c_1$ = -0.4, $c_2$ = -0.8, $\lambda_3$ = 0.004 とするので, 4.3.3 項で導いた姿勢制御が可能となる条件を満たしている.

**(b) 初期姿勢と目標姿勢**　宇宙機の初期状態は,

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.944 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

とし，目標状態を **q = 0**，**ω=0** とする．

**(c) 制御系**　Step1 における制御系は，$K_1 = 1$，$K_2 = 1$ として，

式(4.32)　：　$T_1 = -\dfrac{g_1 J_1}{2} - J_1 \bar{K} \omega_2 - \omega_1$

式(4.33)　：　$T_2 = -\dfrac{g_2 J_2}{2} + J_2 \bar{K} \omega_1 - \omega_2$

とし，式(4.35)の $\bar{K}$ において $\kappa$=1 とする．Step2 の制御は，$T_1 = 0$，$T_2 = 0$ のもとに次の $T_3$ を加える．

式(4.37)　：　$T_3 = -0.01 q_3 q_4 - \omega_3$

Fig.4.5～Fig.4.8 にシミュレーション結果を示す．Fig.4.5 と Fig.4.6 は，それぞれ宇宙機の姿勢角と角速度の時間履歴である．Step1 として，第 1 軸・第 2 軸まわりの制御は 300 秒付近までに完了しており，この間に $\omega_3$ が負へ遷移している．その後，Step2 として第 3 軸まわりの回転運動が制御され，全ての状態量が目標である 0 になっている．Fig.4.7 は $\omega_1$-$\omega_2$ 平面上での姿勢角速度の軌道である．角速度の軌道は $h_3$ を負とする領域上にあり，$\omega_3$ を負とするための角速度の軌道制御が有効に働いたことが確認できる．Fig.4.8 は 3 つのスラスター出力の時間履歴である．スラスター出力が入力拘束である 0[N]から 12[N]の間に収まっていることに着目されたい．

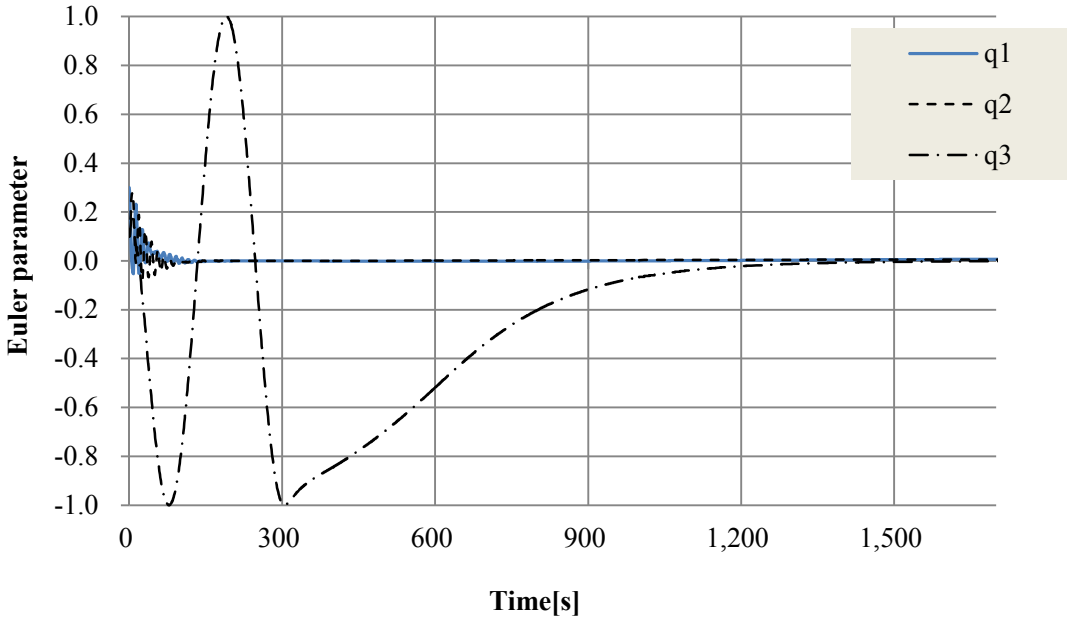



**Fig.4.5** Time history of Euler parameters

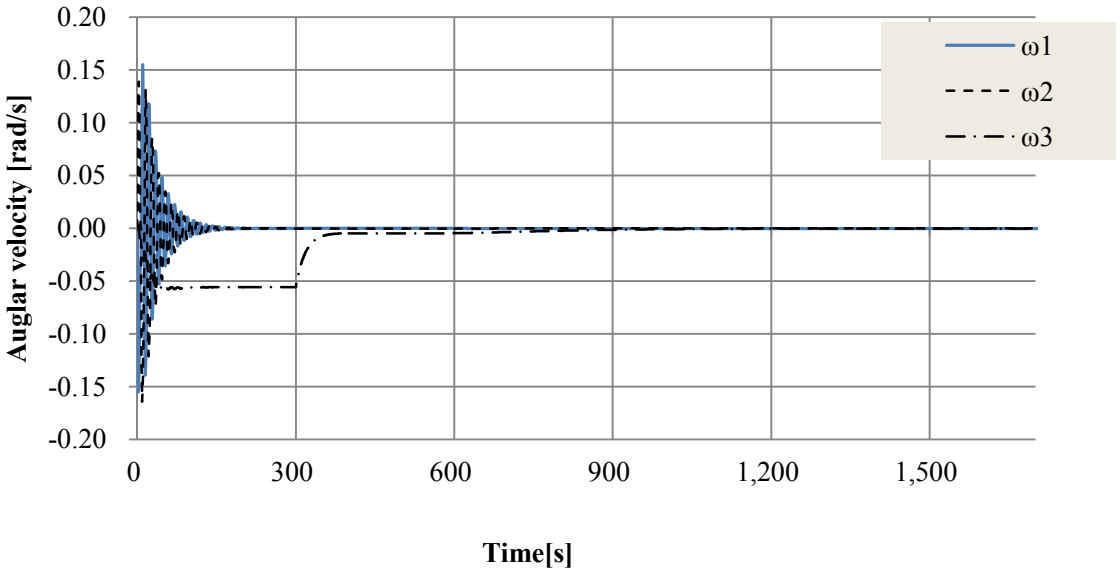



**Fig.4.6** Time history of angular velocities: $\omega_1$, $\omega_2$

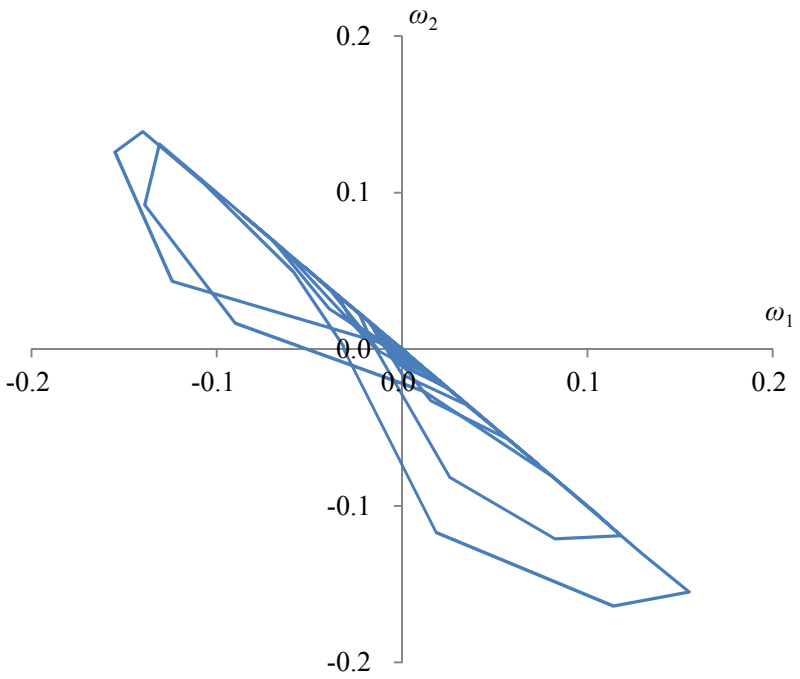
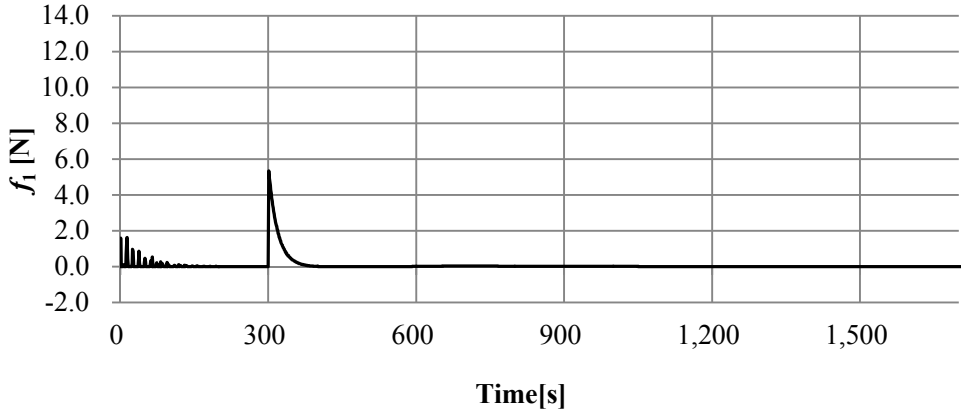
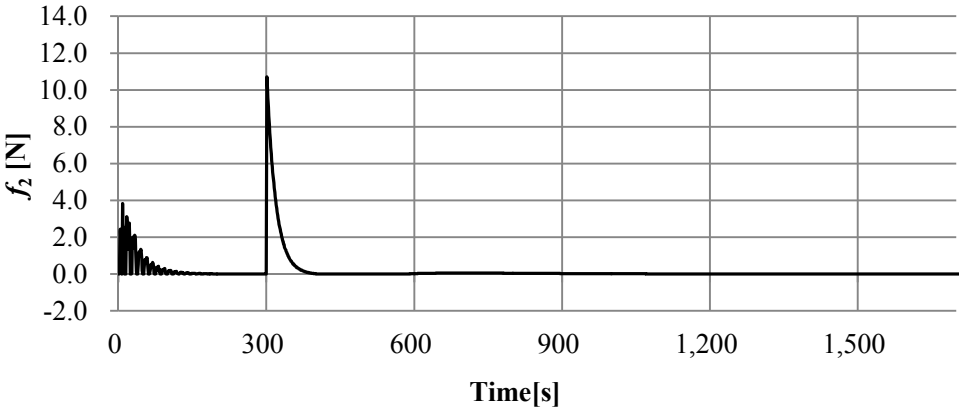


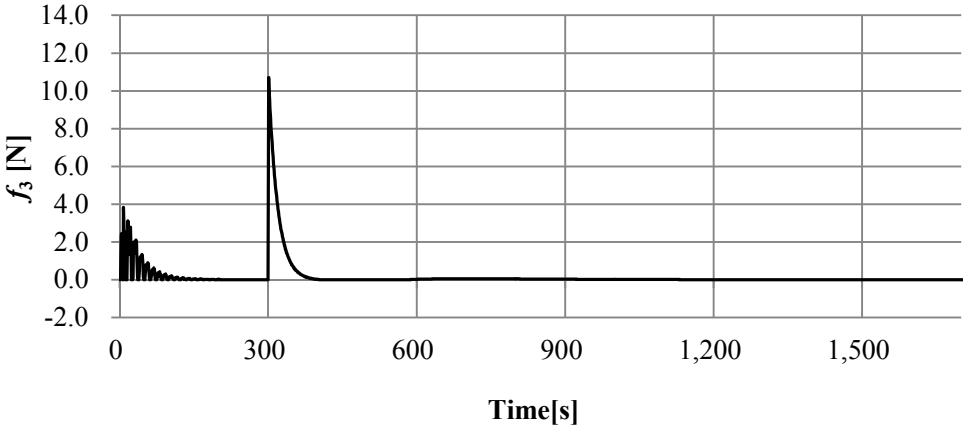

**Fig.4.7** Trajectory of angular velocities:$\omega_1$, $\omega_2$




(a) Thruster1




(b) Thruster2




(c) Thruster3

**Fig.4.8** Time histories of thruster forces

## 4.4　3 基のスラスターによる姿勢・位置の同時制御

本節では 3 基の方向が不可変であるスラスターによる宇宙機の姿勢・位置制御について述べる．吉村ら[44]により 4 基のスラスターによる宇宙機の姿勢・位置の開ループ制御も提案されているが，スラスターがある 1 方向のみを向いた平行配置に限定した議論となっている．本節では 4.3.3 項に示したスラスター条件とする．すなわち，吉村らの報告よりスラスター数は 1 基少なく 3 基であり，平行配置以外の条件を含むものとする．さらに，並進運動に関する制御が行い易いように，以下の 3 点を仮定する．

(i)　宇宙機の第 1 軸・第 2 軸・第 3 軸は慣性主軸に一致する．

(ii)　第 3 軸方向の並進力が正・負双方向の値を取りうる．

(iii)　1 基以上のスラスターにおいて，その推力方向ベクトルが第 3 軸方向以外の成分を有する．

(ii)の仮定のためには，いずれか 2 つのスラスターの方向が，第 3 軸に関して正と負の両方向となるようにスラスターを配置すればよい. このようなスラスター配置は例えば Fig.4.9 のようになる．Fig.4.9 ではスラスター1 と 2 が第 3 軸に関し正の方向，スラスター3 が第 3 軸に関して負の方向である．

以下，制御系の設計，および，その有効性を検証するための数値シミュレーション結果を示す．なお，一般性を失わずに目標位置を原点，目標姿勢を $\mathbf{q}=[\ 0\quad 0\quad 0\quad \pm 1\ ]^T$ とおいて議論を進める．

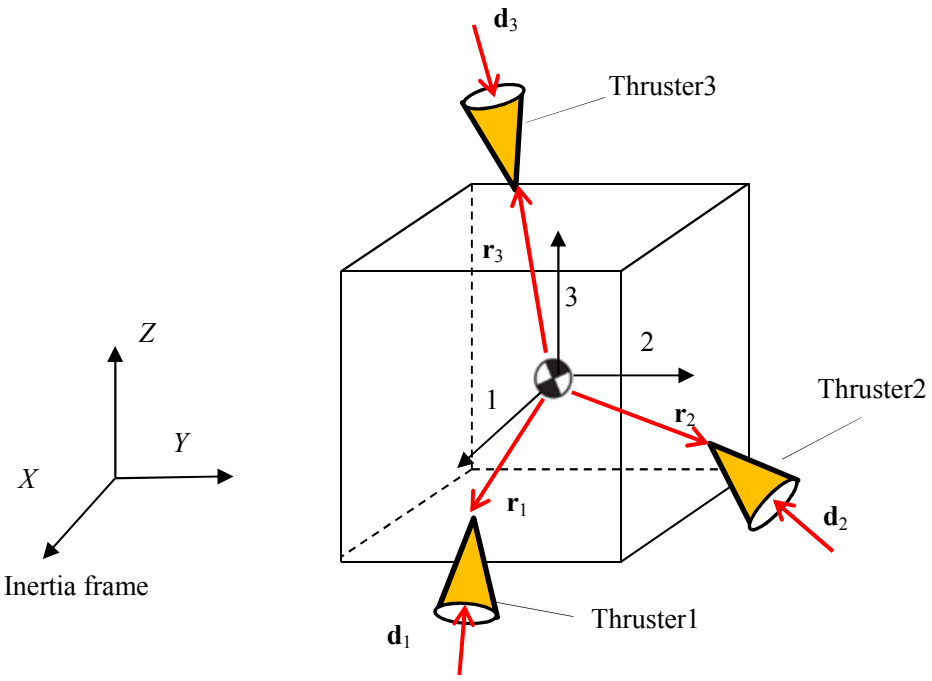



**Fig.4.9** Schematic image of a free floating spacecraft in Section 4.4

### 4.4.1 制御系設計

本節で取り扱う問題は入力の数 3 に対して制御するべき状態量の数が 12 である．その差は 9 であり，従来議論されてきた劣駆動系の制御問題よりもはるかに多い．これまでに取り扱われてきた具体的な問題の多くは制御するべき自由度と入力数の差は 1，ないし，2 程度である[3-29].

本節では，このような劣駆動の程度が増したシステムに対して，3 つの不変マニフォールドによる切り替え制御を検討する．3.4 節に述べた ON/OFF 入力のスラスター2 基による 2 次元宇宙機の制御においても複数の不変マニフォールドを用いたが，これらは単に $X$-$Y$ 平面上の位置が異なるだけで同様な部分空間を示すものであった．本節で定義する 3 つの不変マニフォールドはその引数となる状態量が 3 つで異なっており，それぞれ別の部分空間を表す．以降の議論では 3 つの不変マニフォールドを $S_1$=0 ，$S_2$=0 ，$S_3$=0 として表す.

制御系は大きく 4 つのステップで構成される．不変マニフォールド $S_1$=0 へ状態を遷移させる制御を Step-a，$S_1$=0・$S_2$=0 へ遷移させる制御を Step-b，$S_1$=0・$S_2$=0・$S_3$=0 へ遷移させる制御を Step-c，3 つの不変マニフォールドへ拘束しつつ目標点（原点）へ状態を遷移させる制御を Step-d とする．

宇宙機の状態がとるべき履歴をステップ毎に述べる．まず，Step-a で宇宙機は第 3 軸回りのシングルスピン状態となる．すなわち，宇宙機の第 3 軸が $Z$ 方向に一致し，かつ，第 3 軸以外の回転成分を有さない状態となる．次に，Step-b，Step-c では宇宙機に微小な摂動を与えた後に再びシングルスピン状態に復帰することを繰り返す. Step-b では $Z$ 方向の速度が特定の条件（$S_2$=0）を満たすまでこの運動を繰り返し，Step-c では $Z$ 方向の速度と位置が特定の条件（$S_2$=0，$S_3$=0）を満たすまで繰り返す．ここで，$S_2$=0，$S_3$=0 は，シングルスピンを目標姿勢で停止する際に $Z$ 方向の速度と位置が目標となるように設計された不変マニフォールドである．最後に Step-d においてシングルスピンを目標姿勢で停止すると同時に，残りの状態量である $X$，$Y$ 方向の速度と位置が目標値となる．$S_2$=0，$S_3$=0 の条件より，$Z$ 方向の速度と位置も目標値となるから，全ての状態量が目標値となる．これら 4 つのステップの宇宙機の動きについて，Fig.4.10 にその模式図を示す.

なお, 上記の 4 段階制御は, 4.3.4 項に示した姿勢制御手法に, Step-b, Step-c, および Step-d の一部として位置制御の手続きを加えたものとなる.

以下，各ステップの詳細を述べる.

**(a) Step-a：$S_1$=0 への遷移（第 1 軸・第 2 軸まわりの回転運動制御）** 4.3.4 項に述べた姿勢制御系における Step1 と全く同じ制御となる．$S_1$ は既に式(4.26)に定義されている．$S_1$=0 であれば宇宙機の第 3 軸は $Z$ 方向となり，かつ，第 3 軸以外の回転成分を有さない状態となる．詳細は 4.3.4 項(a)を参照されたい.

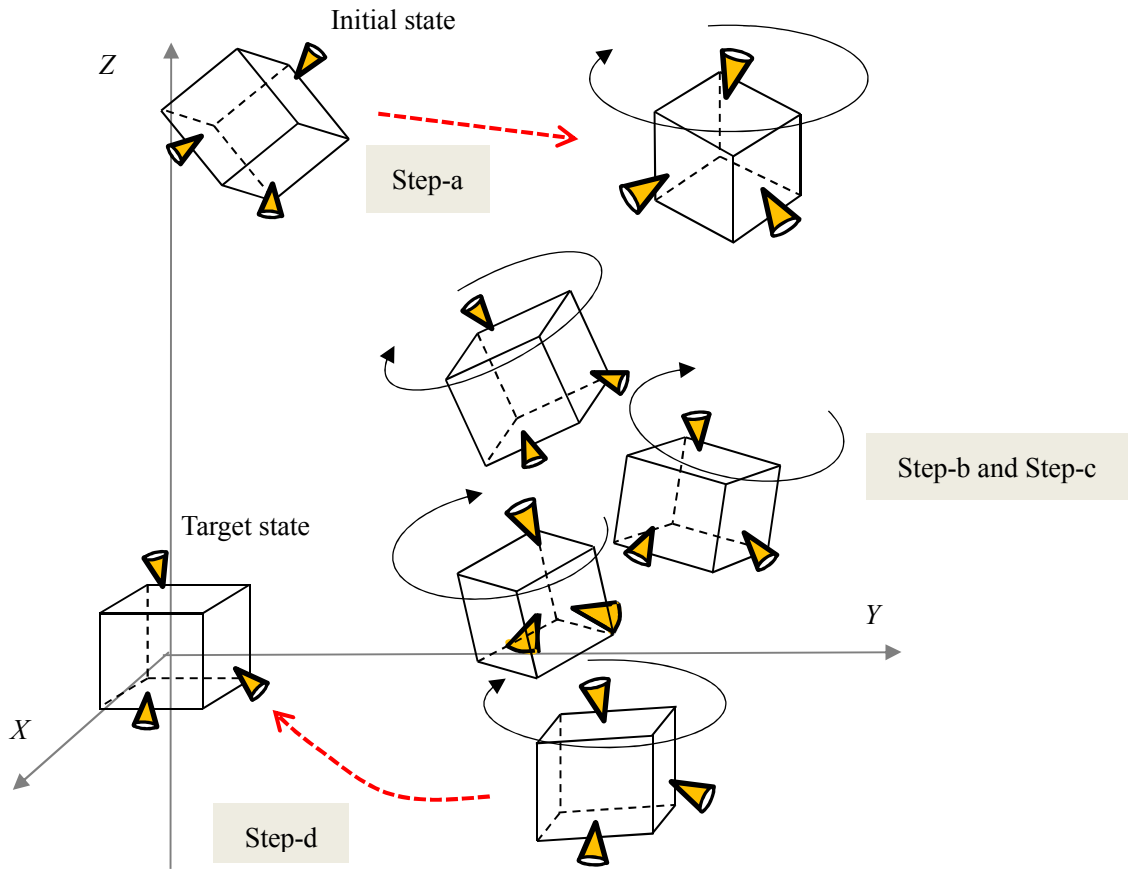



**Fig.4.10** Schematic image of the four step control in Section4.4

**(b) Step-b：$S_1$=0・$S_2$=0 への遷移（$Z$ 軸方向の速度制御）** Step-a の制御で達成したシングルスピン状態において，シングルスピン状態を保ったまま，すなわち，$S_1$=0 を保ったままその回転を停止することを考える．このとき，回転が停止する過程における $Z$ 方向の速度を $S_2$ として定義する．$S_2$ が 0 となれば本項の冒頭に述べたようにシングルスピンが停止する際の $Z$ 方向速度が 0 となる．

$S_2$ を以下に求める．シングルスピン状態を保って回転を停止するには，$T_1$=0，$T_2$=0 のもとに $T_3$ のみを作用させる．式(4.10)にシングルスピンの条件である $q_1$=0, $q_2$=0, $\omega_1$=0, $\omega_2$=0, および，$T_1$=0，$T_2$=0 を代入し，さらにこれを式(4.7)へ代入すれば，

$$M\ddot{Z} = \gamma_3 T_3 \tag{4.39}$$

となる．ここで，$\mathbf{DB}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix}^T$ とおいた．$\gamma_i$ ($i$=1~3)は，$X$，$Y$，$Z$ 方向の並進力に対するトルク $T_3$ の係数となる．式(4.39)を積分すれば，以下のようにシングルスピン

の停止に伴う $Z$ 軸方向速度変動 $\Delta\dot{Z}$ を得る．

$$\begin{aligned}\Delta\dot{Z} &= \frac{1}{M}\int \gamma_3 T_3 dt \\ &= \frac{\gamma_3}{M}\int J_3\dot{\omega}_3 dt \\ &= \frac{\gamma_3}{M}\left[J_3\omega_3\right]_{\omega_3=\omega_3}^{\omega_3=0} \\ &= -\frac{\gamma_3}{M}J_3\omega_3\end{aligned} \tag{4.40}$$

回転運動が停止する際の $Z$ 方向速度は現在の速度 $\dot{Z}$ に $\Delta\dot{Z}$ を加えればよいから，$S_2$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned}S_2 &= \dot{Z} + \Delta\dot{Z} \\ &= \dot{Z} - \frac{\gamma_3}{M}J_3\omega_3\end{aligned} \tag{4.41}$$

$S_2$ の時間微分は，

$$\begin{aligned}\dot{S}_2 &= \ddot{Z} - \frac{\gamma_3}{M}J_3\dot{\omega}_3 \\ &= \frac{1}{M}\left(\gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 + \gamma_3 T_3\right) - \frac{\gamma_3}{M}\left(T_3 + \left(J_1 - J_2\right)\omega_1\omega_2\right) \\ &= \frac{1}{M}\left\{\left(\gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2\right) - \gamma_3\left(J_1 - J_2\right)\omega_1\omega_2\right\}\end{aligned} \tag{4.42}$$

である．式(4.42)は第 3 軸回りの状態量や入力トルクを含まないから，第 3 軸回りのシングルスピン状態にある限り $S_2$ は不変となる．

次に $S_1$=0 と $S_2$=0 を同時に満たす制御について述べる．シングルスピン状態を保っている限り $S_2$ は不変であるから，宇宙機を一旦シングルスピン状態から外さない限り，$S_2$ の値を変えることができない．よって，Step-b の制御では微小な摂動と Step-a の制御による，$S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 となるマニューバを繰り返す．この繰り返しにより徐々に $S_2$ を 0 へ近づける．

その詳細を述べれば，まず，$S_1$=0 であるシングルスピン状態に微小な摂動を与えて $S_1$≠0 とする．これを $\omega_1$-$\omega_2$ 平面で表記すれば Fig.4.11 のような角速度軌道となる．ここで，微小摂動を与える際には姿勢の制御に必要な $\omega_3$＜0 である状態を保つべく，$\sigma_3\omega_1\omega_2$＜0 とせねばならない．$\sigma_3$ は $\omega_1$ と $\omega_2$ による第 3 軸回りのジャイロ効果に対する係数である（4.3.4 項(d)の式(4.35)を参照）．Fig.4.11 では $\sigma_3$＞0 を仮定して角速度軌道を図示している．$\sigma_3$＞0 において $\sigma_3\omega_1\omega_2$＜0 となるのは，$\omega_1$-$\omega_2$ 平面の第 2 象限，および，第 4 象限である．

続いて，$S_1$=0 面へ再び状態を収束させる．これには Step-a の制御を行う．ただし，摂動

が微小であれば $S_1$=0 への収束途中に $\sigma_3\omega_1\omega_2 < 0$ から外れる可能性は低い．したがって，角速度軌道の制御（式(4.32)と(4.33)における $\bar{K}$ に係る項）は除いてもよい．$\bar{K}$ に係る項を除けば，後述する数値積分の時間を短縮することができる．

上述の $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 となるマニューバを繰り返せば，$S_2$ の値は増加，または，減少する．そこで，一回の $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバを通した変動量を $\Delta S_2$ とおく．Fig.4.11 の例で説明すれば，$\Delta S_2$ の符号は摂動により $\omega_1$-$\omega_2$ 平面の第 2 象限か第 4 象限のどちらへ角速度を遷移させるかに応じて定まる．これは，いずれの象限であるかに応じて $f_1, f_2$（Fig.4.10 の例では $Z$ 軸正の方向に並進力を発生）と $f_3$（Fig.4.10 の例では $Z$ 軸負の方向に並進力を発生）の比率が異なるためである．どちらの象限へ角速度を遷移させれば $\Delta S_2$ が正，または，負となるかは，予め数値的に求めておけばよい．$S_2$ を 0 に近づけるには，$\Delta S_2 S_2$<0 であるように摂動を与える．

さらに，$S_2$ が 0 に漸近するとともに上述の摂動を小さくする．すなわち，摂動として与えるトルクの大きさやトルクを加える時間を小さくする．摂動が小さいほど $\Delta S_2$ が小さいことは明らかである．このような $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 の繰り返しにより，$S_2$ は 0 へ漸近する．

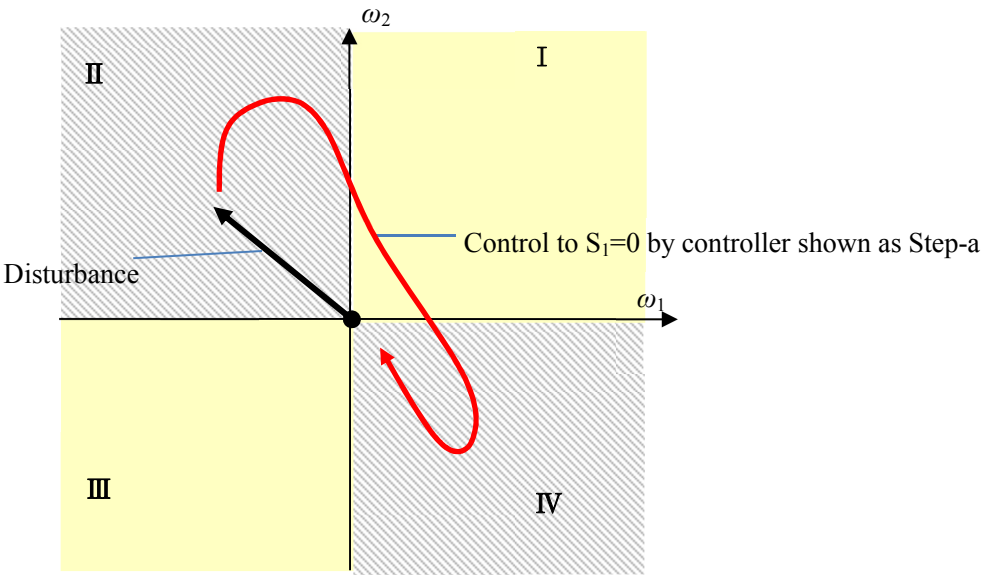



**Fig.4.11** Trajectory of $\omega_1$ and $\omega_2$ in Step-b

なお，$\Delta S_2$ の大きさには $\omega_3$ の値が影響する．これは，第 1 軸・第 2 軸回りのジャイロ効果が $\omega_3$ の値に応じて異なるためである．このため，摂動の大きさは $\omega_3$ の値に応じて適正に定めなければならない．摂動量に対する $\Delta S_2$ が過大となることを防ぐべく，1 回の $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバ終了毎にトルク $T_3$ を加え，$\omega_3$ を Step-b 開始時の初期状態へ戻すことが望ましい．

加えて，Step-b では $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 のマニューバを開始する際の姿勢（第 3 軸回りの

姿勢角）に応じて，$X$，$Y$ 方向の速度・位置変動が異なる．この姿勢角は式(4.42)より $S_2$ の変動量には影響を及ぼさないから，$X$，$Y$ 方向の速度・位置変動を数値積分により求めておくことで，ある程度所望のものに近い $X$，$Y$ 方向変動を得るようにマニューバ開始姿勢を定めることができる. 数値積分による応答時間の問題が懸念されるが, 次の $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバを開始するまでのドリフト中に数値積分を行うことで，この問題は解消されると考えられる．このような数値積分を用いた $X$，$Y$ 方向の速度・位置の調整は，後述の Step-d における目標状態への運動計画の補助として行っておくことが望ましい．その具体例は 4.4.3 項に後述する．

**(c) Step-c：$S_1$=0・$S_2$=0・$S_3$=0 への遷移（$Z$ 軸方向の速度・位置制御）** Step-c では，$S_1$=0・$S_2$=0 の制御に加えて，$Z$ 軸方向の位置を所望のもの制御する．シングルスピン状態を保ったまま，すなわち，$S_1$=0 を保ったまま，かつ，$S_2$=0 の状態でその回転を目標姿勢で停止することを考える．このとき，回転が目標姿勢で停止する際の $Z$ 軸方向の位置を $S_3$ として定義する．$S_3$ が 0 となれば本項の冒頭に述べたようにシングルスピンが停止する際の $Z$ 軸方向位置が 0 となる（$S_2$=0 より速度も 0 である）．

以下，$S_3$ を求めていく．まず，第 3 軸回りの姿勢角として $\theta$ を定義する．シングルスピン状態のもと，$\theta$ はオイラーパラメータ $\mathbf{q}$ により以下のように表される．

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{q_3}{q_4}\right) \tag{4.42}$$

シングルスピン状態を保ったまま，ある姿勢角 $\theta_3+2n\pi$ からマニューバを開始して，目標姿勢 $2n\pi$ で回転を停止することを想定する．すなわち，目標姿勢へ停止するマニューバを行う間に $\theta_3$ だけ宇宙機の姿勢角が変動することを仮定する. ここで, $n$ は任意の整数である．シングルスピン状態であれば $S_2$=0 が常に成り立つので，ドリフトにより $\theta_3+2n\pi$ まで姿勢角が遷移するまでの時間を $t_\theta$ とおき，以下の $Z$ 軸方向の位置変動 $\Delta Z$ を得る．

$$\begin{aligned}\Delta Z &= \dot{Z}t_\theta + \int \dot{Z}dt \\ &= \dot{Z}t_\theta + \int\left(\frac{J_3\gamma_3}{M}\omega_3\right)dt \\ &= \dot{Z}t_\theta + \left[\frac{J_3\gamma_3}{M}\theta\right]_{\theta=\theta_3+2n\pi}^{\theta=2n\pi} \\ &= \dot{Z}t_\theta - \frac{J_3\gamma_3}{M}\theta_3\end{aligned} \tag{4.43}$$

ここで，$S_2$=0 のもとに $t_\theta$ は以下の式(4.44)のようになる．

$$
\begin{aligned}
t_\theta &= \frac{\theta_3 + 2n\pi - \theta}{\omega_3} \\
&= \frac{J_3\gamma_3}{M}\frac{\theta_3 + 2n\pi - \theta}{\dot{Z}}
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

式(4.44)を式(4.43)に代入すれば，$\Delta Z$ は以下のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
\Delta Z &= \dot{Z}t_\theta - \frac{J_3\gamma_3}{M}\theta_3 \\
&= \dot{Z}\frac{J_3\gamma_3}{M}\frac{\theta_3 + 2n\pi - \theta}{\dot{Z}} - \frac{J_3\gamma_3}{M}\theta_3 \\
&= \frac{J_3\gamma_3}{M}\left(\theta_3 + 2n\pi - \theta\right) - \frac{J_3\gamma_3}{M}\theta_3 \\
&= \frac{J_3\gamma_3}{M}\left(-\theta + 2n\pi\right)
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

これより，$S_3$ は，

$$
\begin{aligned}
S_3 &= Z + \Delta Z \\
&= Z - \frac{J_3\gamma_3}{M}\theta + \frac{2\pi J_3\gamma_3}{M}n
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

となる．ここで，$S_3$ に $\theta_3$ の項が含まれないことに着目されたい．

$S_3$ の時間微分は

$$
\begin{aligned}
\dot{S}_3 &= \dot{Z} - \frac{J_3\gamma_3}{M}\omega_3 \\
&= S_2
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

であるから，$S_1$=0，$S_2$=0 である限りにおいて $S_3$ は不変である．

また，式(4.46)において $S_3$ は整数 $n$ に応じて変動するが，$S_3$=0 を達成するまでの宇宙機の位置変動は未知であるから，予め何らかの $n$ を決めておくことは難しい．したがって，$S_3$ は $n$ を含まない必要がある．$n$ は何らかの整数でありさえすればよいので，式(4.46)で $S_3$=0 である条件は，$S_3$=0 を満たす $n$ が整数となる条件と置き換えて考えることができる．この考えのもと，以降では式(4.47)から $n$ に係る項を除いた以下の $S_3$ を用いる．

$$
S_3 = \begin{cases}
MOD\left(\zeta_1, \zeta_2\right) & \text{for } \xi_1 < \dfrac{\xi_2}{2} \\
MOD\left(\zeta_1, \zeta_2\right) - \xi_2 & \text{for } \xi_1 \geq \dfrac{\xi_2}{2}
\end{cases}
\tag{4.48}
$$

ここで，*MOD*(a,b)は a を b で除した際の剰余である．$\xi_1$ の大きさに応じて 2 通りの定義となるのは，後述のフィードバック制御が行いやすいように $S_3$=0 で連続とするためである（一般的に剰余は正のみしか取り得ない）．

続いて，$S_1=0$，$S_2=0$ と同時に $S_3$=0 を達成する制御について述べる．前述のように，$S_2$=0 である限りにおいて $S_3$ は不変である．よって，$S_3$=0 へ状態を遷移させるためには，$S_2$=0→$S_2$≠0→$S_2$=0 となるマニューバを繰り返さなければならない．これには，まず，角速度に摂動を与えて $S_2$≠0 とし，その後に Step-b と同じ制御を行って再び $S_2$=0 とする．Step-b の制御では $S_1=0$ も同時に達成されるので，$S_2$=0→$S_2$≠0→$S_2$=0 となるマニューバの繰り返しで $S_3$=0 とすれば，同時に $S_1=0$，$S_2=0$ も達成されることになる．これらの切り替えの流れについては Fig.4.12 を参照されたい．

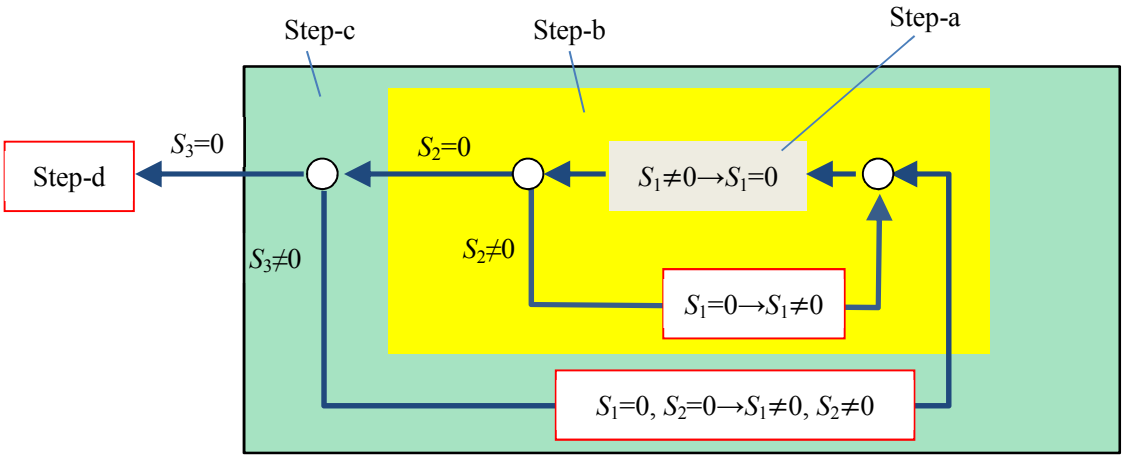



**Fig.4.12** Block diagram of Step-c

角速度の摂動は，Step-b と同様に $\omega_1$-$\omega_2$ 平面の第 2 象限か第 4 象限のどちらかへ角速度を遷移させるように与える．第 2 象限か第 4 象限のどちらへ遷移させても構わない．Step-b の場合と異なり，式(4.48)は剰余であるから，$S_2$=0→$S_2$≠0→$S_2$=0 となるマニューバを通した $S_3$ の変動 $\Delta S_3$ の符号が正・負のどちらであっても $S_3$→0 が可能である．

4.3.2 項と同様に，摂動が小さければ $S_2$ の変動も小さく，式(4.47)より $\Delta S_3$ も小さい．したがって，$S_3$ が 0 に漸近するとともに摂動を小さくして $S_2$=0→$S_2$≠0→$S_2$=0 となるマニューバを繰り返せば $S_3$=0 を達成することができる．

また，Step-b の最後で述べた *X*，*Y* 方向の速度・位置変動の調整も，Step-b の説明で述べたものと同様の理由でこの Step-c に加えることが望ましい．

**(d) Step-d : 目標姿勢・位置への遷移（*X*，*Y* 方向の速度と位置の制御）**　ここまでに，$S_1$=0，$S_2$=0，$S_3$=0 を達成した．すなわち，宇宙機の第 3 軸が *Z* 軸方向であり，第 3 軸まわりのシ

ングルスピンであり，シングルスピンを目標姿勢で静止するとき $Z$ 方向に関して宇宙機が目標位置で静止する，という状態を作りだした．よって，制御するべき残りの状態量は $X$, $Y$ 方向の速度と位置である．

Step-d では，運動計画により $X$，$Y$ 方向の目標状態を達成する．運動計画の手法は様々なものが考えられるが，ここでは，1 つの例を示す．

まず, 運動計画に用いるべく $T_1$=0, $T_2$=0 のもとに第 3 軸回りのトルク $T_3$ を加えた際の $X$, $Y$ 方向の状態変動量を導く．上述した不変マニフォールドの定義より，シングルスピン状態であれば $S_1$=0，$S_2$=0，$S_3$=0 は保たれる．また，$T_1$=0，$T_2$=0 であれば宇宙機はシングルスピン状態よりはずれることはない．

シングルスピンが保たれる仮定のもとに，Fig.4.13 のごとく宇宙機の姿勢と位置を $X$-$Y$ 面内における角度 $\theta$（既に式(4.42)で定義した）で表す．

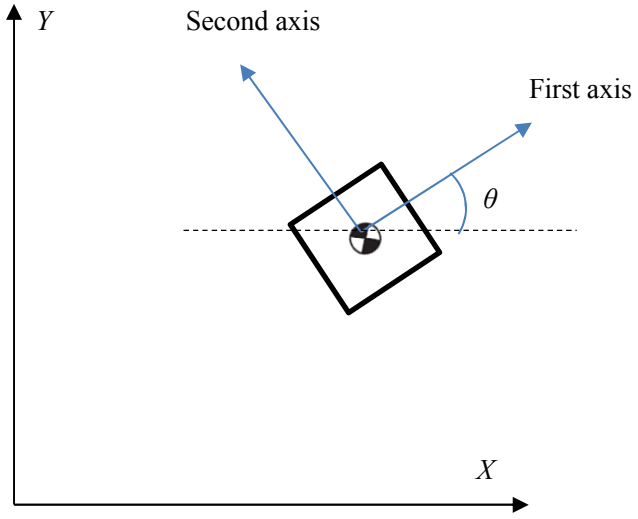



**Fig.4.13** Attitude definition on a $X$-$Y$ plane

さらに，$X$，$Y$ 方向に関する運動方程式の積分を行い易くするべく，$T_3$ を角速度の関数として以下のように定める．

$$T_3 = \eta\dot{\theta} \tag{4.49}$$

$\eta$ は設計パラメータであり，$T_3 > 0$，すなわち，$\eta\dot{\theta} > 0$ を満たすように設定される．式(4.49)の $T_3$ のもとにマニューバ開始時刻を $t_0$，終了時刻を $t_f$ とし，$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}^T$ とおいて式(4.13)に示す並進力の積分を行えば，$T_3$ に対する $X$，$Y$ 方向の並進力成分である $\mathbf{DB}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}^T$ を用いて, 以下の $X$, $Y$ 方向速度変動 $\Delta\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{X} & \Delta\dot{Y} \end{bmatrix}^T$ を得る．

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{\hat{\mathbf{p}}} &= \frac{1}{M}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{A}(\theta)\begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\end{bmatrix}^T T_3 dt \\
&= \frac{1}{M}\int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix}\gamma_1\cos\theta - \gamma_2\sin\theta \\ \gamma_1\sin\theta + \gamma_2\cos\theta\end{bmatrix}\eta\dot{\theta}dt \\
&= \frac{\eta}{M}\begin{bmatrix}\gamma_1\sin\theta + \gamma_2\cos\theta \\ -\gamma_1\cos\theta + \gamma_2\sin\theta\end{bmatrix}_{\theta_0}^{\theta_f}
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

ここで，$\theta_0$ は時刻 $t_0$ における姿勢角，$\theta_f$ は時刻 $t_f$ における姿勢角である．

さらに式(4.50)の積分を行えば，以下の $X$，$Y$ 方向位置変動 $\Delta\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix}\Delta X & \Delta Y\end{bmatrix}^T$ を得る．

$$
\Delta\hat{\mathbf{p}} = \frac{J_3}{M}\begin{bmatrix}\gamma_1 S_\theta + \gamma_2 C_\theta \\ -\gamma_1 C_\theta + \gamma_2 S_\theta\end{bmatrix} + \dot{\hat{\mathbf{p}}}_0\Delta t \tag{4.51}
$$

$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_0$ は式(4.49)のマニューバ開始時の $X$，$Y$ 方向速度である．$\Delta t$ はマニューバ終了までの時間であり，マニューバ開始時の初期角速度を $\dot{\theta}_0$ とおいて以下のように表される．

$$
\Delta t = \frac{J_3}{\eta}\ln\left(1 + \frac{\theta_f - \theta_0}{\varphi}\right) \tag{4.52}
$$

ここに，

$$
\varphi = \frac{J_3\dot{\theta}_0}{\eta} \tag{4.53}
$$

とする．また，$\Delta t$ と一般に三角積分として知られる超越関数，

$$
Si(\theta) := \int_0^\theta \frac{\sin(t)}{t}dt, \qquad Ci(\theta) := -\int_\theta^\infty \frac{\cos(t)}{t}dt \tag{4.54}
$$

を用いて $S_\theta$ と $C_\theta$ は以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
S_\theta &= \frac{\eta}{J_3}\int_{t_0}^{t_f}\sin(\theta_f)dt - \Delta t\sin(\theta_0) \\
&= \left\{Si(\varphi + \theta_f - \theta_0) - Si(\varphi)\right\}\cos(\theta_0 - \varphi) + \left\{Ci(\varphi + \theta_f - \theta_0) - Ci(\varphi)\right\}\sin(\theta_0 - \varphi) \\
&\quad - \sin(\theta_0)\ln\left(1 + \frac{\theta_f - \theta_0}{\varphi}\right)
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

$$
\begin{aligned}
C_\theta &= \frac{\eta}{J_3}\int_{t_0}^{t_f}\cos\left(\theta_f\right)dt - \Delta t\cos\left(\theta_0\right) \\
&= \left\{Si\left(\varphi+\theta_f-\theta_0\right)-Si\left(\varphi\right)\right\}\sin\left(\theta_0-\varphi\right)+\left\{Ci\left(\varphi+\theta_f-\theta_0\right)-Ci\left(\varphi\right)\right\}\cos\left(\theta_0-\varphi\right) \\
&\quad -\cos\left(\theta_0\right)\ln\left(1+\frac{\theta_f-\theta_0}{\varphi}\right)
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

$\eta$ と $\theta_0$，$\theta_f$がマニューバの設計パラメータとなるが，任意の $X$，$Y$ 方向速度・位置変動を得るためにはこれだけの設計パラメータでは不十分である．そこで，$\theta_0$ から $\theta_f$ まで式(4.49)のトルク $T_3$ を加えるマニューバを 1 回として, これを異なる $\eta$ のもとに複数回行う．Fig.4.14 にそのようなマニューバを組み合わせた例を示す． Fig.4.14 の例では 3 回マニューバを行い，それぞれ $\eta$ を $\eta_1$ ，$\eta_2$ ，$\eta_3$ のように設定している．宇宙機の $X$，$Y$ 方向に関する状態量が目標値となるようにこれらのパラメータを定めることは比較的容易である．より具体的な例は後述の数値シミュレーションを参照されたい．

なお，宇宙機の回転が停止する最終段階でのマニューバにおいては，速度・位置変動を調整する自由度が少ない．したがって，それまでのマニューバで $X$，$Y$ 方向の速度と位置をある程度調整しておかなければならない．Fig.4.14 の例で説明すれば，$\eta_1$ ，$\eta_2$ は任意であるが， 3 回目のマニューバについて宇宙機の回転が静止するように $\eta_3$ は以下のように設定する必要がある．

$$
\eta_3 = -\frac{J_3\dot{\theta}_3}{\Delta\theta_3} \tag{4.57}
$$

ここで，$\dot{\theta}_3$ は 3 回目のトルク入力開始時の角速度，$\Delta\theta_3$ はトルク入力開始から回転が停止するまでの姿勢角の変動量である．$\dot{\theta}_3$ を $\dot{\theta}_0$ に置き換えて式(4.57)を式(4.53)に代入すれば，3 回目のトルク入力における $\varphi_3$ は，

$$
\varphi_3 = -\Delta\theta_3 \tag{4.58}
$$

に定まる．ここで，1 回目と 2 回目は任意であった最終姿勢 $\theta_f$は，3 回目のマニューバにおいては目標姿勢である $2n\pi$ に設定しなければならない．$\theta_0$ も $2n\pi$-$\Delta\theta_3$ とする必要がある．したがって，仮に 3 回目のトルク入力時の初期速度 $\dot{\mathbf{p}}_0$ が 0 であれば，式(4.51)，式(4.55)，式(4.56)より $X$，$Y$ 方向の位置変動は $\Delta\theta_3$ のみで定まる．

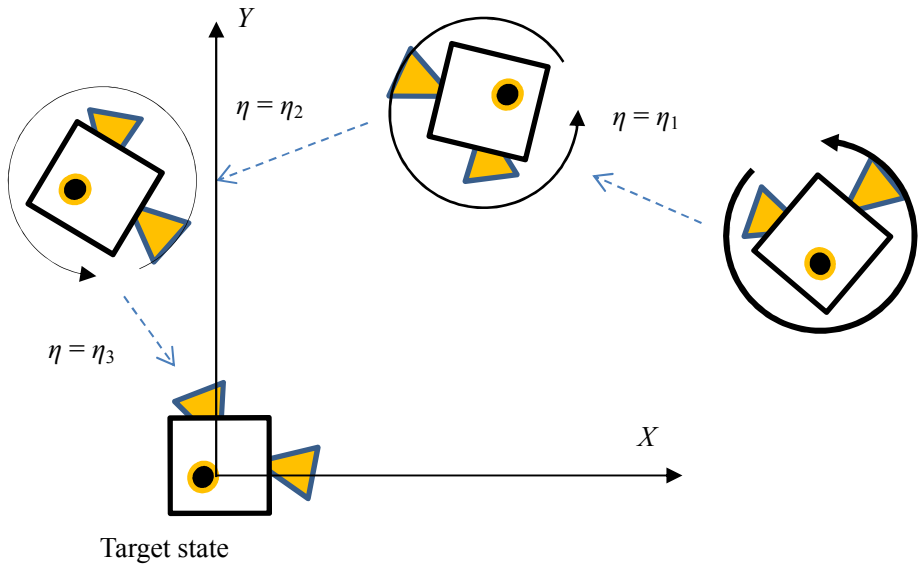



**Fig.4.14** Combination of three torque-inputs $T_3$ in Eq.(4.49)

### 4.4.2　制御系設計例（数値シミュレーション）

本項では 4.3.1 項に示した制御系の具体例を示すとともに，その有効性を検証するために数値シミュレーションを行う．以下，宇宙機のモデル，制御系の設計パラメータ，および，シミュレーション結果について述べる．

**(a) モデルと初期状態**　慣性モーメントが $J_1$=15[kgm$^2$]，$J_2$=10[kgm$^2$]，$J_3$=20[kgm$^2$]，質量 $M$ が 20[kg]である宇宙機を仮定する．宇宙機は出力が正の範囲で可変な 3 つのスラスターを有する．スラスター推力には特に上限は設けない．各スラスターの位置ベクトルは，

スラスター1：　$\mathbf{r}_1 = [0.0 \quad 1.0 \quad -1.0]^T$,

スラスター2：　$\mathbf{r}_2 = [-1.0 \quad 0.0 \quad -1.0]^T$,

スラスター3：　$\mathbf{r}_3 = [0.01 \quad -0.01 \quad -1.3]^T$

とし，方向ベクトルを，

スラスター1：　$\mathbf{d}_1 = [0.0 \quad 0.0 \quad -1.0]^T$,

スラスター2：　$\mathbf{d}_2 = [0.0 \quad 0.0 \quad -1.0]^T$,

スラスター3： $\mathbf{d}_3 = [0.43 \quad -0.25 \quad 0.87]^T$

とする．第 3 軸に関してスラスター1 と 2 はスラスター3 と逆向きである．よって，4.4.1 項の冒頭に述べたスラスター方向の条件を満たしている．

宇宙機の初期状態は Table4.3 に示す 3 ケースとする．Case1 に対し，Case2 は姿勢のみが異なり，Case3 は位置のみが異なる．全てのケースで姿勢と並進の初期速度を 0 とする．

**Table 4.3** Initial conditions for numerical simulations

| | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $X$[m] | $Y$[m] | $Z$[m] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Case1 | 0.4 | -0.25 | 0.1 | 0.876 | -200 | 700 | -350 |
| Case2 | 0.8 | -0.25 | 0.1 | 0.536 | -200 | 700 | -350 |
| Case3 | 0.4 | -0.25 | 0.1 | 0.876 | 0.0 | 0.0 | -500 |

**(b) 制御系の設計パラメータ**　Step-a に関し，$K_1$=3.0，$K_2$=3.0，$\kappa$=1.0 として式(4.32)と(4.33)の制御系を適用する．

Step-b に関し，摂動を加えるトルクを

$$T_1 = -\frac{0.3\,\mathrm{sgn}(S_2)}{|\omega_{30}|} \tag{4.59}$$

$$T_2 = \frac{0.3\,\mathrm{sgn}(S_2)}{|\omega_{30}|} \tag{4.60}$$

とする．ここで $\omega_{30}$ は摂動開始時の第 3 軸回りの角速度を表す．4.4.2 項(b)に述べたように，$|\omega_{30}|$に応じて $S_2$ の変動量が異なる．式(4.59)と式(4.60)では，これを同程度の変動に補正する意味で$|\omega_{30}|$で除している．

式(4.59), (4.60)の摂動トルクを加える時間 $t_{S2}$ は, $S_2$ が小さいほど短くなるように定める．この計算例では，$|S_2| > 0.1$ であれば $t_{S2} = 0.1$[s]とし，$|S_2| \leq 0.1$ であれば $t_{S2} = 0.5|S_2|$とする．これらの摂動は試行錯誤的に定めた．摂動を加えた後は上述の Step-a の制御を行う．ただし，ここでは後段に説明する数値計算の負荷を減らすために $\bar{K}$ の項は除いた．これを $S_2$＝0 となるまで繰り返す．

さらに，Step-b では，Step-d で宇宙機を目標位置とするのに必要な $X$，$Y$ 方向の速度・位置変動が過大となることを防ぐために，各マニューバを開始するタイミングを調整して宇宙機の $X$，$Y$ 方向の速度と位置の調整を行う．上述の $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 のマニューバを特定の姿勢角 $\theta$ で開始するとし，マニューバ完了時の $X$，$Y$ 方向の速度と位置変動を数値的に求める．これに回転行列を乗じれば任意の姿勢における $X$, $Y$ 方向の速度・位置変動となる．

本項の数値シミュレーションの例では，マニューバ開始時の初期位置を $X_{20}$，$Y_{20}$，初期速度を $\dot{X}_{20}$，$\dot{Y}_{20}$，位置変動を $\Delta X_2$，$\Delta Y_2$，速度変動を $\Delta\dot{X}_{20}$，$\Delta\dot{Y}_{20}$ とおき，以下の $V_1$ または $V_2$ が最小となる $\theta$ においてマニューバを開始することとする．

$$\begin{cases} V_1 = \left(\dot{X}_{20} + \Delta\dot{X}_2\right) X_{cal} + \left(\dot{Y}_{20} + \Delta\dot{Y}_2\right) Y_{cal} & \text{if } V_3 \geq 200000 \\ V_2 = \left(\dot{X}_{20} + \Delta\dot{X}_2\right)^2 + \left(\dot{Y}_{20} + \Delta\dot{Y}_2\right)^2 & \text{if } V_3 < 200000 \end{cases} \tag{4.61}$$

ここで，

$$V_3 = X_{cal}^2 + Y_{cal}^2 ,$$

$$X_{cal} = X_{20} + \Delta X_2 - X_4,$$

$$Y_{cal} = Y_{20} + \Delta Y_2 - Y_4$$

である．$V_1$ は $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバ後の宇宙機の速度ベクトルと $X_{cal}$，$Y_{cal}$ （$X_4$，$Y_4$ を原点とした $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバ後の宇宙機の位置）との内積である．その値が最小であれば，$S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバ後の宇宙機の速度は $X_4$，$Y_4$ へ向かう方向となる．$V_2$ は $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバ後の速度の 2 乗和であり，その値が 0 であれば $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバ後に宇宙機は $X$-$Y$ 面内において静止している．$V_3$ は $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバ後における，$X_4$，$Y_4$ からの宇宙機の距離の 2 乗である．

式(4.61)は，Step-b の制御において $X_4$，$Y_4$ を中心に一定範囲内に宇宙機が位置することを狙うものである．式(4.61)では距離に関するパラメータ $V_3$ が一定以上で，速度に関する $V_1$ が最小となる姿勢角でマニューバを開始する．これにより，宇宙機が $X_4$，$Y_4$ へ向かう速度となるので，$V_3$ の値は小さくなる． $V_3$ が一定値以下になった後は，マニューバを開始する姿勢角を $V_2$ が最小となるように選ぶことで，宇宙機の $X$，$Y$ 方向の速度はマニューバ毎に小さくなる．

なお $X_4$，$Y_4$ は，Step-d において回転を停止する最後の減速マニューバを加える過程を通した位置変動量（その符号は逆転している）に等しい．Step-d 開始時点で宇宙機の $X$，$Y$ が $X_4$，$Y_4$ に近ければ，Step-d における位置変動が少なく済む．4.4.1 項(d)の最後で述べたように，$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_0$ が 0 のとき，最後の減速マニューバにおいて，$X$，$Y$ 方向の位置変動は姿勢角変動のみで定まる．したがって，Step-d の最後の減速マニューバにおける姿勢角変動を予め定めておけば，$X_4$，$Y_4$ は式(4.52)より容易に求めることができる．計算例では Step-d における最後の減速マニューバの姿勢角変動を-2$\pi$ とするので， $X_4$=-668，$Y_4$=-383 となる．

なお，Step-b では各 $S_1$=0→$S_1$≠0→$S_1$=0 マニューバ後に，

$$T_3 = -30\left(\omega_3 + \omega_{30}\right) \tag{4.61}$$

を加えて第 3 軸回りの角速度を初期角速度 $\omega_{30}$ へ戻す．その理由については 4.4.1 項(b)を参照されたい.

続いて，本シミュレーション例の Step-c における設定であるが， $S_1 \neq 0$，$S_2 \neq 0$ とするための摂動を，

$$T_1 = \frac{0.1\mathrm{sgn}\left(S_3\right)}{\left|\omega_{30}\right|} \tag{4.62}$$

$$T_2 = -\frac{0.1\mathrm{sgn}\left(S_3\right)}{\left|\omega_{30}\right|} \tag{4.63}$$

により与える．式(4.62)，(4.63)の摂動トルクを加える時間 $t_{S3}$ は，$S_3$ が小さいほど短くなるように定める．$|S_3| > 0.02$ であれば $t_{S3} = 0.1$[s]とし，$|S_3| \leq 0.02$ であれば $t_{S3} = 20|S_3|$とする．この摂動の後は上述した Step-b と全く同じ制御を行い $S_2 = 0$ とする．これを，$S_3$ が 0 となるまで繰り返す.

最後に, Step-d では 3 回の減速マニューバにより宇宙機の目標位置を達成することを考える．まず，最初の減速マニューバでは $X$，$Y$ 方向速度を 0 とする．ただし，このマニューバは，式(4.60)により Step-c までに宇宙機の $X$，$Y$ 方向速度が 0 になっていれば必要ない．後述するシミュレーションでは，Step-c までに $X$，$Y$ 方向速度が 0 となったため，このマニューバは用いなかった（したがって、実際には全てのケースで 2 回の減速マニューバを行った）．また，式(4.50)を用いれば容易に減速マニューバのパラメータを定めることができるため，ここではパラメータの設定に関する説明は省略する．

次の減速マニューバでは，マニューバ中の姿勢角変動を $\Delta\theta_2 = -2\pi$ として宇宙機を $X_4$，$Y_4$ へ遷移させる．この際のパラメータの決め方であるが，式(4.52)から必要な移動距離を得る $\eta_2$ をまず求める．その後，$X_4$，$Y_4$ へ宇宙機の移動方向が向くように減速マニューバを開始する姿勢角 $\theta_2$ を定める．宇宙機の移動方向は減速マニューバを開始する姿勢角 $\theta_2$ によって定まることは明らかである．また，式(4.50)より $\Delta\theta_2 = -2\pi$ であれば速度の変動は 0 であるから，$X_4$，$Y_4$ へ遷移した後に宇宙機は静止する．

$Z$ 方向のドリフトにより宇宙機が $Z$=0 へ接近する（あと 1 回転で $Z$=0 面を超える）状態を待ち，最後の減速マニューバを行う．ここでは $\Delta\theta_3 = -2\pi$ とし，マニューバ開始時の姿勢角 $\theta_3$ を $2\pi$ とする．これにより，宇宙機は目標姿勢で静止する．また，$X_4$，$Y_4$ の定義より，$X$，$Y$ 方向位置の変動は-$X_4$，-$Y_4$ であるから $X$，$Y$ 座標も原点となる．さらに，$S_2 = 0$，$S_3 = 0$ であるから，これらの関数の定義より $Z$ 軸に関しても宇宙機は目標位置へ静止した状態となる．

**(c) シミュレーション結果**　Fig.4.15～Fig.4.24 に Case1 のシミュレーション結果を示す．Fig.4.15 より宇宙機が目標姿勢を達成したことが確認できる．Fig.4.15(a)より宇宙機は初期姿勢から第 3 軸回りのシングルスピン状態に遷移し，Fig.4.15(b)に示すように，最終的に目標姿勢でその回転は静止している．また，Fig.4.16 は宇宙機の角速度である．目標姿勢において宇宙機の角速度は全ての成分が 0 となっている．

Fig.4.17 は宇宙機の位置軌道である．制御系が有効に宇宙機は目標位置（原点）へ到達している．さらに，並進速度も目標位置において全ての成分が 0 となっていることが分かる（Fig.4.18 を参照）．

次に不変マニフォールドを構成する関数 $S_1, S_2, S_3$ の履歴について述べる．$S_1$ に関し，Step-a で一旦 $S_1=0$ へ収束した後，それ以降の Step-b と Step-c では $S_1=0$ 近傍において $S_1=0 \rightarrow S_1 \neq 0 \rightarrow S_1=0$ となる挙動を繰り返している（Fig.4.19 を参照）．Fig.4.20 は $S_2$ の時間履歴であるが，Step-b において一旦 $S_2=0$ へ収束し，その後 Step-c において $S_2=0 \rightarrow S_2 \neq 0 \rightarrow S_2=0$ の繰り返していることが確認できる．$S_3$ に関しては，Fig.4.21 より，Step-c において $S_3$ が 0 へ収束する挙動が確認できる．これらは，4.4.2 項に提案した制御系の狙い通りの挙動である．

また, Fig.4.22~Fig.4.24 より 3 つのスラスター全ての推力が正のみの Unilateral な拘束を満たしていることに着目されたい．

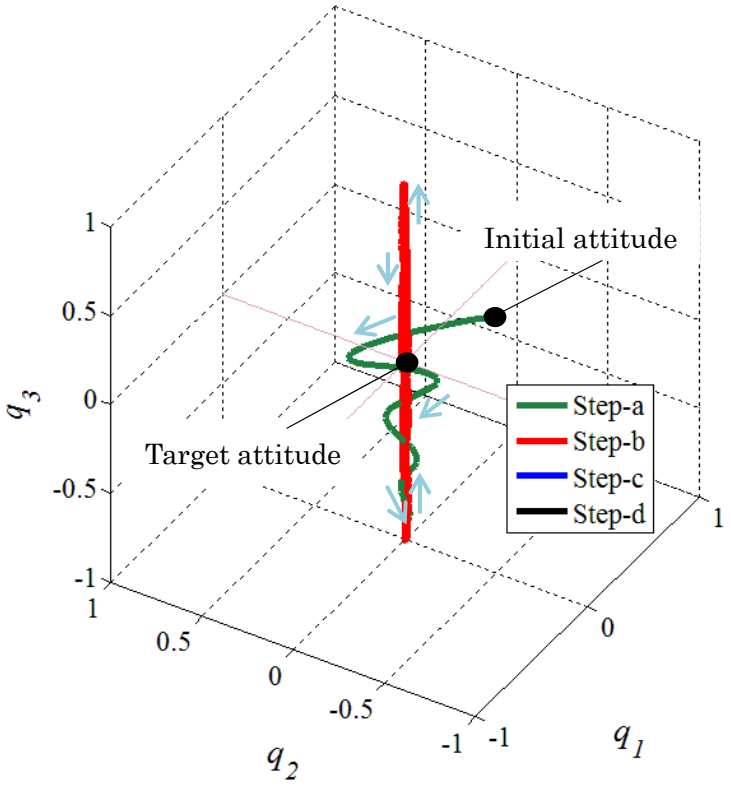
Case2 と Case3 に対しても，制御系が有効に働く結果を得た．

Fig.4.25(a)は Case2 における宇宙機の姿勢の軌道であるが，Case1 と同様に第 3 軸回りのシングルスピンへ宇宙機が遷移する挙動が確認できる．Fig.4.25(b)より最終的に目標姿勢でその回転は静止している．Fig.4.26 より宇宙機の位置も目標状態を達成しており，並進速度も目標位置において 0 となっている(Fig.4.27)．　Fig.4.28～Fig.4.30 はスラスター推力の時間履歴であるが，全て正となっており拘束条件を満たしている．

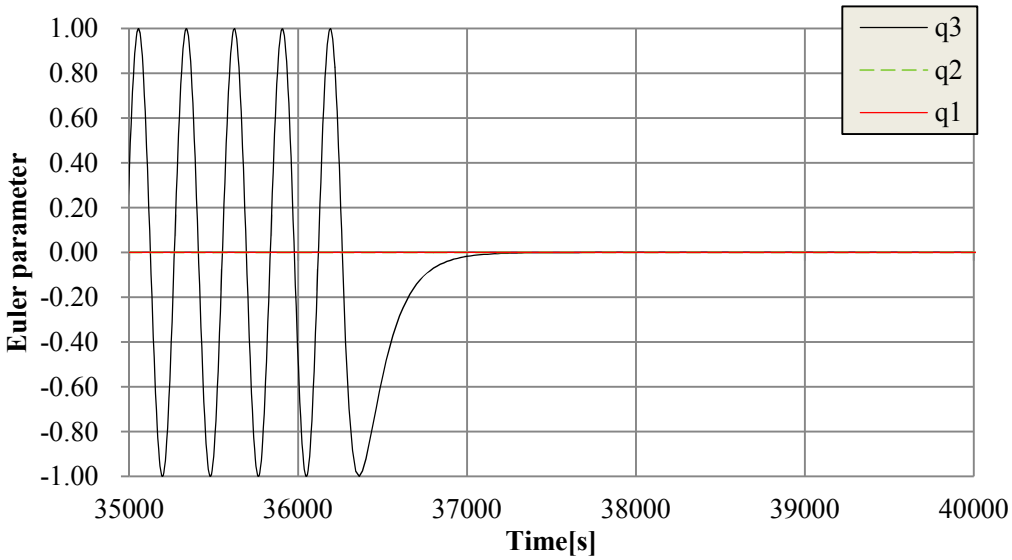
ただし，Case2 は Case1 と比較して制御終了までに著しく長い時間を要している．これは Fig.4.28~Fig.4.30 を見ればわかるように，Step-d 初期のマニューバに要した推力が大きかったことに起因している．すなわち，Step-d の初期で所望の位置変動を得るために大きなマニューバを行ってしまい，その後の $Z$ 方向の並進速度が非常に小さくなったために目標位置までのドリフトに時間がかかってしまっている．これは Step-d のマニューバを工夫することで改善可能である．スラスター推力に上限を設けなかったことも Step-d の最初に大きなマニューバを行うこととなった一因となっている．

Case3 も他のケースと同様であり，Fig.4.31 より宇宙機の姿勢は目標を達成している．Fig.4.32 の位置軌道と Fig.4.33 の並進速度履歴より，位置制御が成功していることが分る．Fig.4.34~Fig.4.36 より各スラスターの推力も正の範囲で推移している．

これらの結果より，初期状態が異なっても本節に提案する制御系が有効であることが示された．




(a) Trajectory of Euler parameters to the target state




(b) Time history of Euler parameters around the target state

**Fig.4.15** Attitude in Case1

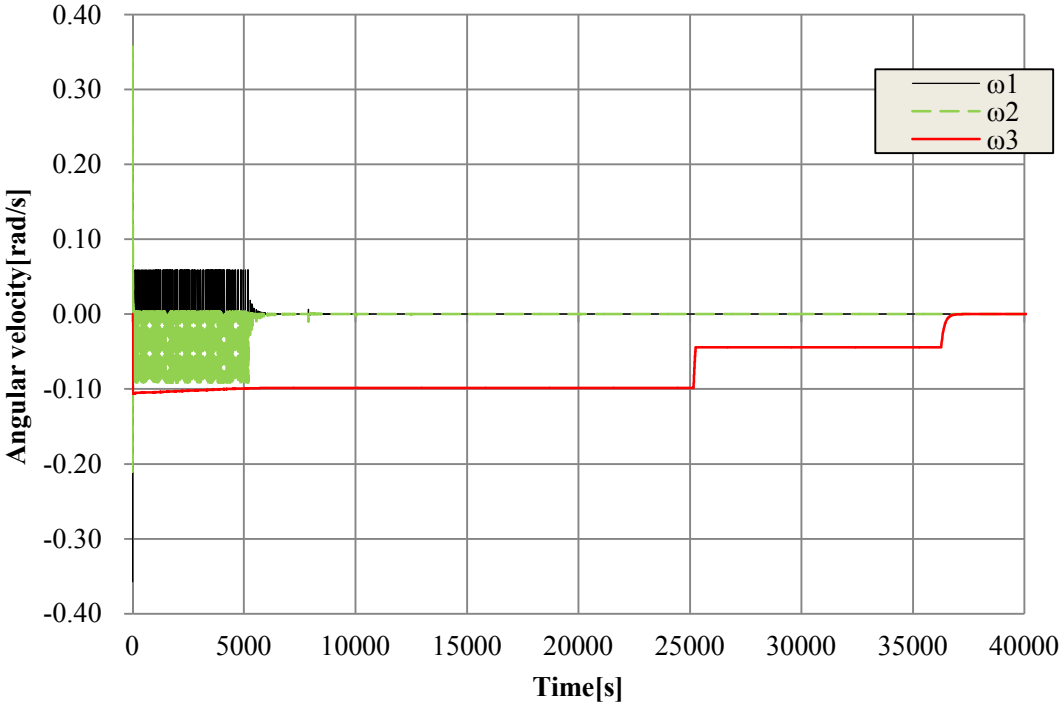



**Fig.4.16** Time history of angular velocities in Case1

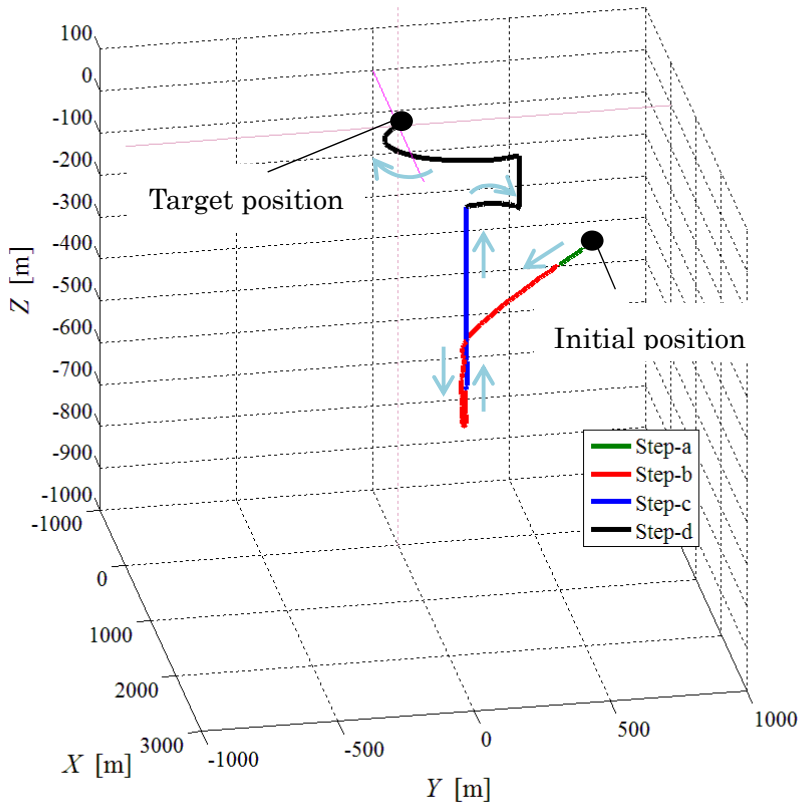



**Fig.4.17** Trajectory of position in Case1

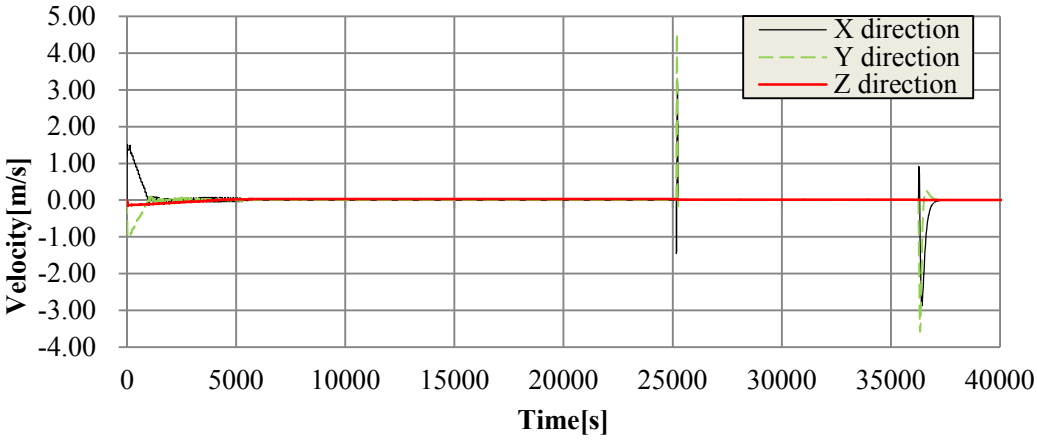
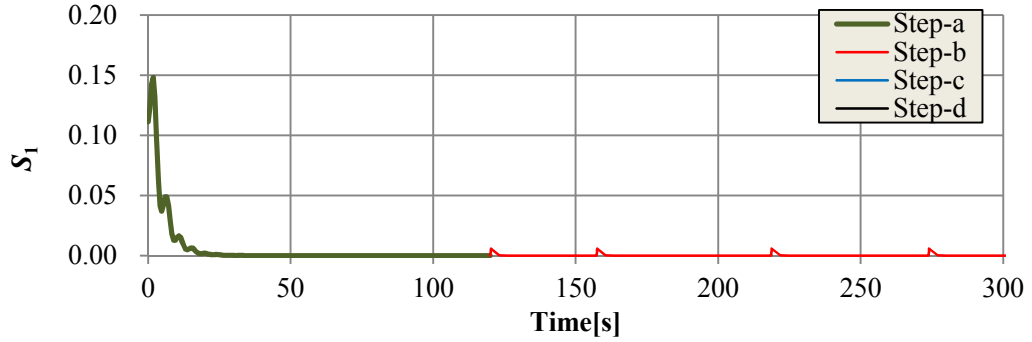
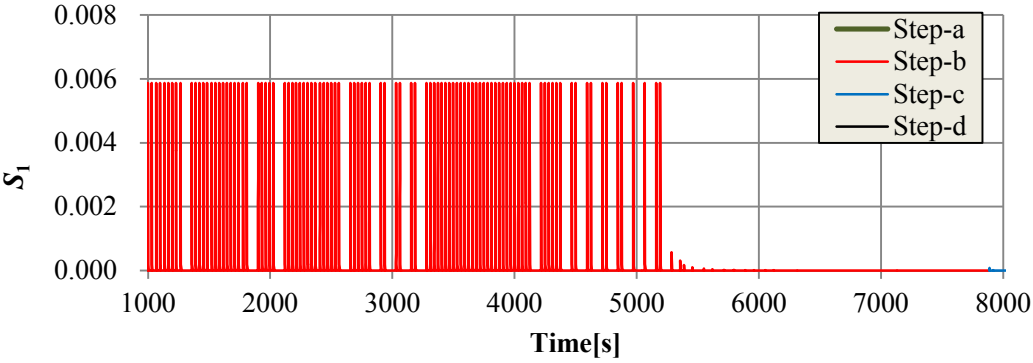


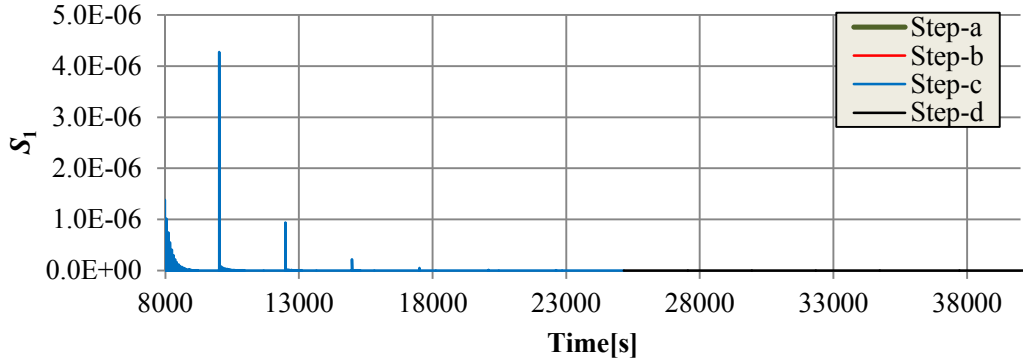

**Fig.4.18** Time history of translational velocities in Case1




(a) Step-a and Step-b

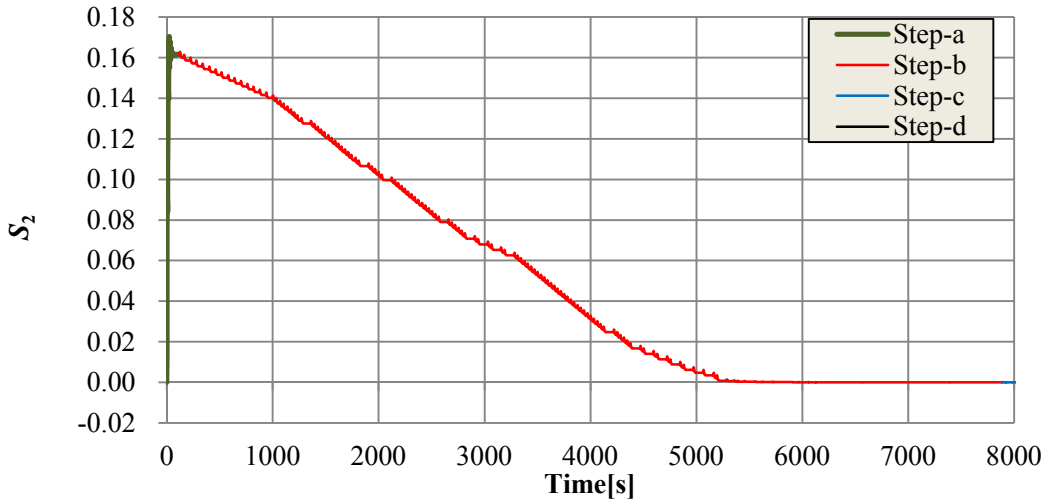



(b) Step-b

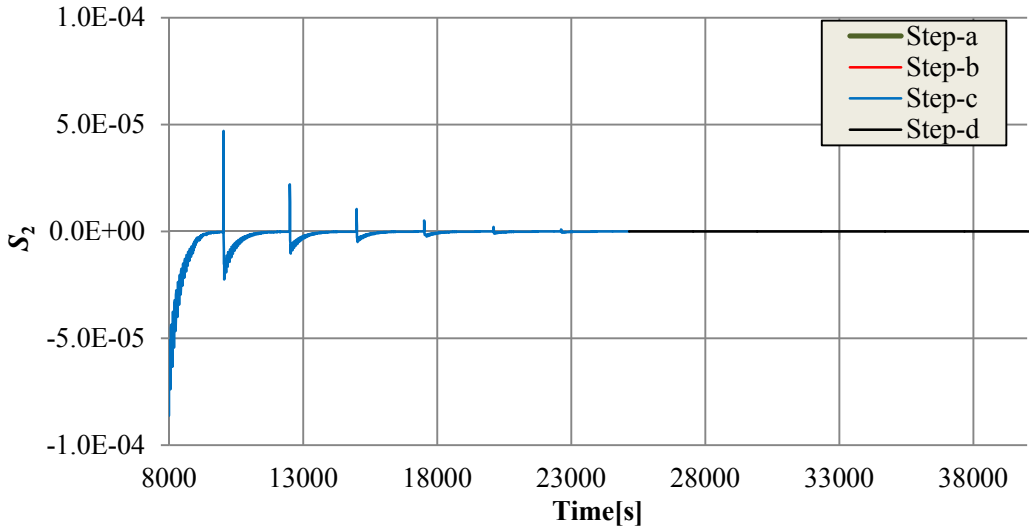



(c) Step-c and Step-d

**Fig.4.19** Time history of $S_1$ in Case1




(a) Step-a and Step-b




(b) Step-c and Step-d

**Fig.4.20** Time history of $S_2$ in Case1

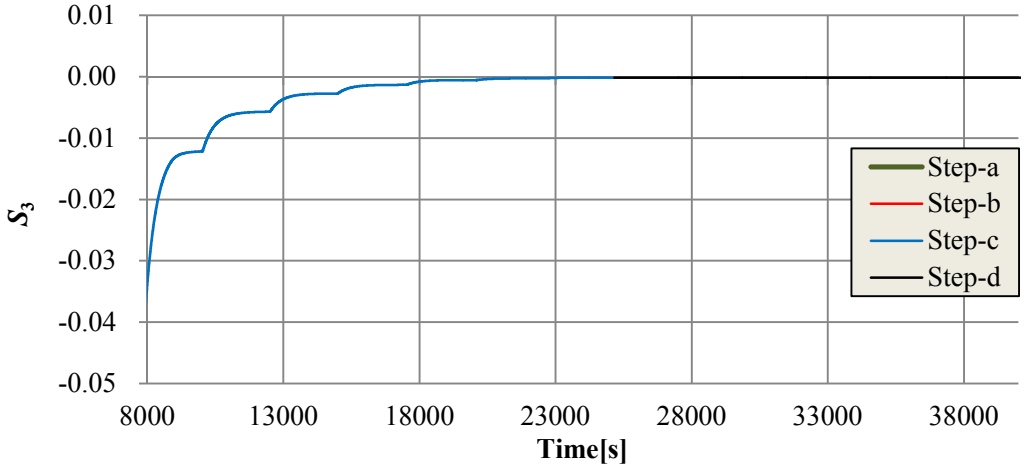



**Fig.4.21** Time history of $S_3$ in Case1 (Step-c and Step-d)

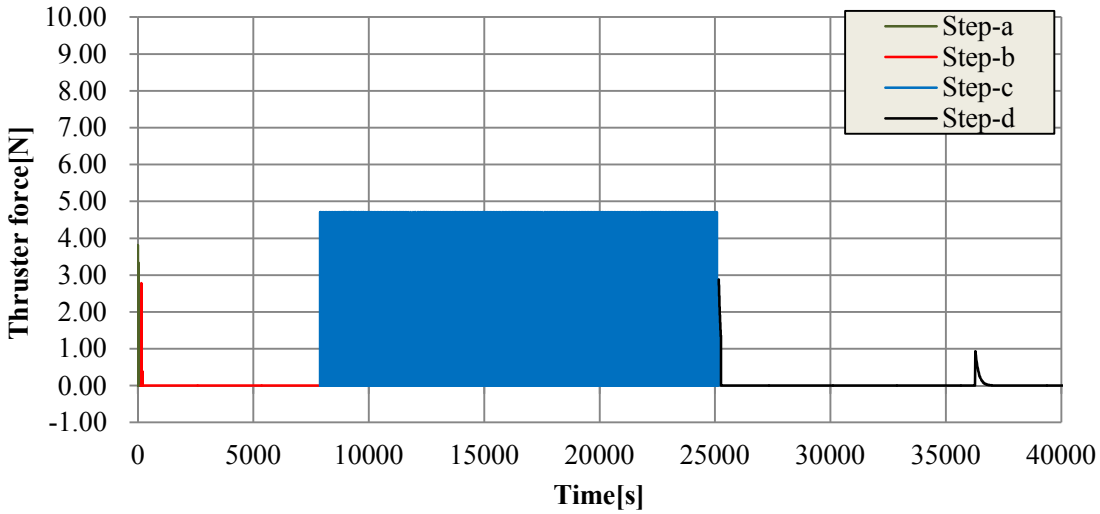



**Fig.4.22** Time history of $f_1$ in Case1

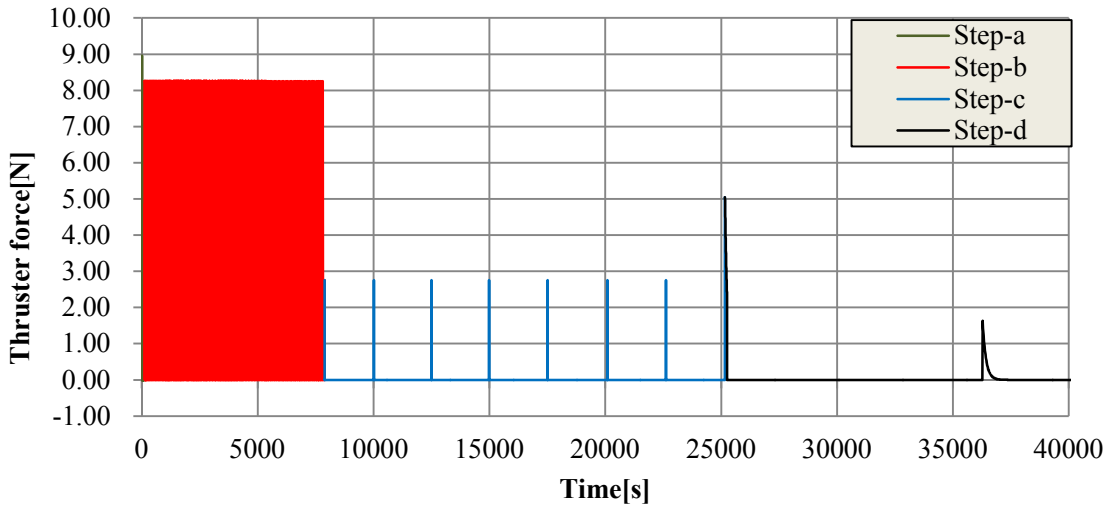



**Fig.4.23** Time history of $f_2$ in Case1

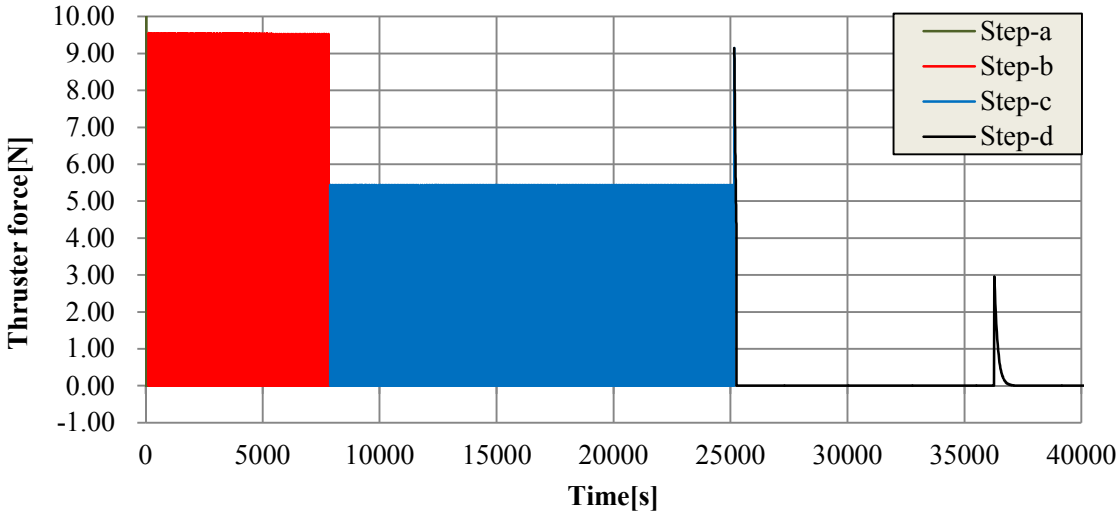
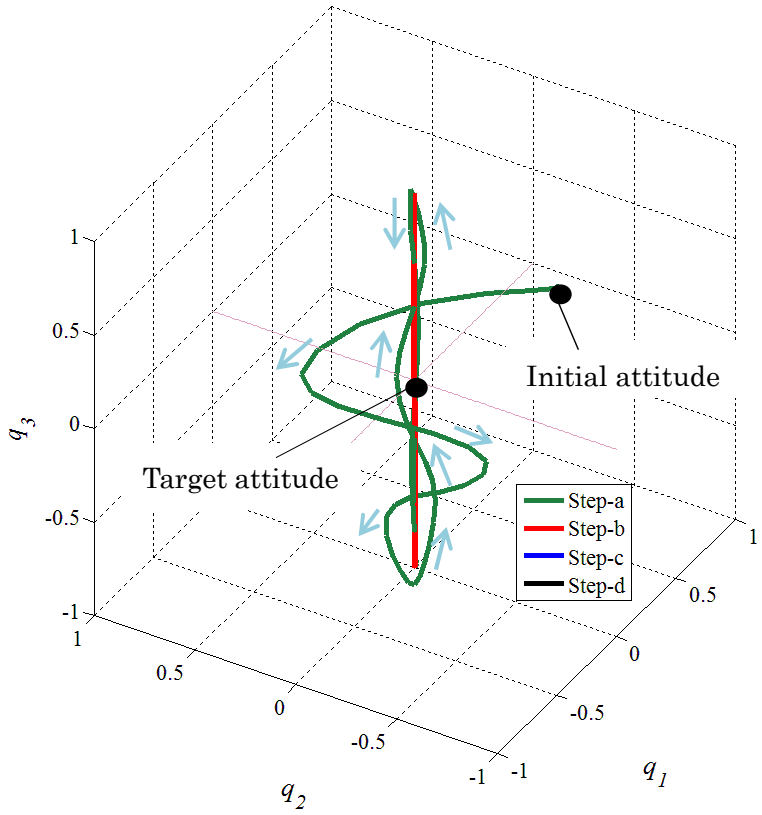
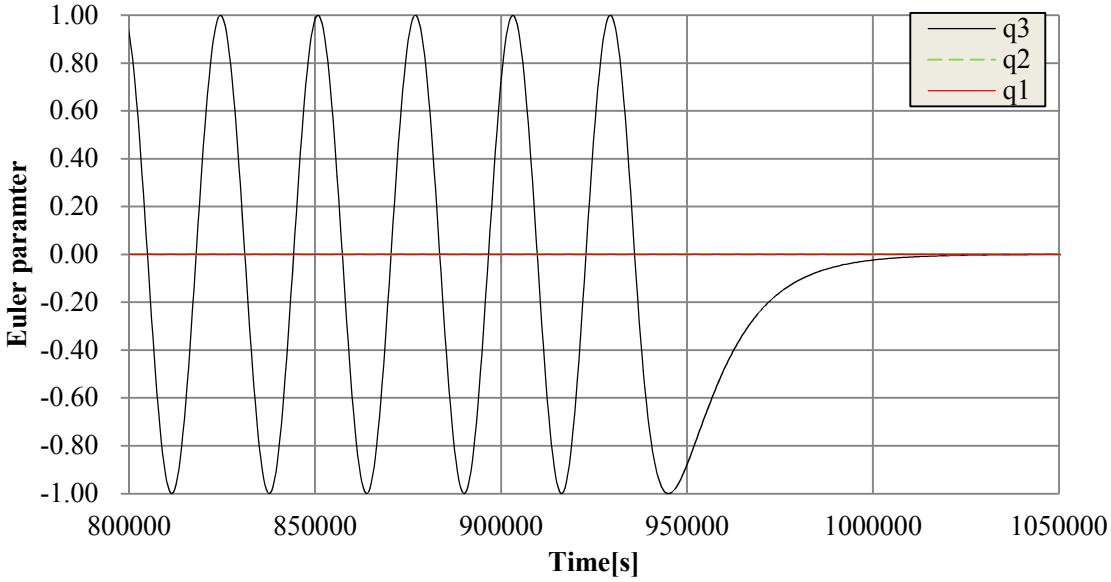



**Fig.4.24** Time history of $f_3$ in Case1




(a) Trajectory of Euler parameters to the target state




(b) Time history of Euler parameters around the target state

**Fig.4.25** Attitude in Case2

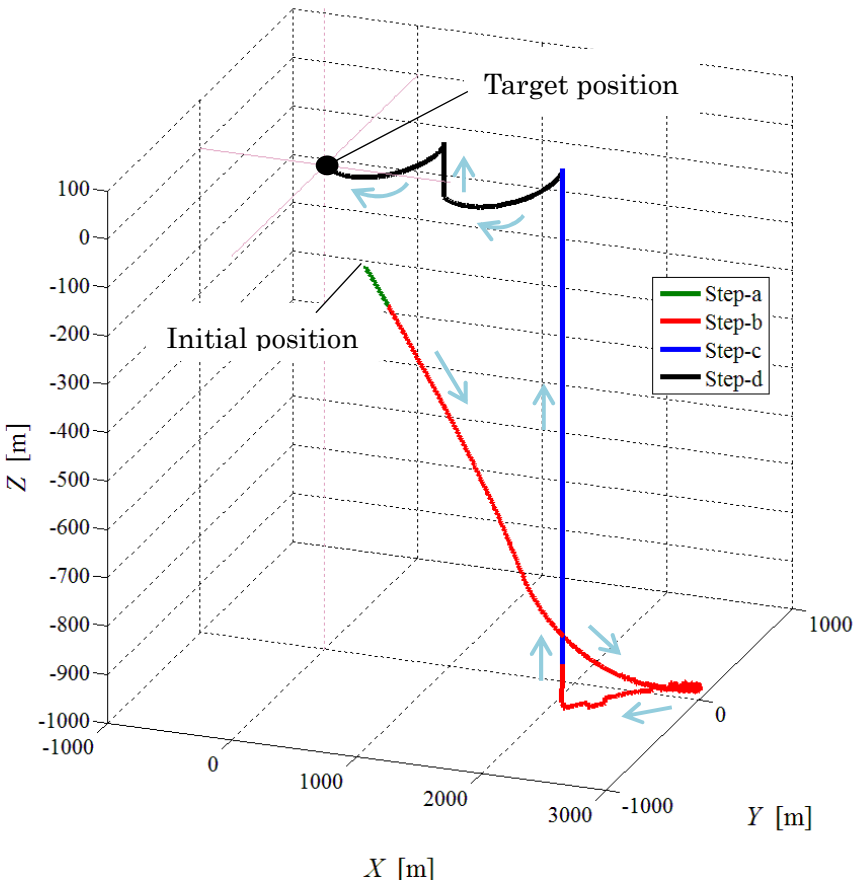



**Fig.4.26** Trajectory of position in Case2

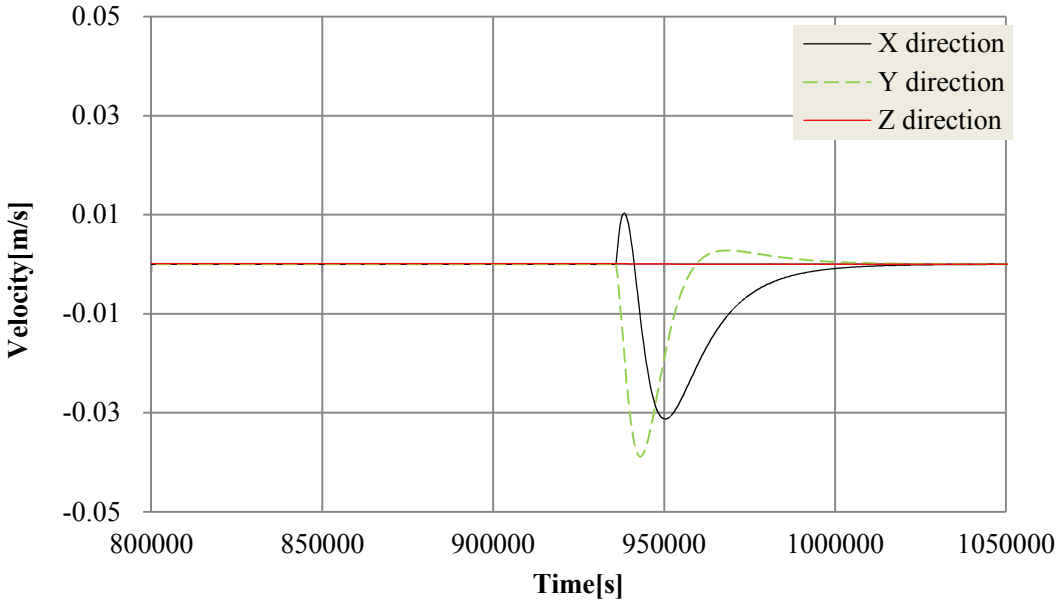
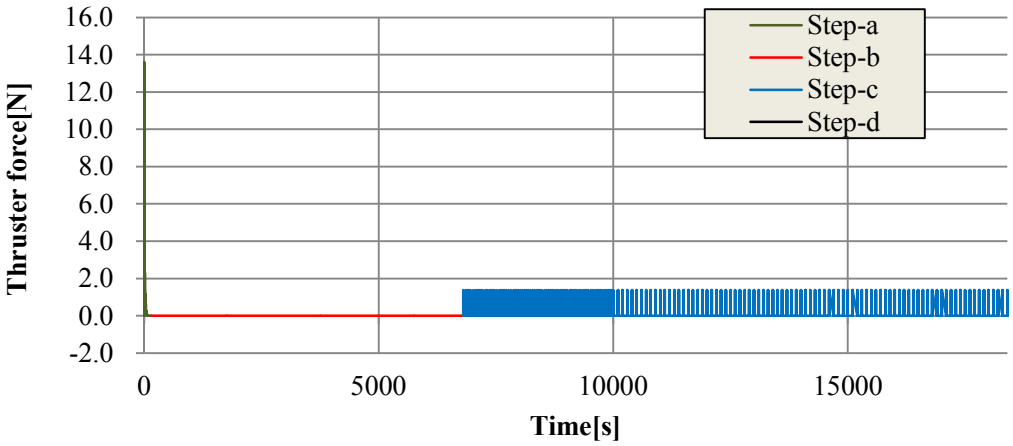
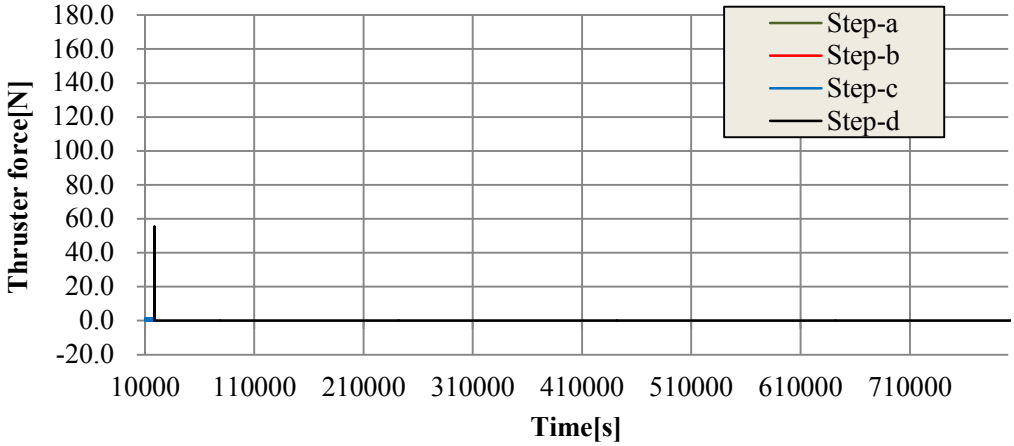


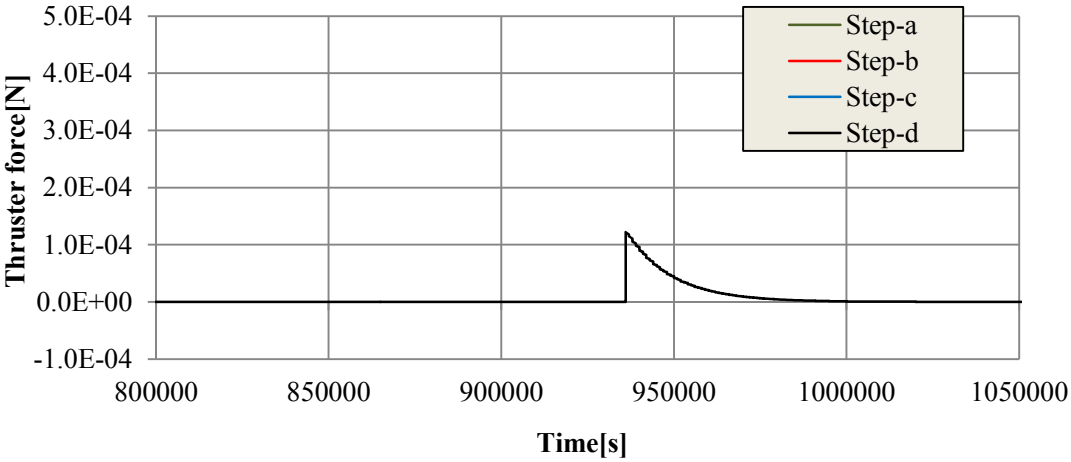

**Fig.4.27** Time history of translational velocities around the target state in Case2




(a) From Step-a to Step-c

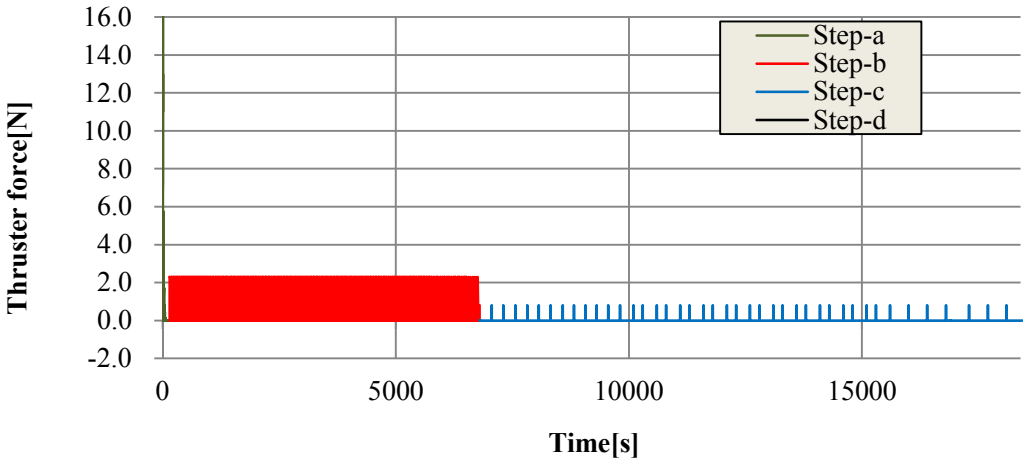



(b) The first part of Step-d

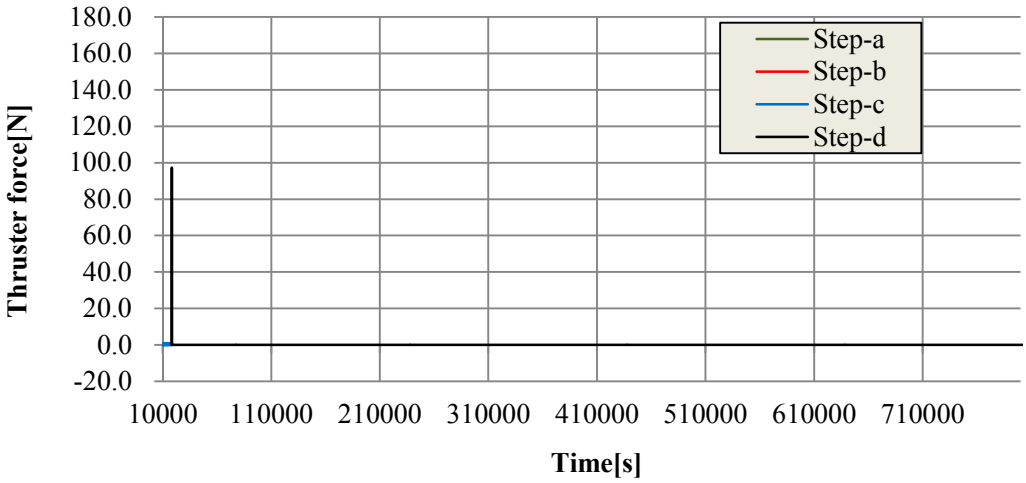



(c) The last part of Step-d

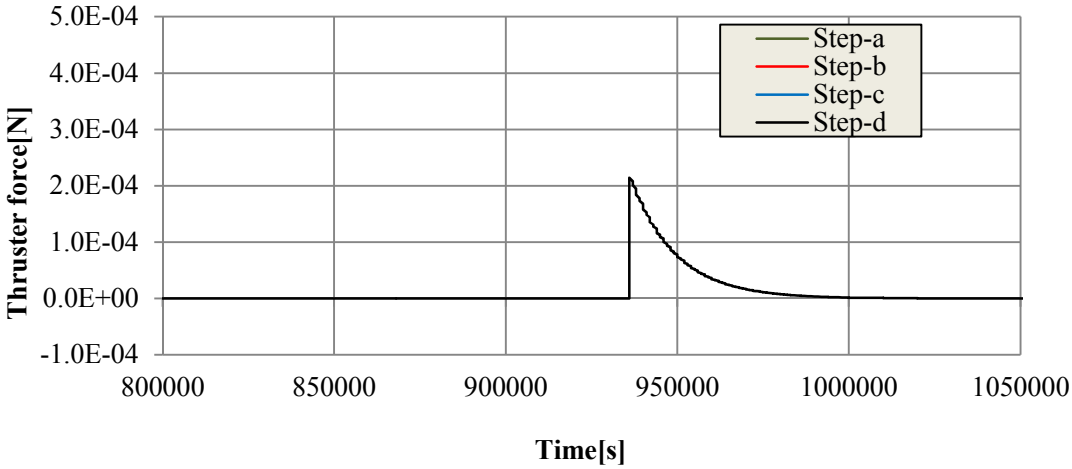
**Fig.4.28** Time history of $f_1$ in Case2




(a) From Step-a to Step-c

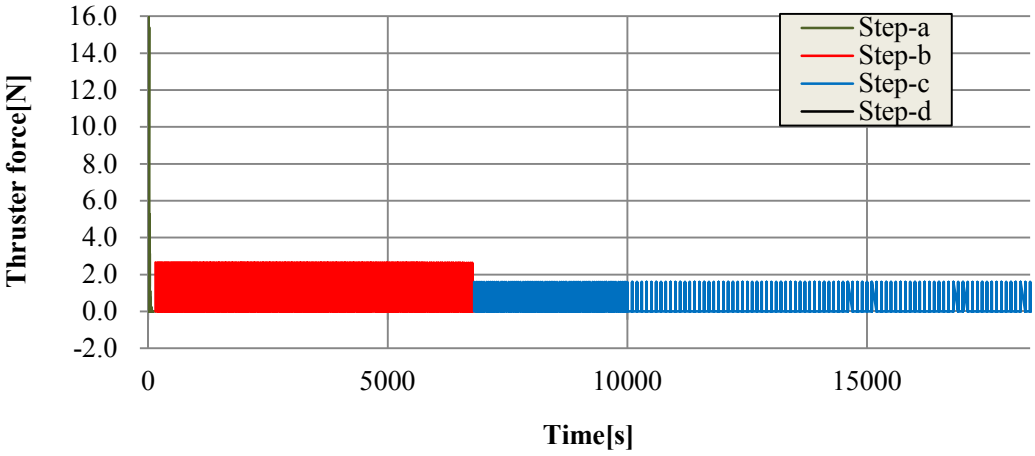



(b) The first part of Step-d

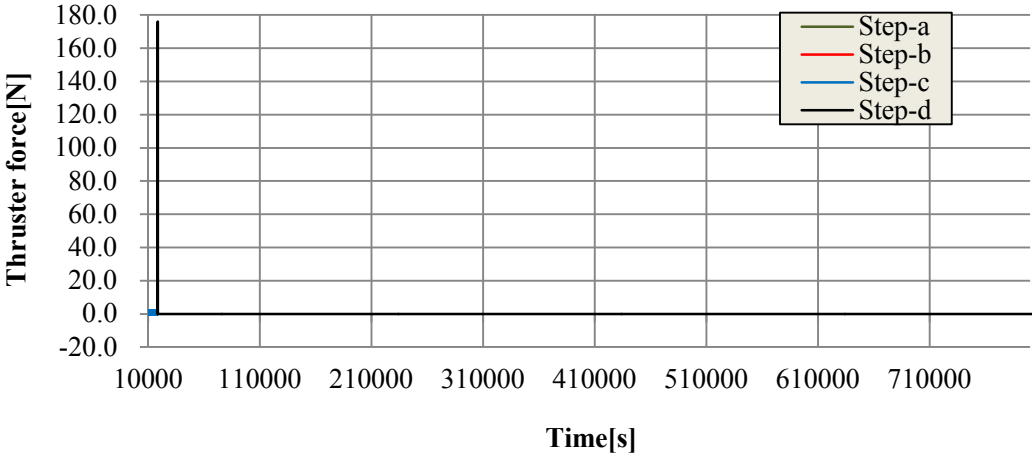



(c) The last part of Step-d

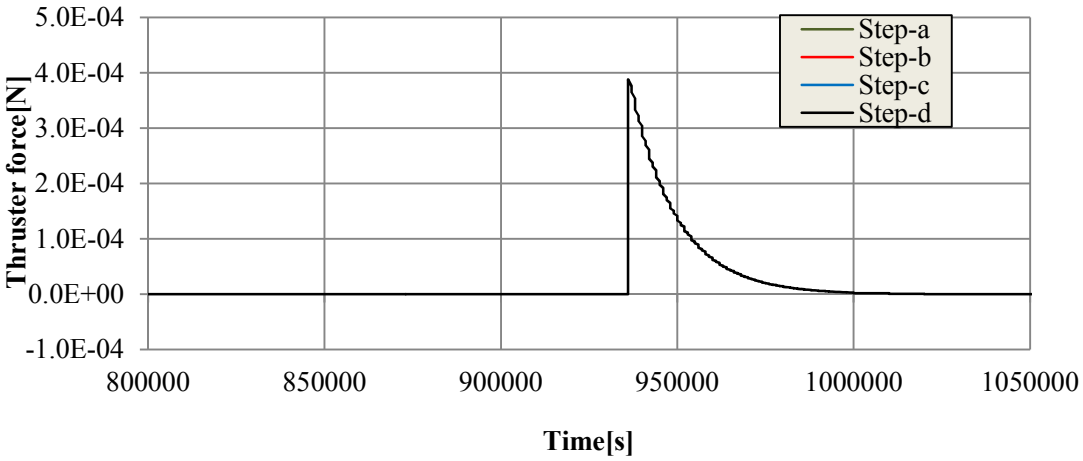
**Fig.4.29** Time history of $f_2$ in Case2




(a) From Step-a to Step-c

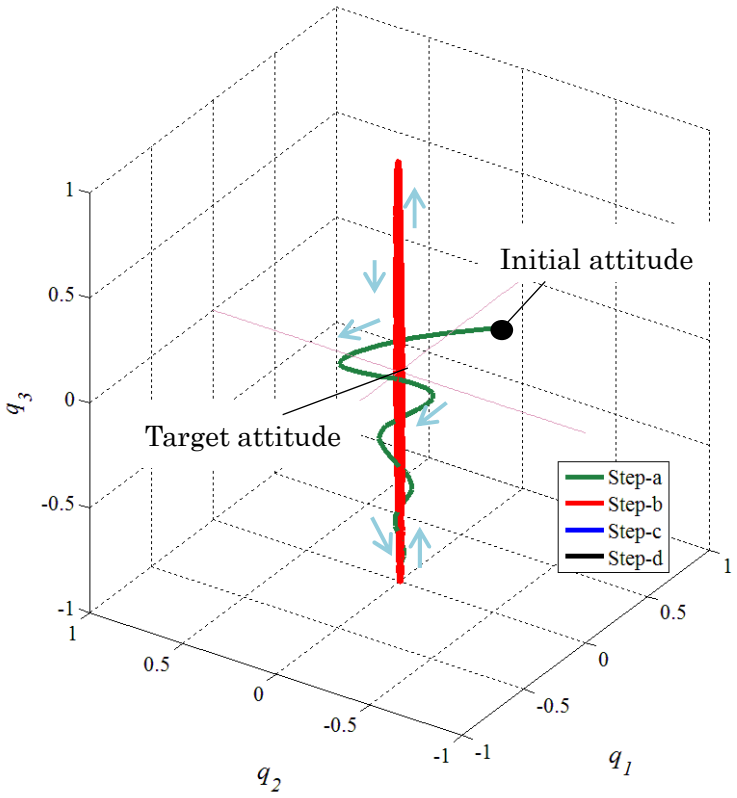



(b) The first part of Step-d

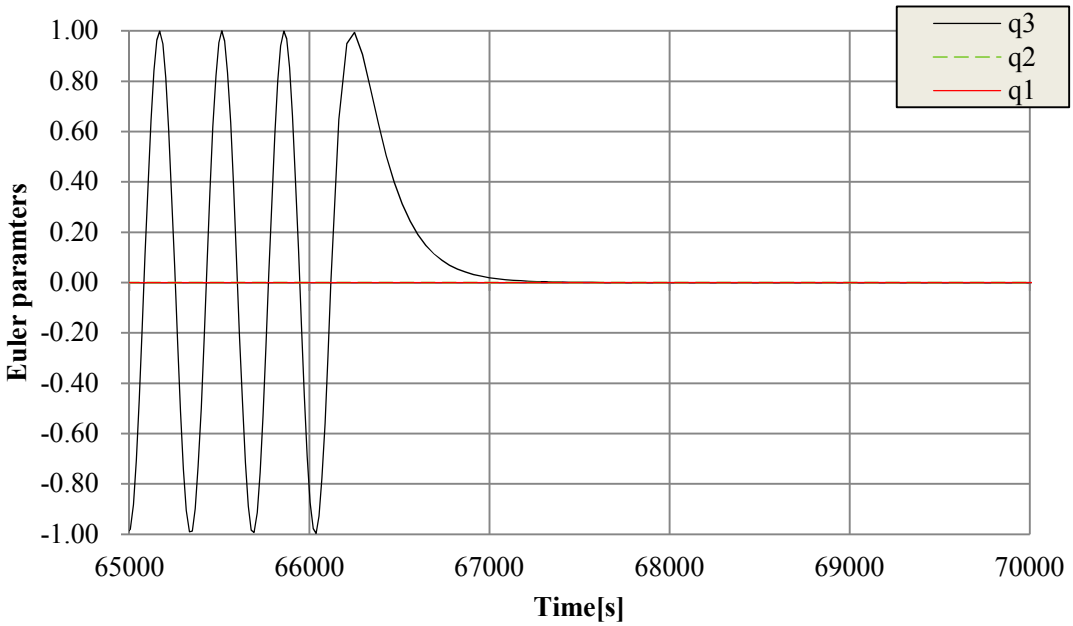



(c) The last part of Step-d

**Fig.4.30** Time history of $f_3$ in Case2




(a) Trajectory to the target state




(b) Time history of Euler parameters around the target state

**Fig.4.31** Attitude in Case3

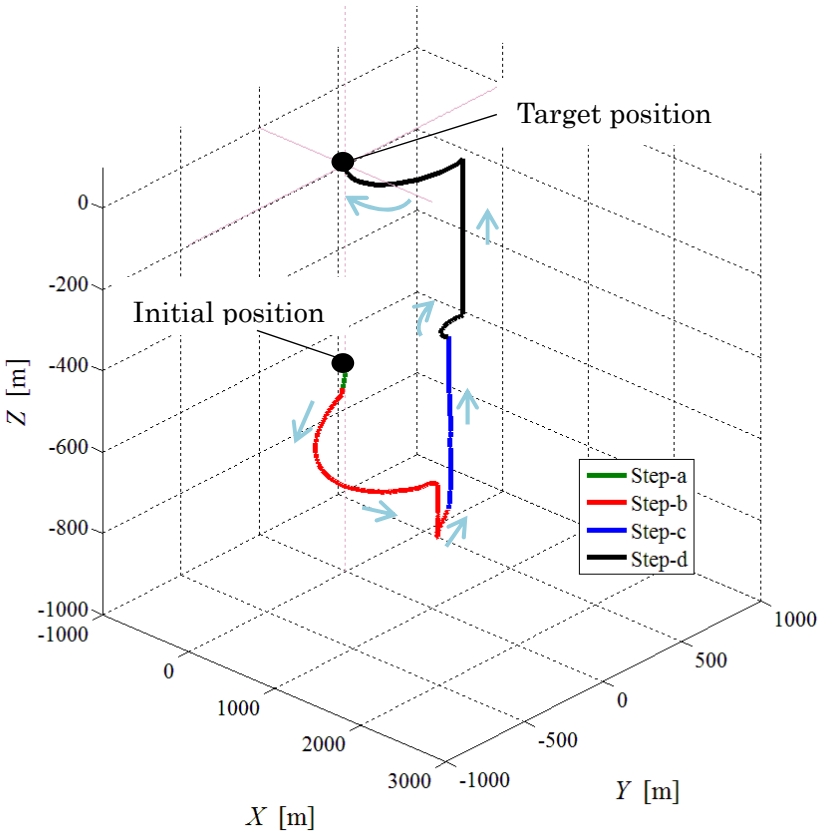



**Fig.4.32** Trajectory of position in Case3

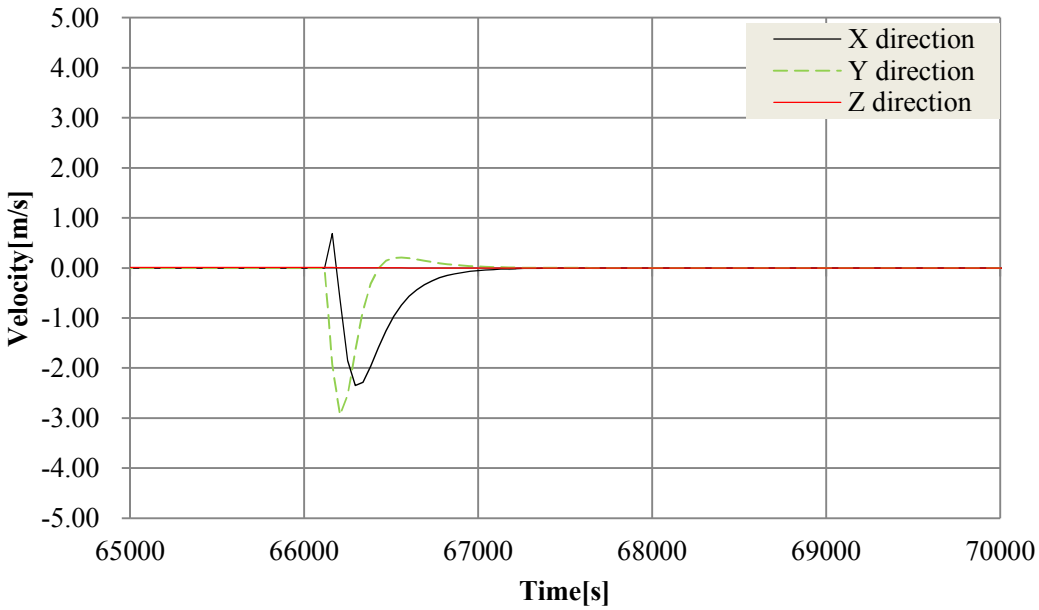



**Fig.4.33**Time history of translational velocities around the target state in Case3

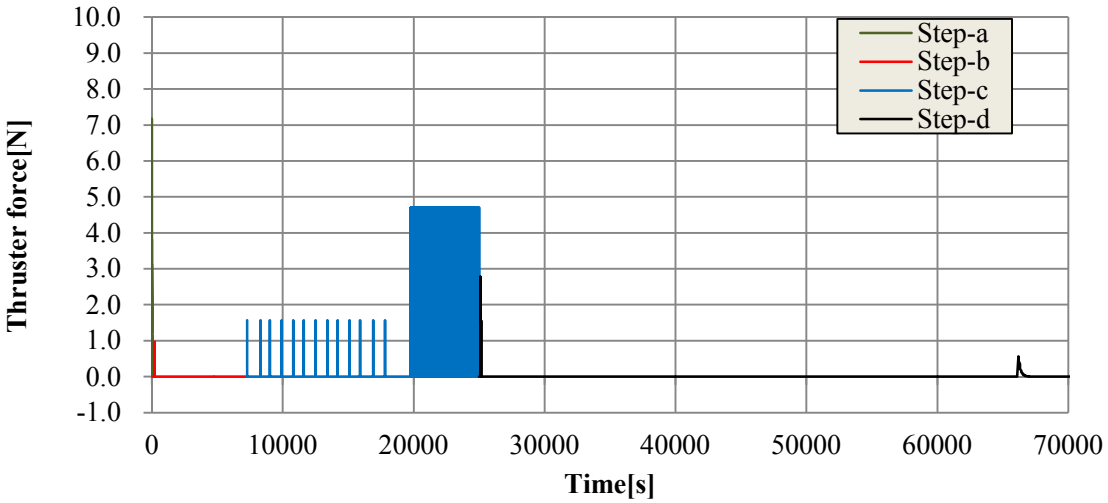



**Fig.4.34** Time history of $f_1$ in Case3

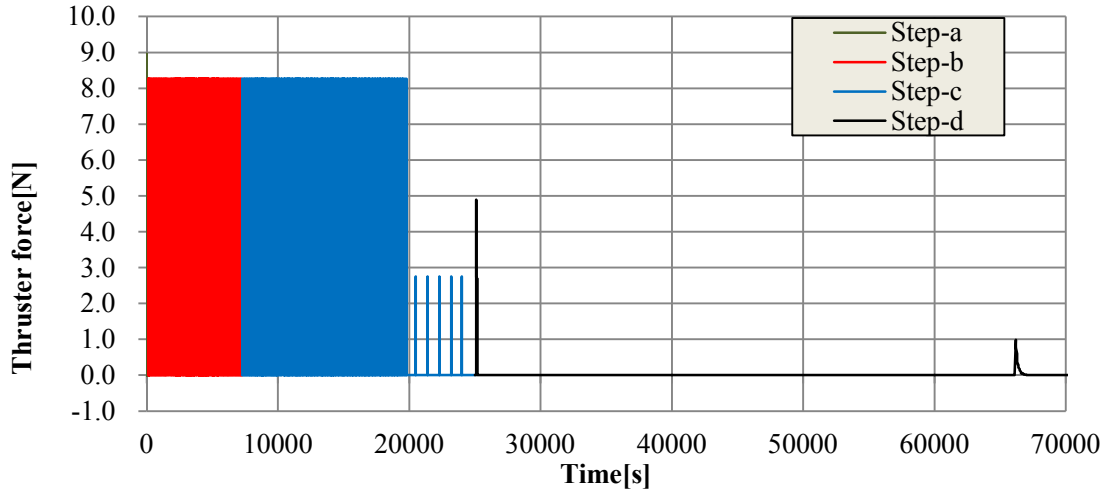



**Fig.4.35** Time history of $f_2$ in Case3

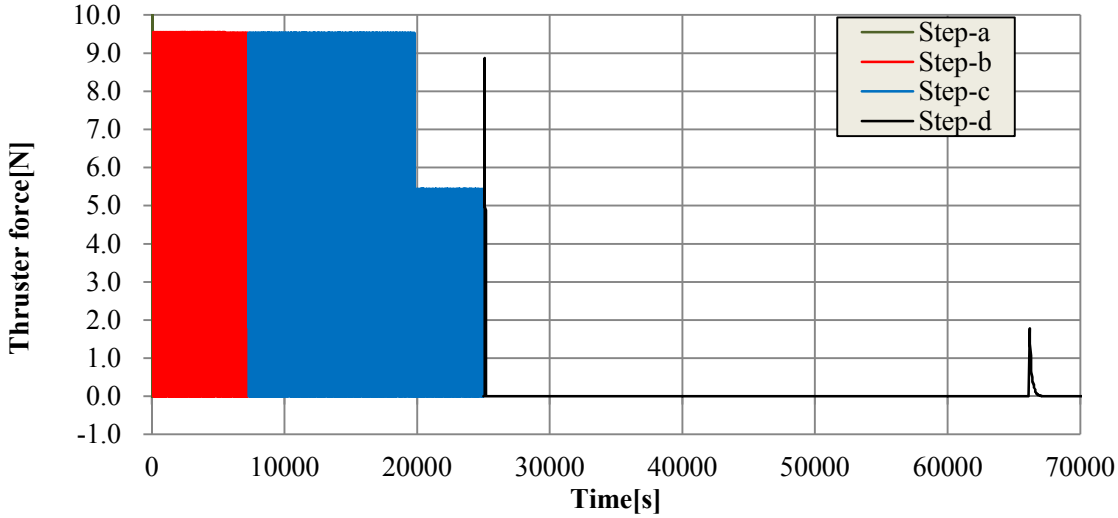



**Fig.4.36** Time history of $f_3$ in Case3

## 4. 5　4 章まとめ

本章では 3 次元の劣駆動宇宙機を対象に，その姿勢と位置の制御手法を検討した．

まず，3 次元の宇宙機の回転，並進運動の運動方程式を示した．この際，3 基の方向が固定されたスラスターを有する宇宙機では，回転運動と並進運動が従属関係にあることを示した．

次に，姿勢制御が可能なスラスター数と取り付け条件（スラスター方向と取り付け位置）を示した．4 基のスラスターにより直交する 3 軸に正負双方向の任意の大きさのトルクを発生できることを示し，そのためのスラスター取り付け位置と方向が満たすべき条件を導いた．また，3 基の方向が固定されたスラスターを有するケースにおいて，直交する 2 つの軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生できるスラスターの取り付け位置と方向の条件を導いた．第 3 軸回りに正（または負）のみのトルクが発生するケースに対してはその姿勢制御系を設計した．設計した制御系については数値シミュレーションにより有効性を検証した．

最終的には方向が固定された 3 基のスラスターにより，宇宙機の姿勢と位置を目標とすることに成功した．その制御系は 3 つの不変マニフォールドを用いる切り替え制御とし，数値シミュレーションにより有効性を検証した．

多くの設計パラメータを試行錯誤的に決定しなければならない点が課題であるものの，文献[28]が 2 基のスラスターを有する 2 次元の劣駆動宇宙機を取り扱っていたことを考えれば，3 基のスラスターで 3 次元の姿勢・位置が制御可能であることは大きな進歩である．3 基のスラスターによる制御は究極の劣駆動状態であり，これ以上のスラスター数の低減が不可能であることは直感的にも明らかである．本章で提案した制御系が，今後の劣駆動宇宙機制御の基本的な指針となることを期待する．

# 5 章　まとめと今後の課題

宇宙機の制御に要するアクチュエータ数を低減できれば，宇宙機の構造はよりシンプルなものとなり軽量化を行うことができる．さらに，少ないアクチュエータを想定した制御手法は現行の宇宙機のバックアップとして活用が可能であり，宇宙機の長寿命化への貢献が期待できる．このような背景のもと，本論文では，アクチュエータが全てスラスターである劣駆動宇宙機（制御するべき自由度に対して入力の数が少ない）に対して，姿勢と位置を同時に目標とする状態フィードバック制御系を検討した．

本論文において，制御系を大きく 3 つの劣駆動宇宙機に分けて論じた．

まず，2 章において 2 基のスラスターの方向が固定されており，かつ，その推力が正の範囲で可変な 2 次元劣駆動宇宙機の状態フィードバック制御系を検討した．面外方向の運動を面内運動と独立に制御可能なアクチュエータが生き残っていれば，劣駆動宇宙機の制御問題は 2 次元面内に帰着できる．ここでは，状態フィードバック制御系を提案し，従来の開ループ手法に対してモデル化誤差に対する安定性を増した．さらに，フィードバック制御が安定となるモデル化誤差の範囲を特定する式を示した．その有効性を，数値シミュレーションにより検証した．軌道運動を考慮した不変マニフォールドの設計が今後の課題である．

次の 3 章では，2 章の 2 次元宇宙機にさらに制約を加え，スラスター推力が ON/OFF である制御問題を取り扱った．これは，宇宙機の制御問題宇宙機に備わるスラスターの多くが ON/OFF 入力であることが背景となる．

スラスター推力が ON/OFF である劣駆動宇宙機において，2 基のスラスターが発生するトルクが釣り合う場合と釣り合わない場合とで問題の性質が異なる．そこで，これらを分けて議論し，それぞれについて不変マニフォールドを用いる切り替え制御系を設計した．
トルクが釣り合う場合は 4 つのステップにより不変マニフォールドへ到達する制御系を設計した．この際，各ステップの切り替えタイミングを状態量から定めることで，質量や慣性モーメントのモデル化誤差に対してロバスト性を向上した．また，トルクが釣り合わない場合に対しては，複数のマニフォールドを用いる切り替え制御系を検討した．トルクが釣り合わない場合はどのようなマニューバであっても並進力に伴って必ず回転トルクが発生する．このため，1 つの不変マニフォールドへ拘束しながら宇宙機を目標状態へ漸近させることが不可能である．そこで，複数のマニフォールドへ次々に宇宙機が遷移することで目標状態へ近づく制御系を考えた．さらに，数値シミュレーションにより上記 2 通りのケースに対する制御系の有効性を検証した．

なお，トルクが釣り合わない場合はモデル化誤差に対する制御の安定性を検討するに至らなかった．提案手法では開ループによりスラスター駆動時間を定めたが，これに状態量のフィードバックを行うことでモデル化誤差に対して安定性を増すことが可能であると思

われる．また，軌道運動を考慮した不変マニフォールドの設計も課題となる．

最後に 4 章では 3 次元の劣駆動宇宙機の姿勢・位置の制御手法を検討した．これは，2 次元面内に投影することができない，すなわち，2 次元面外のスラスターも劣駆動であることを想定した検討である．この検討により，極限までスラスター数を低減することを狙った．

この章ではまず，3 次元の宇宙機の回転・並進運動の運動方程式を示した．この際，3 基の方向不可変なスラスターを有する宇宙機では，回転運動と並進運動が従属関係にあることを示した．次に，“正負双方向の任意の大きさのトルクが発生可能”という観点から必要なスラスター数と取り付け条件（スラスター方向と取り付け位置）を検討した．これらを 3 つのケースに分けて議論した．その 3 つのケースとは，i) 4 基のスラスターを仮定した直交する 3 軸回りに独立に正負双方向の任意の大きさのトルクを発生可能なケース, ii) 3 基のスラスターを仮定した直交する 2 軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生でき，かつ，第 3 軸に直交する軸回りのトルクが恒等的に 0 となるケース，iii) 3 基のスラスターを仮定した直交する 2 軸回りに正負双方向の任意の大きさのトルクを発生でき，かつ，第 3 軸まわりに正（または負）のみのトルクが発生可能となるケース，である．

i)，ii)においては既存の姿勢制御手法を適用できるが，iii)に対しては適用できないため，新たに制御系を設計した．この制御系の特徴は，ジャイロ効果を用いて正（または，負）のみのトルクが発生する軸回りに負（または，正）方向のシングルスピン状態を作り出すことである．設計した制御系については数値シミュレーションにより有効性を検証した．

この姿勢制御系をさらに発展させ，最終的に 4 章では 3 基のスラスターによる宇宙機の姿勢と位置の同時制御に成功した．その制御系は 3 つの不変マニフォールドを用いる切り替え制御とした. 制御系は Step-a から Step-d までの 4 つのステップにより構成され, Step-a は第 1 の不変マニフォールドへの到達則, Step-b は第 1 の不変マニフォールドへ状態を拘束しつつの第 2 の不変マニフォールドへの到達則，Step-c は第 1，第 2 の不変マニフォールドへ状態を拘束しつつの第 3 の不変マニフォールドへの到達則, Step-d は 3 つの不変マニフォールドへ状態を拘束しつつの目標状態への到達則である．第 2 と第 3 の不変マニフォールドは第 1 の不変マニフォールド上に宇宙機がある限り不変であるように設計されているため，これらの到達にあたっては，宇宙機の摂動と第 1 の不変マニフォールドへの収束を繰り返す．この点が本制御系の特徴となる．提案手法の有効性を数値シミュレーションにより検証した．

本制御系においては，設計パラメータの多くを試行錯誤により定めなければならない点が課題となる．これらの設定の指針はシステムのダイナミクスをより詳細に解析することで得ることができる．その他，ロバスト性の確保，軌道の運動を考慮した不変マニフォールドの設計が今後の課題となる．

従来は，同様の研究として 2 基の推力が可変なスラスターを備える 2 次元劣駆動宇宙機の開ループ制御が報告されたのみであった．これに対し，本論文に示したロバスト性の確保や ON/OFF 入力を考慮した制御系はこの分野において確かな進捗を得たものと考える．

特に，3 基というスラスター数で 3 次元の姿勢・位置が制御可能であることは大きな進歩である．3 基のスラスターによる制御は究極の劣駆動状態であり，これ以上のスラスター数の低減は望めない．提案した制御系が，劣駆動宇宙機制御の指針となることを期待する．

# 謝辞

指導教員である外本教授に感謝を表したい．社会人ドクターでありながら会社の業務と全く関連のない分野で博士論文を作成するという困難な状況のもと，研究の進め方から論文作成までを根気よくご指導いただいた．学会発表，論文投稿の結果を残すこともできた．

また，助教の藤田氏，同じ博士課程の学生である吉村氏にも感謝を表する．研究室訪問の度に貴重なご助言をいただいた．彼らとの対話が無ければここまでの研究成果は無かったと考える．

最後に，社会人博士課程への入学に理解をいただいた会社の上司と同僚，そして，家族に大きな謝意を表したい．

# 参考文献


[1] 川口淳一郎，“「はやぶさ」60 億キロの旅”，日系サイエンス，Vol.40，No.9(2010)，日本経済新聞， pp. 3-9

[2] 川口淳一郎，“「はやぶさ」の超技術”，講談社，2011 年 3 月 20 日第 1 刷発行

[3] Brockett, R.W., “Asymptotic stability and feedback stabilization,” in Differential Geometric Control Theory(1986), Birkhauser, pp. 181-191.

[4] Isidori, A. , “Nonlinear Control Systems,” Third edition,Springer-Verlag(1995).

[5] Murray, R. M. and Sastry, S.S., “Nonholonomic Motion Planning Steering Using Sinusoids,” IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38(1993), pp. 700-716.

[6] Sordalen, O.J. and Egeland, O., “Exponential Stabilization of Nonholonomic Chained Systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.40 (1995), No.1, pp.35-49.

[7] Khenouf, H. and de Wit, C.C., “On the Construction of Stabilizing Discontinuous Controllers for Nonholonomic Systems,” Proceedings of IFAC Nonlinear Control Systems Design Sympo, (1995), pp.747-752.

[8] Mukajee, R. and Kamon, M., “Almost Smooth Time-Invariant Control of Planar Space Multibody Systems,” IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol.15 (1999), No.2, pp.268-280.

[9] Chwa, D., “Sliding-Mode Tracking Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots in Polar Coordinates”, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.12 (2004), No.4, pp. 637-644.

[10] 外本伸治, 松野崇, ”マニフォールドを利用した宇宙ロボットの制御に関する検討”,日本ロボット学会誌，Vol.23(2005), No.5, pp.594-601.

[11] 外本伸治，船迫俊郎，“移動するマニフォールドを用いた平面宇宙ロボットのフィードバック制御”，日本ロボット学会誌，Vol. 25(2007), No. 5, pp.745-751.

[12] Park, B.S., Yoo, S. J., Park, J. B., and Choi, Y. H., “Adaptive Neural Sliding Mode Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots With Model Uncertainty”, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.17(2009), No.1, pp. 207-214.

[13] Laiou, M.C. and Astolfi, A., ”Discontinuous Control of High-order generalized Chained Systems”, System and Control Letters, Vol.37 (1999), pp.309-322.

[14] Wei, L., Pongvuthithum, R. and Qian, C., “Control of High-Order Nonholonomic Systems in Power Chained Form Using Discontinuous Feedback”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.47 (2002), No.1, pp.108-115.

[15] Ma, B.L. and Tso, S.K., “Unified controller for both trajectory tracking and point regulation of second-order nonholonomic chained systems”, Robotics and Autonomous Systems, Vol.56

(2008), pp.317-323.

[16] 山田学，高野洋瑛，舟橋康行，“高次チェインドシステムの大域的指数安定化制御 ―サンプル値制御法に基づいたオブザーバとフィードバック補償器の設計―”，計測自動制御学会論文集，Vol.46(2010)，No.4，pp.199-208.

[17] Jayawardena, C., Watanabe, K. and Izumi, K., “Posture Control of Robot Manipulators with Fuzzy Voice Commands Using a Fuzzy Coach-Player System”, Adv. Robotics, Vol.21 (2007), pp.293-328.

[18] 石川将人，“複数のジェネレータを持つ高階非ホロノミックシステムの切替フィードバック制御”，システム制御情報学会論文誌, Vol.22(2009), No.7, pp.280-286.

[19] Tsiotoras P., Corless M. and Longuski J.M., “A novel approach to the attitude control of axisymmetric spacecraft,” Automatica, Vol.31(1995) , No.8, pp.1099-1112.

[20] Tsiotras P. and Doumtchenko V., “Control of spacecraft subject to actuator failures state-of-the-art and open problems,” Journal of Astronautical Sciences, (2000), pp. 337-358.

[21] Shen, H. and Tsiotras, P., “ Time-Optimal Control of Axi-symmetric Rigid Spacecraft Using Two Controls”, Journal of Guidance and Control Dynamics, Vol.22(1999), pp.682-694.

[22] 山田克彦，吉河章二，“2 個のホイールによる人工衛星の姿勢制御”，計測自動制御学会論文集，Vol.34(1998)， No.1, pp.34-40.

[23] Kasai, S., Kojima, H. and Satoh, M., “Spacecraft attitude maneuver using two single-gimbal control moment gyros”, Acta Astronautica, Vol.84 (2013), pp.88-98.

[24] 小島広久，“宇宙機マヌーバのためのスライディングモード制御設計”，東京大学 博士学位論文(2007).

[25] 遠藤達也，上野誠也，“2 ホイールによる人工衛星の最小エネルギマヌーバ軌道”，日本航空宇宙学会論文集，Vol.51(2003)，No.598，pp.613-620.

[26] 遠藤達也，上野誠也，“2 ホイールによる人工衛星のエネルギ準最適制御則”，日本航空宇宙学会論文集，Vol.52(2004)，No.602，pp.135-140.

[27] 照井冬人，木村真一，永井康史，山本宏，吉原圭介，山元透，中須賀真一，“小型衛星 μ-LabSat による月トラッキング姿勢制御実験”，宇宙航空研究開発機構研究開発報告，JAXA-RR-05-038.

[28] Hokamoto, S. and Iwase, M., “Position and Attitude Control of a Planar Satellite by Two Thrusters”, Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, (2009), AIAA 2009-6183.

[29] 外本伸治，“非ホロノミック性を利用した剛体衛星の軌道変更に関する研究”，日本航空宇宙学会論文集，Vol.54(2006)，No.634，pp.477-484.

[30] 野波健蔵，田宏奇，”スライディングモード制御 ―非線形ロバスト制御の設計理論―“，コロナ社，1994 年 10 月 20 日第 1 刷発行

[31] Sidi, M. J., “Spacecraft Dynamics & Control. A Practical Engineering Approach”, Cambridge

University Press, 1997, Sec.9.5.

[32] B. Goodwine, J. Burdick, “Controllability with unilateral control inputs,” Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 3(1996), pp. 3394-3399.

[33] Sussman, H. J., “A General Theorem on Local Controllability”, SIAM Journal of Control and Optimization, Vol.25 (1987), No.1, pp.158-194.

[34] ChangDiaz, F.R., Squire, J. P., Bengtson, R. P., Breizman. B. N., Baity, F. W. and Carter, M. D. “ The Physics and Engineering of the VASIMR Engine”, Proceedings of 36th JPC, (2000), AIAA-2000-3756, pp.1-8.

[35] 安藤晃, 服部邦彦, 犬竹正明, "VASIMR 型プラズマ推進機の研究開発状況と課題", 2005 年度宇宙関連プラズマ研究会講演集, JAXA リポジトリ, 2006.

[36] 安藤晃，”有人宇宙探査に向けた大電力プラズマ推進機開発への挑戦”, J. Plasma Fusion Res. Vol.83 (2007), No.3，pp.276-280.

[37] 松野崇，吉村康広，外本伸治，“状態フィードバックによる 2 つのスラスターをもつ衛星の面内位置・姿勢制御”，日本航空宇宙学会論文集，Vol.59(2011)，No.690，pp.183-189.

[38] Matsuno T., Hokamoto S., “Position and Attitude Feedback Controller of a Planar Satellite with Two Thrusters”, Proceedings of the ICROS-SICE International Joint Conference, (2009), pp.4206-4211,

[39] Matsuno T., Hokamoto S., “Position and Attitude Control of a Planar Satellite by Two Constant Force Thrusters”, Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, (2010), AIAA-2010-8393

[40] Yoshimura Y., Matsuno T., Hokamoto S., “Satellite Position and Attitude Control by On-Off Thrusters Considering Mass Change”, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 142 (2012), pp. 2971-2982

[41] 松野崇，吉村康広，外本伸治，“ON-OFF スラスター出力による二次元劣駆動衛星の姿勢と位置の制御”，日本機械学会論文集 C 編，Vol. 79(2013), No.798, pp.225-235.

[42] 松野崇，吉村康広，外本伸治，“方向が機体に固定された 3 本のスラスターによる人工衛星の姿勢制御”，第 55 回宇宙科学技術連合講演会講演集，JSASS-2011-4243 (2011).

[43] Yoshimura Y., Matsuno T., Hokamoto S., “Three Dimensional Attitude Control of an Underactuated Satellite with Thrusters”, International Journal of Automation Technology, Vol.5 (2011), No.6, pp.892-899.

[44] Yoshimura Y., Matsuno T., Hokamoto S., “Position and Attitude Control of an Under-actuated Satellite with Constant Thrust”, Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, (2011), CD-ROM.